Auxiliar 4

Sólido rígido II: Ángulos de Euler

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

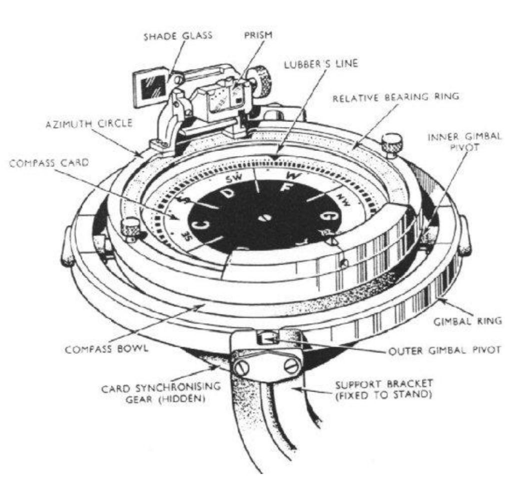
P1.- Gircompás

Considere un giroscopio simétrico (con $I_1 \neq I_2 = I_3$) que se encuentra en un punto fijo en la superficie de la Tierra a una latitud $\pi/2 - \delta$ (ángulo medido desde el Ecuador hasta la posición del objeto). El eje de simetría del giroscopio solo se puede mover en el plano tangente a la Tierra y esta se encuentra rotando con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$.

a) Utilice distintas rotaciones para expresar las distintas velocidades angulares en un sistema de coordenadas fijo al giroscopio

b) Encuentre las ecuaciones de movimiento y los equilibrios del sistema

c) Considere que la velocidad de giro del giroscopio es mucho más grande en magnitud que la velocidad de rotación de la Tierra, $\dot{\psi} \gg \Omega$, ¿cómo sería el equilibrio que encontró en b)? Concluya de por qué este objeto puede ser usado como una brújula



(a) Girocompás

(b) De cuando hice aux en Caltech 1963

Formulario

Sólido rígido

El Lagrangiano de un sólido rígido puede ser escrito como

$$L = K - U = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{R}}_{\text{CM}}|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^t I_{\text{CM}}\vec{\omega} - U = \frac{1}{2}\vec{\omega}^t I_{\mathcal{O}'}\vec{\omega} - U,$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del sólido, $I_{\mathcal{O}'}$ la matriz de inercia calculada c/r a un punto $\mathcal{O}'$ **fijo** tanto en el sólido como en el espacio y U la energía potencial.

Ángulos de Euler

La velocidad angular de un sólido rígido en un sistema de coordenadas **fijo al cuerpo** puede ser escrita en función de los ángulos de Euler θ, ϕ, ψ como:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Matrices de rotación

Para pasar de un sistema $\{\hat{e}_i\}$ a un sistema rotado $\{\hat{e}'_i\}$ con respecto a $\{\hat{e}_i\}$, a $\{\hat{e}_i\}$ se le debe aplicar alguna de las siguientes rotaciones:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$