# Tarea 1

# P1

a) Debido a isotropía (el Lagrangiano no depende de $\phi$) se tiene que

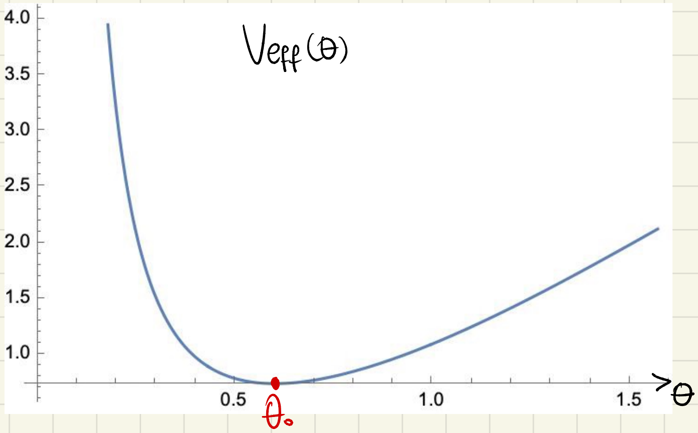
$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = m\ell^2 \sin^2\theta\,\dot\phi \quad \text{constante}$$

Del lagrangiano identificamos la energía cinética y potencial, por lo que la energía mecánica (que se conserva, ya que L no depende explícitamente del tiempo) es

$$E = \frac{1}{2} m\ell^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2) + mgl(1-\cos\theta)\text{, reemplazando con } p_\phi$$

$$= \frac{1}{2} m\ell^2\dot\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{2m\ell^2\sin^2\theta} + mgl(1-\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2} m\ell^2\dot\theta^2 + V_{eff}(\theta)$$




b) Ahora calculemos la EoM asociada a $\theta$

- $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = m\ell^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2 - mgl\sin\theta$

- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m\ell^2\dot\theta \Rightarrow m\ell^2\ddot\theta - m\ell^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2 + mgl\cos\theta$

reemplazando $\dot\phi$

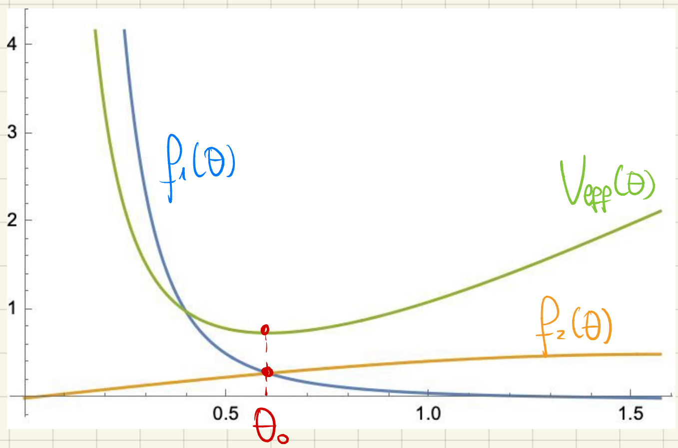
$$\boxed{\ddot\theta - \frac{p_\phi^2}{m^2\ell^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0} \quad (1)$$

Reemplacemos con $\theta = \theta_0$ constante ($\ddot\theta_0 = 0$)

$$\Rightarrow \frac{p_\phi^2}{m^2\ell^4}\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} = \frac{g}{\ell}\sin\theta_0 \quad (2)$$

donde no es obvio que $\exists\,\theta_0$ t.q. se cumpla (2), definamos

$$f_1(\theta_0) \equiv \frac{p_\phi^2}{m^2\ell^4}\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} \quad \wedge \quad f_2(\theta_0) \equiv \frac{g}{\ell}\sin\theta_0$$




graficando notamos que si $\exists$ tal $\theta_0$ y que además es el mínimo global de $V_{eff}(\theta)$

