

## Tarea 5

**Profesor: Fernando Lund**

Auxiliar: Javier Huenupi

Ayudante: Pedro J. Aguilera Rojas

**Indicación:** Esta tarea debe ser entregada en formato PDF por UCursos (recuerde poner su nombre en su desarrollo) a más tardar el jueves 21 de septiembre a las 23:59

### Pregunta 1: Trompo

Considere una peonza simétrica de masa  $M$ , la cual tiene un punto fijo  $P$  a una distancia  $l$  desde el centro de masa como se muestra en la Figura 1. Los momentos de inercia principales alrededor de  $P$  son  $I_1, I_1$  y  $I_3$  y los ángulos de Euler se muestran también en la Figura 1. La peonza parte con las condiciones iniciales  $\dot{\phi} = 0$  y  $\theta = \theta_0$

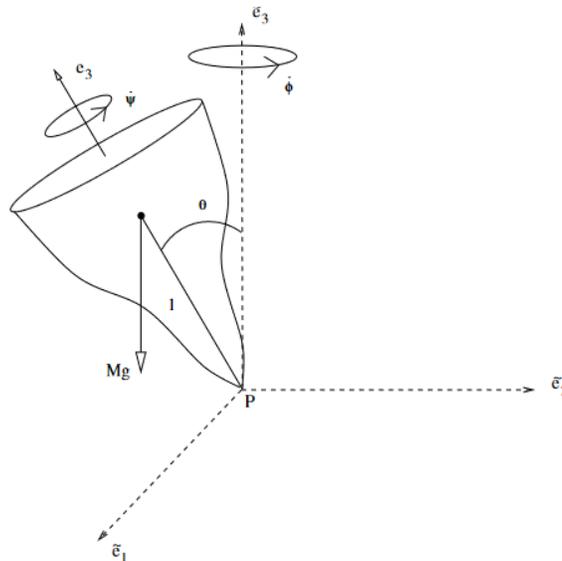


Figura 1: Peonza simétrica.

Sabemos que  $\theta$  cumple lo siguiente:

$$I_1 \ddot{\theta} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \theta},$$

donde

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{I_3^2 \omega_3^2 (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))^2}{2I_1 \sin^2(\theta)} + Mgl \cos(\theta)$$

- a) Suponga que la peonza gira muy rápido y que  $I_3 \omega_3 \gg MglI_1$ . Muestre que el valor mínimo de  $V_{\text{eff}}(\theta)$  se encuentra aproximadamente en  $\theta_0$ .

- b) Use la parte anterior para deducir que la peonza nuta con una frecuencia  $\Omega$  y grafique o dibuje el movimiento subsecuente:

$$\Omega \approx \frac{I_3 \omega_3}{I_1}$$

- c) Graficar y caracterizar, ya sea numérica o analíticamente, las trayectorias en el espacio de fases para esta peonza en el régimen impuesto en la parte a).

## Pregunta 2: Chincheta

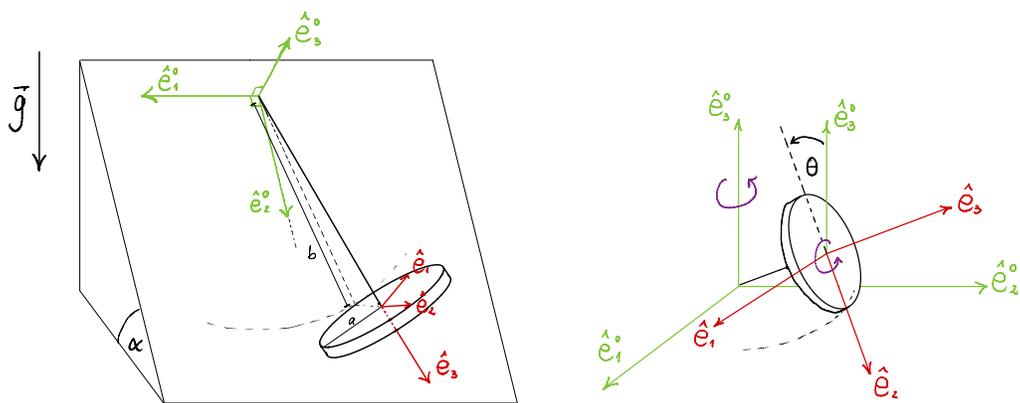
Considere un disco delgado (plano) de masa  $M$  y radio  $a$  unido en su centro a una barra de masa despreciable y con su otro extremo fijo a un plano inclinado con ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal, ver Figura 2.a, formando una especie de péndulo inclinado.

Este disco rueda sin resbalar siguiendo un círculo de radio  $b$  en el plano inclinado y manteniendo un ángulo de inclinación fijo  $\theta$ , ver Figura 2.b.

Para definir los ángulos y rapidezes angulares utilice como referencia el sistema de coordenadas  $\{\hat{e}_i^0\}$  que es un sistema inercial **fijo al plano inclinado** y con origen en el extremo de la barra unida al disco. También utilice como referencia el sistema de coordenadas **fijo al disco**  $\{\hat{e}_i\}$  que se mueve de forma solidaria a él.

Considere la presencia de aceleración de gravedad  $\vec{g}$ .

- Encuentre la expresión de la velocidad angular del disco en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo  $\{\hat{e}_i\}$
- Encuentre el Lagrangiano del sistema
- Encuentre el punto de equilibrio del sistema. Demuestre que considerando pequeñas oscilaciones en torno a este punto se obtiene la ecuación de un péndulo simple y calcule su frecuencia de pequeñas oscilaciones
- Calcule las expresiones de las fuerzas de restricción



(a) Chincheta colgando y formando un péndulo inclinado

(b) Movimiento de la chincheta visto desde el sistema  $\{\hat{e}_i^0\}$

Figura 2: Problema de la chincheta