Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI3111 – Mecánica Clásica

Auxiliar 1

Fuerzas de restricción

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Javier Huenupi
Ayudante: Fernando Lobos

P1.-

Considere una partícula de masa m que se mueve por un paraboloide de revolución (sin despegarse) en presencia de gravedad. Para describir el movimiento utilice coordenadas parabólicas, donde la relación con las coordenadas cartesianas es:

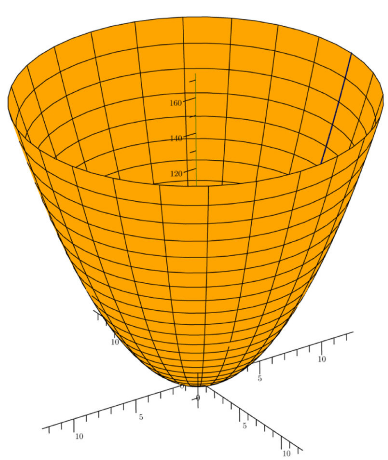
$$x = uv\cos\phi$$
$$y = uv\sin\phi$$
$$z = (u^2 - v^2)/2$$

donde de forma general $u \in [0, \infty)$, $v \in [0, \infty)$ y $\phi \in [0, 2\pi)$ (este último es el mismo ángulo de coordenadas cilíndricas), pero utilizaremos $v = v_0$ constante para considerar un paraboloide como el de la imagen.

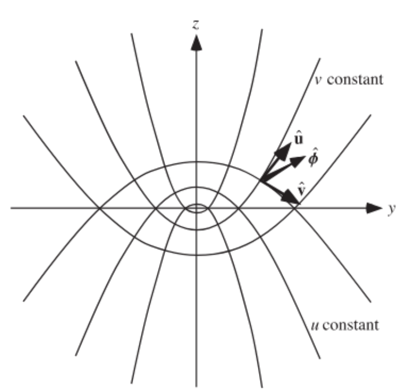
a) Encuentre el Lagrangeano y las ecuaciones de movimiento

b) Encuentre la(s) fuerza(s) de ligazón

c) Encuentre la condición para tener órbitas circulares y encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a una órbita circular



(a) Paraboloide de revolución

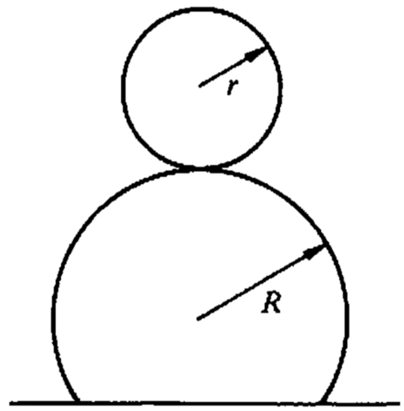


(b) Coordenadas parabólicas

P2.-

Un **aro** de masa m y radio r rueda sin resbalar en un **cilindro fijo** de radio R, como se muestra en la figura. La única fuerza externa es la gravedad. Considere que el aro empieza a rodar, con una velocidad inicial despreciable, desde el punto más alto del cilindro grande.

a) Ocupe el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar la ecuación de movimiento del sistema y la expresión de las fuerzas de restricción. Con esto encuentre el punto donde el aro se despega del cilindro



Multiplicadores de Lagrange

Si además de obtener las ecuaciones de movimiento de un problema, queremos calcular las **fuerzas de restricción**, utilizamos el método de multiplicadores de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_a \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i}\,,$$

donde L es el Lagrangeano del sistema (sin haber hecho explícitas las restricciones geométricas), f_a son las **restricciones geométricas** del problema y q_i las coordenadas generalizadas.

Luego de hacer las derivadas y reemplazar con las restricciones f_a, las fuerzas de restricción serían iguales a los multiplicadores, $F_a = \lambda_a$.

Sólido rígido

La energía cinética de un sólido rígido puede ser expresada como:

$$K = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{R}}_{\mathrm{CM}}|^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{\mathrm{CM}}\vec{\Omega}\,,$$

donde M es la masa total del sólido, $\vec{R}_{\mathrm{CM}}$ es el vector posición del Centro de Masa (CM), $\vec{\Omega}$ el vector velocidad angular del sólido y I_{CM} el tensor de inercia medido con respecto al CM.

En este link pueden ver un listado de **algunas componentes** (I_{CM} es una matriz de 3×3) de los sólidos rígidos más comunes.