Ahora perturbaremos el sistema en torno a su equilibrio estable haciendo

$$\theta(t) = \theta_0 + \epsilon(t) \,, \quad \text{donde } |\epsilon(t)| \ll \theta_0 \ \forall t$$

reemplazamos en (1)

$$\ddot{\epsilon} - \frac{p_\phi^2}{m^2 \ell^4} \frac{\cos(\theta_0+\epsilon)}{\sin^3(\theta_0+\epsilon)} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta_0+\epsilon) = 0 \quad (3)$$

donde por (2) tenemos que $p_\phi^2/m^2\ell^4 = g\sin^4\theta_0/\ell\cos\theta_0$, expandimos en Taylor (3)

- $$\frac{\cos(\theta_0+\epsilon)}{\sin^3(\theta_0+\epsilon)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{\cos(\theta_0+\epsilon)}{\sin^3(\theta_0+\epsilon)}\right]^{(n)}_{\epsilon=0} \epsilon^n \approx \frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} + \left(\frac{2\sin^2\theta_0 - 3}{\sin^4\theta_0}\right)\epsilon$$

- $$\sin(\theta_0+\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin^{(n)}(\theta_0+\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} \epsilon^n \approx \sin\theta_0 + \cos\theta_0 \cdot \epsilon$$

$$\Rightarrow \ddot{\epsilon} - \frac{g}{\ell}\frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}\left[\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} + \left(\frac{2\sin^2\theta_0 - 3}{\sin^4\theta_0}\right)\epsilon\right] + \frac{g}{\ell}\left(\sin\theta_0 + \cos\theta_0 \epsilon\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\epsilon} \cancel{- \frac{g}{\ell}\sin\theta_0} + \frac{g}{\ell}\frac{(3 - 2\sin^2\theta_0)}{\cos\theta_0} \cancel{+ \frac{g}{\ell}\sin\theta_0} + \frac{g}{\ell}\cos\theta_0 \epsilon = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\epsilon} + \frac{g}{\ell}\frac{(4 - 3\sin^2\theta_0)}{\cos\theta_0}\epsilon = 0$$

donde identificamos la forma del M.A.S. con frecuencia angular de oscilación

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}\frac{(4 - 3\sin^2\theta_0)}{\cos\theta_0}}$$

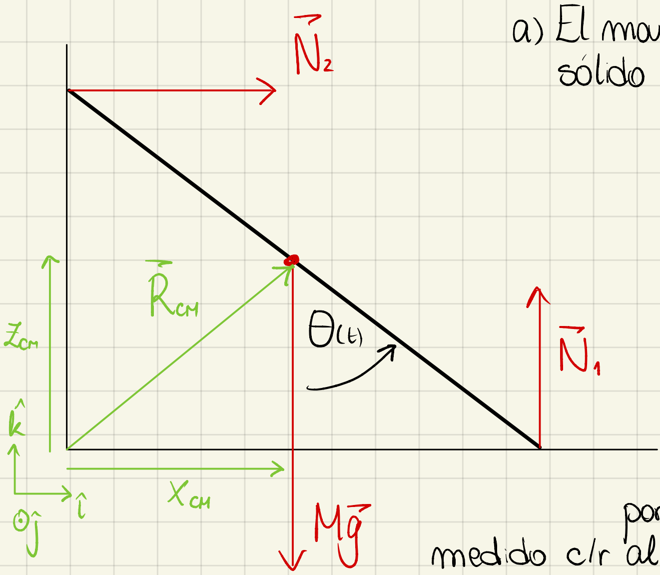
Para ver si las órbitas son cerradas debemos encontrar una razón entre la velocidad angular $\dot{\phi}$ y la frecuencia de oscilación $\omega_0$ (para que haya sincronización entre los movimientos)

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m\ell^2\sin^2\theta} = \sqrt{\frac{g}{\ell}\frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}}\frac{1}{\sin^2\theta} \approx \sqrt{\frac{g}{\ell}\frac{1}{\cos\theta_0}}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{\ell}\frac{1}{\cos\theta_0}}\sqrt{\frac{\ell}{g}\frac{\cos\theta_0}{(4 - 3\sin^2\theta_0)}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 3\sin^2\theta_0}} \ \dot{\in} \ \mathbb{Q}$$

donde notamos que $\dot{\phi}/\omega_0$ pertenece a los racionales por ejemplo para $\theta_0 = 0 \Rightarrow 1/2$, $\theta_0 = \pi/2 \Rightarrow 1$.

