Tarea 2

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: Fernando Lobos

Indicación: Esta tarea debe ser entregada en formato PDF por UCursos (recuerde poner su nombre en su desarrollo) a más tardar el miércoles 23 de agosto a las 23:59

Pregunta 1

Considere un sistema el cual tiene un solo grado de libertad. El Lagrangiano que caracteriza este sistema depende explícitamente del grado de libertad y sus primeras n derivadas temporales, es decir:

$$L = L(q, q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(n)}; t, \{\lambda\}), \quad \text{donde} \quad q^{(i)} \equiv \frac{\mathrm{d}^i q}{\mathrm{d}t^i} \tag{1}$$

y $\{\lambda\}$ un conjunto de parámetros (constantes conocidas). Obtenga la ecuación de movimiento **minimizando la acción**.

Pregunta 2

Considere el Lagrangiano asociado a una partícula moviéndose en un campo electromagnético (o sea en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ y un campo magnético $\mathbf{B}$)

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - q(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}), \tag{2}$$

donde m es la masa de la partícula, $\mathbf{v}$ su velocidad, q su carga eléctrica, $\phi(t, \mathbf{x})$ el potencial escalar y $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ el potencial vector.

a) Muestre que las ecuaciones de Euler-Lagrange son consistentes con la fuerza de Lorentz

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{3}$$

donde

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

b) Considere una transformación de gauge para el potencial escalar y el potencial vector de la forma

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \psi(t, \mathbf{x})}{\partial t}, \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi(t, \mathbf{x}). \tag{4}$$

Estudie qué ocurre con el Lagrangiano L' que consiste en el Lagrangiano (2) pero utilizando las transformaciones de gauge (4). ¿Cómo serían las ecuaciones de movimiento?

Pregunta 3

Considere la siguiente órbita de un cuerpo celeste:

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\theta) \,.$$

Utilizando la ecuación de Binet responda:

a) Obtenga la expresión de la fuerza central a la que está expuesto el cuerpo celeste

b) Encuentre el Lagrangiano del sistema y derive las ecuaciones de movimiento

c) Encuentre **todas** las cantidades conservadas asociadas

Tarea 2

P1

Tenemos un Lagrangiano de la forma $L = L(q, q^{(i)}; t, \{\lambda\})$, entonces la acción del sist. viene dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, q^{(1)}, \dots, q^{(n)}; t, \{\lambda\})$$

para encontrar la ec. de mov. asociada debemos variar esta acción

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial q^{(1)}}\delta(q^{(1)}) + \dots + \frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\delta(q^{(n)}) \right) \quad (1)$$

nuestro objetivo es conseguir factorizar todo el parentesis por δq y lo que quede siendo factorizamos debe ser 0 para que la acción sea un extremo.

Notamos que el primer término ya tiene δq, entonces fijémonos en el término m-ésimo para encontrar un patrón, para este término tenemos la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial q^{(m)}}\delta(q^{(m)}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial q^{(m)}}(\delta q)^{(m)}$$

queremos bajarle el orden a $(\delta q)^{(m)}$, así que hacemos I.P.P donde

$$u = \frac{\partial L}{\partial q^{(m)}} \rightarrow du = \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}}\right)^{(1)} dt \;\wedge\; dv = (\delta q)^{(m)} dt \longrightarrow v = (\delta q)^{(m-1)}$$

$$\Rightarrow \int dt \frac{\partial L}{\partial q^{(m)}}(\delta q)^{(m)} = \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}}(\delta q)^{(m-1)} \right]\Bigg|_{t_1}^{t_2}}^{\,0} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}}\right)^{(1)} (\delta q)^{(m-1)} = (-1)^1 \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}}\right)^{(1)} (\delta q)^{(m-1)}$$

donde consideramos que $(\delta q)^{(m-1)}(t_1) = (\delta q)^{(m-1)}(t_2) = 0$. Este procedimiento debemos hacerlo en total m veces (contando la que ya hicimos) entonces la integral que nos quedaría luego de haber hecho m integrales por partes es

$$(-1)^m \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}}\right)^{(m)} (\delta q)^{(0)}$$

entonces la variación de la acción quedaría como

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + (-1)^1 \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(1)}}\right)^{(1)} \delta q + \dots + (-1)^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}}\right)^{(m)} \delta q \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}}\right)^{(m)} \right) \delta q$$

como δq es arbitrario, la condición $\delta S \overset{!}{=} 0$ implica que

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}} \right)^{(m)} \overset{!}{=} 0$$

que sería la EoM del sist. Notemos que para $L = L(q, \dot{q}; t)$ tenemos

$$\sum_{m=0}^{1} (-1)^m \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(m)}} \right)^{(m)} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

que es la ec de E-L.

