

Auxiliar 3

Sólido rígido I

Profesor: Fernando Lund

Auxiliar: Javier Huenupi

Ayudante: P. Joaquín

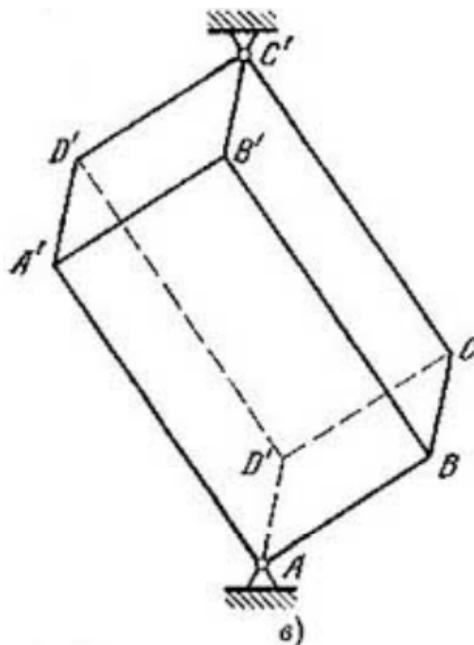
P1.- El terror de la generación 2021-2

En los dos vértices opuestos A y C' de un paralelepípedo rectangular homogéneo se encuentran articulaciones que permiten al paralelepípedo girar libremente con velocidad angular alrededor de la diagonal AC' que pasa por el centro de masa del sólido.

Las aristas del paralelepípedo son:

$$\overline{AB} = a, \quad \overline{BC} = b, \quad \overline{AA'} = c$$

- Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema
- Encuentre el valor de las fuerzas de pivote que se ejercen en los extremos del paralelepípedo



Hint: considere que el sólido solo gira en la dirección de \hat{k}_I (la vertical de toda la vida y que está contenida en la recta $\overline{AC'}$), por lo que no tiene movimiento de rotación ni nutación, **solo tiene precesión** (en ángulos de Euler: $\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$)

Formulario

Sólido rígido

El Lagrangiano de un sólido rígido puede ser escrito como

$$L = K - U = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{R}}_{\text{CM}}|^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{\text{CM}}\vec{\Omega} - U = \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}'}\vec{\Omega} - U,$$

donde $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sólido, $I_{\mathcal{O}'}$ la matriz de inercia calculada c/r a un punto \mathcal{O}' **fijo** tanto en el sólido como en el espacio y U la energía potencial.

Podemos calcular las fuerzas de restricción igual que para el caso de partículas discretas

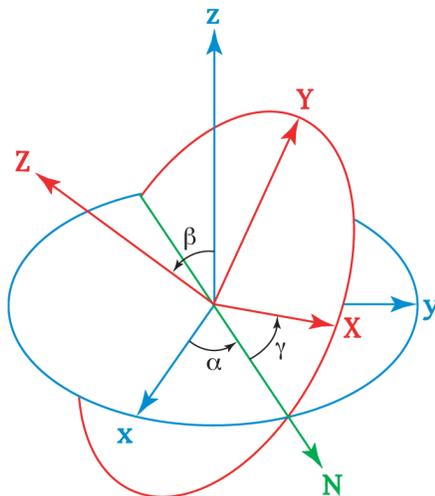
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i},$$

donde λ_j son las fuerzas de restricción y f_j las restricciones geométricas.

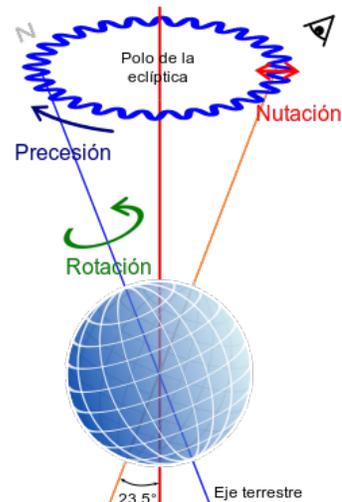
Ángulos de Euler

La velocidad angular de un sólido rígido en un sistema de coordenadas **fijo al cuerpo** puede ser escrita en función de los ángulos de Euler θ , ϕ , ψ como:

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}.$$



(a) Ángulos de Euler donde $\alpha = \phi$, $\gamma = \psi$, $\beta = \theta$



(b) Movimientos de rotación, precesión y nutación de la Tierra