# P2




a) El movimiento se da únicamente en el plano x-z y como es un sólido rígido su energía cinética tiene dos contribuciones

$$K = K_{CM} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{CM} \vec{\Omega}$$

como la escalera rota solo en $\hat{\jmath}$ y en la dirección negativa

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo que solo nos importa la componente $I_{yy}$ del tensor de inercia medido c/r al CM. Por Wikipedia sabemos que

$$I_{zz} = \frac{1}{12} ML^2$$

La contribución $K_{CM}$ es simplemente

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M|\dot{\vec{R}}_{CM}|^2 \quad , \text{ donde } \vec{R}_{CM} = x\hat{\imath} + z\hat{\jmath} \Rightarrow |\dot{\vec{R}}_{CM}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$$

así que la energía cinética sería

$$K = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{24}ML^2\dot{\theta}^2$$

La única contribución a la energía potencial es la gravitatoria (c/r al CM)

$$U = Mgz$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{24}ML^2\dot{\theta}^2 - Mgz$$

La restricción es que $\theta$ está relacionado con x y z como

$$\cos\theta = \frac{z}{L/2} \quad \wedge \quad \sin\theta = \frac{L\sin\theta - x}{L/2} \iff \sin\theta = \frac{2x}{L}$$

entonces definimos las funciones

$$f_1 = L\cos\theta - 2z \quad \wedge \quad f_2 = L\sin\theta - 2x$$

Las ecs. de mov. están dadas por $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_i}$

derivemos:

▷ $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ ▷ $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}$ ▷ $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -2$ $\Rightarrow M\ddot{x} = -2\lambda_2$ (1)

▷ $\frac{\partial L}{\partial z} = -Mg$ ▷ $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = M\dot{z}$ ▷ $\frac{\partial f_1}{\partial z} = -2$ $\Rightarrow M\ddot{z} + Mg = -2\lambda_1$ (2)

▷ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ▷ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{12}ML^2\dot{\theta}$ ▷ $\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -L\sin\theta$ ▷ $\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = L\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}ML^2\ddot{\theta} = -\lambda_1 L\sin\theta + \lambda_2 L\cos\theta \quad (3)$$

Ahora reemplazamos en todas las "EoMs" las condiciones $L\cos\theta = 2z$ ^ $L\sin\theta = 2x$

$$x = \frac{L}{2}\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = \frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}\cos\theta\ddot{\theta}$$

$$z = \frac{L}{2}\cos\theta \Rightarrow \dot{z} = -\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}\sin\theta\ddot{\theta}$$

$$(1) \Rightarrow -\frac{L}{2}M\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{L}{2}M\cos\theta\ddot{\theta} = -2\lambda_2 \Rightarrow \boxed{N_2 = \lambda_2 = \frac{LM}{4}\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{LM}{4}\cos\theta\ddot{\theta}} \quad (4)$$

$$(2) \Rightarrow -\frac{L}{2}M\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{L}{2}M\sin\theta\ddot{\theta} + Mg = -2\lambda_1 \Rightarrow \boxed{N_1 = \lambda_1 = \frac{LM}{4}\cos\theta\dot{\theta}^2 + \frac{LM}{4}\sin\theta\ddot{\theta} - \frac{Mg}{2}} \quad (5)$$

reemplazando en (3)