P2

a) El Lagrangeano que nos otorgan, en coord. cartesianas es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - q\phi(t,x,y,z) + qA_x(t,x,y,z)\cdot\dot{x} + qA_y(t,x,y,z)\cdot\dot{y} + qA_z(t,x,y,z)\cdot\dot{z}$$

calculemos las derivadas para las ecs. de E-L

- $\frac{\partial L}{\partial x} = -q\partial_x\phi + q\dot{x}\,\partial_x A_x + q\dot{y}\,\partial_x A_y + q\dot{z}\,\partial_x A_z$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + q\frac{d}{dt}A_x = m\ddot{x} + q\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \partial_x A_x\,\dot{x} + \partial_y A_x\,\dot{y} + \partial_z A_x\,\dot{z}\right)$
- $\frac{\partial L}{\partial y} = -q\partial_y\phi + q\dot{x}\,\partial_y A_x + q\dot{y}\,\partial_y A_y + q\dot{z}\,\partial_y A_z$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qA_y \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} + q\frac{d}{dt}A_y = m\ddot{y} + q\left(\frac{\partial A_y}{\partial t} + \partial_x A_y\,\dot{x} + \partial_y A_y\,\dot{y} + \partial_z A_y\,\dot{z}\right)$
- $\frac{\partial L}{\partial z} = -q\partial_z\phi + q\dot{x}\,\partial_z A_x + q\dot{y}\,\partial_z A_y + q\dot{z}\,\partial_z A_z$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + qA_z \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = m\ddot{z} + q\frac{d}{dt}A_z = m\ddot{z} + q\left(\frac{\partial A_z}{\partial t} + \partial_x A_z\,\dot{x} + \partial_y A_z\,\dot{y} + \partial_z A_z\,\dot{z}\right)$

así que las EOMs serían, por ejemplo para x:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -q\partial_x\phi - q\partial_t A_x - q\dot{y}\,\partial_y A_x - q\dot{z}\,\partial_z A_x + q\dot{y}\,\partial_x A_y + q\dot{z}\,\partial_x A_z \\
&= -q\partial_x\phi - q\partial_t A_x + q\dot{y}(-\partial_y A_x + \partial_x A_y) + q\dot{z}(-\partial_z A_x + \partial_x A_z) \\
&= q(-\partial_x\phi - \partial_t A_x) + q\dot{y}(\nabla\times\vec{A})_z - q\dot{z}(\nabla\times\vec{A})_y \\
&= q(-\partial_x\phi - \partial_t A_x) + q(\vec{v}\times\nabla\times\vec{A})_x \\
&= q\left((-\partial_x\phi - \partial_t A_x) + (\vec{v}\times\nabla\times\vec{A})_x\right)
\end{aligned}$$

haciendo lo mismo para las otras dos coord. tenemos 3 ecuaciones en total

$$m\ddot{x} = q\left((-\partial_x\phi - \partial_t A_x) + (\vec{v}\times\nabla\times\vec{A})_x\right) = q\left(E_x + (\vec{v}\times\vec{B})_x\right)$$

$$m\ddot{y} = q\left((-\partial_y\phi - \partial_t A_y) + (\vec{v}\times\nabla\times\vec{A})_y\right) = q\left(E_y + (\vec{v}\times\vec{B})_y\right)$$

$$m\ddot{z} = q\left((-\partial_y\phi - \partial_t A_y) + (\vec{v}\times\nabla\times\vec{A})_z\right) = q\left(E_z + (\vec{v}\times\vec{B}_z)_z\right)$$

que en forma matricial/vectorial se puede escribir en una sola línea como

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

b) Utilizando $\phi' = \phi - \frac{\partial\Psi}{\partial t}$ ^ $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Psi$ en el Lagrangiano obtenemos

$$L' = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - q\left(\phi - \frac{\partial\Psi}{\partial t} - [\vec{A} + \nabla\Psi]\cdot\vec{v}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - q(\phi + \vec{A}\cdot\vec{v}) + q\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \nabla\Psi\cdot\vec{v}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - q(\phi + \vec{A}\cdot\vec{v}) + q\frac{d}{dt}\Psi(t,\vec{x})$$

$$= L + q\frac{d}{dt}\Psi(t,\vec{x})$$

donde nosotros sabemos que derivadas temporales <u>totales</u> no afectan las ecs de movimiento, ya que si tenemos un Lagrangiano L y la derivada total de una función $f = f(t,\vec{x})$ la acción del sist. es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(L + \frac{d}{dt}f\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t,q,\dot{q}) + \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d}{dt}f(t,q,\dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t,q,\dot{q}) + f(t,q,\dot{q})\Big|_{t_1}^{t_2}$$

donde el último término es igual a $f(t_2,q(t_2),\dot{q}(t_2)) - f(t_1,q(t_1),\dot{q}(t_1)) = cte$. así que cuando variamos la acción

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta L + \cancelto{=0}{\delta(cte.)} = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\delta L$$

con lo que haciendo el procedimiento habitual conseguiríamos las mismas EoMs que hubiésemos obtenido sin considerar df/dt.

