Auxiliar 2

Fuerzas centrales

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: P. Joaquín

P1.- Scattering en pozo de potencial

Una fuerza central usada en física nuclear está descrita por un potencial que tiene la forma de un **pozo de potencial**, definido como:

$$U = \begin{cases} 0, & \text{si } r > a \\ -U_0, & \text{si } r \leq a. \end{cases}$$

Muestre que el scattering producido por este potencial en mecánica clásica es idéntico a la refracción de la luz producida por una esfera de radio a e índice de refracción relativo

$$n = \sqrt{\frac{E + U_0}{E}}\,.$$

Muestre también que la sección eficaz diferencial es

$$\sigma(\Theta) = \frac{n^2 a^2}{4\cos(\Theta/2)} \frac{(n\cos(\Theta/2) - 1)\,(n - \cos(\Theta/2))}{(1 + n^2 - 2n\cos(\Theta/2))^2}\,.$$

P2.- Scattering para ángulos pequeños - Propuesto

Considere un proceso de scattering donde el parámetro de impacto s es muy grande, por lo que la partícula scattereada (de masa m_1 y velocidad inicial v_∞) sufre solo un leve desvío de su trayectoria original.

Demuestre que para este caso el (pequeño) ángulo de scattering es

$$\theta_1 = -\frac{2s}{m_1 v_\infty^2} \int_s^\infty \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\,,$$

resuelva esta integral para el caso $U = \alpha/r^n$ $(n > 0)$ y demuestre que la sección eficaz diferencial es

$$\sigma(\theta_1) = \frac{1}{n}\left[\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2 + 1/2)}{\Gamma(n/2)} \frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2}\right]^{2/n} {\theta_1}^{-2-2/n}$$

P3.- Precesión de Mercurio

Considere que el movimiento de una partícula de masa m bajo efecto de un potencial

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}$$

es el mismo movimiento como si solo estuviese el potencial de Kepler, pero en un sistema de referencia que está rotando o precesando alrededor del centro de fuerza (en torno a $r = 0$).

Para una energía total negativa, muestre que si el potencial adicional es muy pequeño en comparación al potencial de Kepler, la velocidad angular de precesión de una órbita elíptica es

$$\Omega = \frac{2\pi m h}{l^2 \tau}\,.$$

Se ha observado que el perihelio de Mercurio precesa a una tasa de 43 arcosegundo por siglo. Muestre que esta precesión puede ser considerada como un efecto clásico (no relativista) si la cantidad adimensional

$$\eta = \frac{h}{ka}$$

es del orden de 7×10^{-8} (la excentricidad de la órbita de Mercurio es $e = 0.206$ y su periodo es 0.24 años)

Scattering

La sección eficaz diferencial se calcula como

$$\sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin(\Theta)}\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\Theta}\right|,$$

donde s es el parámetro de impacto y Θ el ángulo en el que la partícula sale deflectada y que puede ser expresada como

$$\Theta = |\pi - 2\Psi|\,,$$

donde Ψ se calcula como

$$\Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}\,,$$

con r_m la distancia más cercana de la partícula al centro de fuerza (se calcula con la energía y tomando $\dot{r} = 0$).

Fuerzas centrales

Cuando tenemos únicamente una fuerza central $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ (o una suma de fuerzas centrales), para obtener la trayectoria de la partícula, $u = u(\theta)$, es útil la ecuación de Binet

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}V\left[\frac{1}{u}\right]\,,$$

donde V es el potencial asociado a la fuerza central, definido como $\vec{F}(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\hat{r}$.