$$\frac{ML^2}{12}\ddot{\theta} = \cancel{-\frac{ML^2}{4}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2} - \frac{ML^2}{4}\sin^2\theta\ddot{\theta} + \frac{MLg}{2}\sin\theta + \cancel{\frac{ML^2}{4}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2} - \frac{ML^2}{4}\cos^2\theta\ddot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ML^2}{12}\ddot{\theta} = -\frac{ML^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{MLg}{2}\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta = 0} \quad \Big\} \text{ Ecuación de movimiento}$$

podemos integrar una vez esta EDO con trucazo de mecánica

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta \quad / \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{3g}{2L}\int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta\, d\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{3g}{2L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

y podemos reemplazar estas expresiones de $\ddot{\theta}$ y $\dot{\theta}$ en (4) y (5) y conseguimos las expresiones de las normales $\forall\theta$

$$N_1(\theta) = \frac{LM}{4}\cos\theta\left(-\frac{3g}{L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)\right) + \frac{LM}{4}\sin\theta\left(\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta\right) - \frac{Mg}{2} \quad (6)$$

$$N_2(\theta) = \frac{LM}{4}\sin\theta\left(-\frac{3g}{L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)\right) - \frac{LM}{4}\cos\theta\left(\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta\right) \quad (7)$$

c) Usando la EDO de $\dot{\theta}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{-\frac{3g}{L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt = t(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\left(-3g\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)/L\right)^{1/2}}$$

d) Necesitamos encontrar dónde (7) es 0

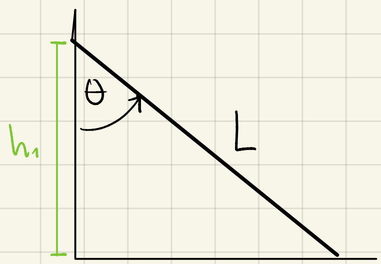
$$N_2(\theta^*) = -\frac{3Mg}{4}\cos\theta^*\sin\theta^* + \frac{3Mg}{4}\cos\theta_0\sin\theta^* - \frac{3Mg}{8}\cos\theta^*\sin\theta^*$$

$$= -\frac{9Mg}{8}\cos\theta^*\sin\theta^* + \frac{3Mg}{4}\cos\theta_0\sin\theta^* \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta^*\left(-\frac{3}{2}\cos\theta^* + \cos\theta_0\right) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \cos\theta^* = \frac{2}{3}\cos\theta_0$$

y como tenemos la relación $\cos\theta = h_1/L$

$$\Rightarrow h_1(\theta^*) = L\cos\theta^* = \frac{2L}{3}\cos\theta_0$$




e) Cuando la escalera pierde el contacto con el muro ya no tenemos la restricción $f_2$

$$\Rightarrow M\ddot{x} = 0 \quad \wedge \quad M\ddot{z} + Mg = -2\lambda_1 \quad \wedge \quad \frac{1}{12}ML^2\ddot{\theta} = -\lambda_1 L\sin\theta$$

por lo que obtenemos lo mismo de antes pero considerando $\lambda_2 = 0$

$$\frac{ML^2}{12}\ddot{\theta} = -\frac{ML^2}{4}\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - \frac{ML^2}{4}\sin^2\theta\,\ddot{\theta} + \frac{MLg}{2}\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}\left(\frac{1}{6}+\frac{\sin^2\theta}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}\sin\theta \quad (*)$$

ojo que la EoM cambia cuando se despega de la pared vertical

y la normal que ejerce el piso sigue siendo la misma

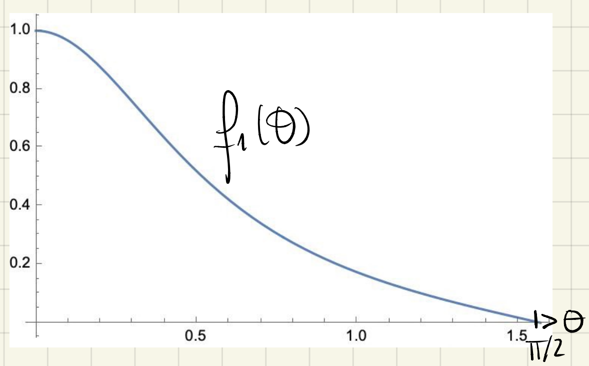
$$N_1 = \lambda_1 = \frac{LM}{4}\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{LM}{4}\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{Mg}{2}$$