* Ojo que esto es válido para una derivada total temporal, con derivadas parciales obtenemos términos de borde (que en Mecánica Clásica normalmente los tomamos com 0, pero en teorías más complejas no es así)

P3

Tenemos una trayectoria 2D dada por

$$r^2 = 2a^2\cos(2\theta) \quad (1)$$

ocupemos la ec. de Binet (antes de hacer el cambio $u=1/r$) $\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\ell}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{\ell^2}{mr^3} = f(r)$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\ell}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{\ell^2}{mr^3} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\ell}{mr^2}a\sqrt{2}\sin(2\theta)(\cos(2\theta))^{-1/2}\right) - \frac{\ell^2}{mr^3}$$

$$= -\frac{\ell}{a\sqrt{2}mr^2}\frac{d}{d\theta}\left(\sin(2\theta)(\cos(2\theta))^{-3/2}\right) - \frac{\ell^2}{mr^3}$$

$$= -\frac{\ell}{a\sqrt{2}mr^2}\left(\frac{2}{\sqrt{\cos(2\theta)}} + \frac{3(\sin(2\theta))^2}{(\cos(2\theta))^{5/2}}\right) - \frac{\ell^2}{mr^3}$$

$$= -\frac{\ell}{a\sqrt{2}mr^2}\left(\frac{2}{r/a\sqrt{2}} + \frac{3(1-r^2/2a^2)}{r^5/(2a^2)^{5/2}}\right) - \frac{\ell^2}{mr^3}$$

$$= -\frac{\ell}{mr^2}\left(\frac{2}{r} + \frac{3(4a^4-2a^2r^2)}{r^5}\right) - \frac{\ell^2}{mr^3}$$

$$= -\frac{\ell}{m}(2+\ell)\frac{1}{r^3} + \frac{6\ell a^2}{m}\frac{1}{r^5} - \frac{12\ell a^4}{m}\frac{1}{r^7}$$

$$= f(r)$$

b) El potencial asociado a esta fuerza es

$$V(r) = -\int^r dr\, f(r) = \frac{\ell}{m}(2+\ell)\int^r \frac{dr}{r^3} - \frac{6\ell a^2}{m}\int^r\frac{dr}{r^5} + \frac{12\ell a^2}{m}\int^r\frac{dr}{r^7}$$

$$= -\frac{\ell}{2m}(2+\ell)\frac{1}{r^2} + \frac{3\ell a^2}{2m}\frac{1}{r^4} - \frac{2\ell a^2}{m}\frac{1}{r^6} + V_0$$

Entonces el Lagrangiano sería

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\ell}{2m}(2+\ell)\frac{1}{r^2} - \frac{3\ell a^2}{2m}\frac{1}{r^4} + \frac{2\ell a^2}{m}\frac{1}{r^6} - V_0$$

y las ecs. de E-L serían

▷ $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\ell}{m}(2+\ell)\frac{1}{r^3} + \frac{6\ell a^2}{m}\frac{1}{r^5} - \frac{12\ell a^2}{m}\frac{1}{r^6}$

▷ $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\ell}{m}(2+\ell)\frac{1}{r^3} - \frac{6\ell a^2}{m}\frac{1}{r^5} + \frac{12\ell a^2}{m}\frac{1}{r^6} = 0$

▷ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p_\theta = mr^2\dot{\theta} \equiv \ell$ constante $\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\ell^2}{m^2 r^4}$

$$\therefore m\ddot{r} + \frac{2\ell}{m}\frac{1}{r^3} - \frac{6\ell a^2}{m}\frac{1}{r^5} + \frac{12\ell a^2}{m}\frac{1}{r^6} = 0$$

c) i) Del Lagrangiano identificamos que como L no depende explícitamente del tiempo

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}}_{=0} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$, las ecs E-L dicen $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ entonces

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0$$

donde identificamos que $E = \sum_i (\partial L/\partial \dot{q}_i)\dot{q}_i - L$ $\therefore$ $dE/dt = 0 \Leftrightarrow E = E_0$ constante.

ii) Otra cantidad conservada es el momentum angular

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\dot{\theta} = \text{cte.}$$

iii) Finalmente, el momentum lineal en $\hat{k}$ también se conserva

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = \text{cte.}$$ ($\dot{z}$ no necesariamente es 0)