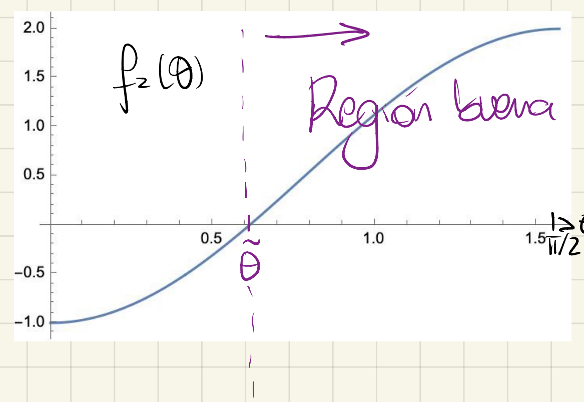
$$(*) \Rightarrow \; = \frac{LM}{4}\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{LM}{4}\sin\theta\left[\frac{6}{1+3\sin^2\theta}\left[-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}\sin\theta\right]\right] - \frac{Mg}{2}$$

$$= \frac{LM}{4}\left[\cos\theta - \frac{3}{1+3\sin^2\theta}\cos\theta\sin^2\theta\right]\dot{\theta}^2 + \frac{Mg}{2}\left(3\sin^2\theta - 1\right)$$

donde $\dot{\theta}^2 > 0 \;\forall t$ así que analizamos los otros componentes, definamos

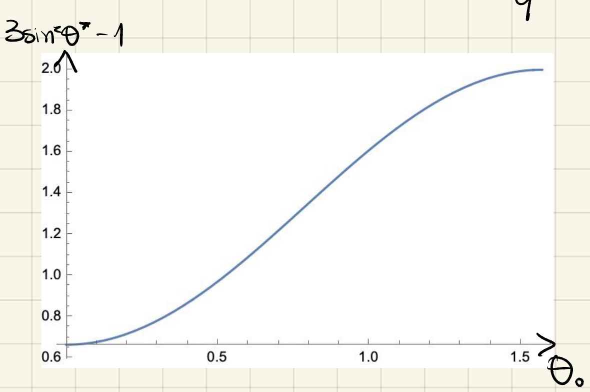
$$f_1(\theta) \equiv \cos\theta - \frac{3}{1+3\sin^2\theta}\cos\theta\sin^2\theta \qquad f_2(\theta) = 3\sin^2\theta - 1$$




donde vemos que $\forall\theta\in[0,\pi/2]$ $f_1(\theta)>0$ mientras que $f_2(\theta)>0$ a partir de un $\tilde{\theta}$, notemos que usando la condición de despegue $\cos\theta^* = 2/3\cdot\cos\theta_0$

$$\cos^2\theta^* = \frac{4}{9}\cos^2\theta_0 \Leftrightarrow 3\sin^2\theta^* - 1 = -\frac{4}{3}\cos^2\theta_0 + 2$$




donde gráficamente vemos que $\forall\theta_0\in[0,\pi/2]$ (el ángulo inicial de la escalera) $3\sin^2\theta^* - 1 > 0$

de la pared vertical

$\therefore$ Como $\theta\in[\theta^*,\pi/2]$, desde el momento de despegue ya nos encontramos en la zona buena, así que todos los términos son positivos $\Rightarrow N>0 \;\forall\theta\in[\theta^*,\pi/2]$ así que la escalera nunca se separa del suelo!