Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI3102-1 Física Moderna

Auxiliar 12

Mecánica cuántica: matrices de Pauli

Profesor: Álvaro Núñez
Auxiliar: Daniel Lobos
Ayudante: Felipe Cárdenas

17 de noviembre de 2023

Matrices de Pauli

Las matrices de Pauli son

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

las cuales satisfacen las siguientes propiedades:

a) $\sigma^2 = \mathbf{1}$

b) $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = \mathbf{0}$, para $i \neq j$

c) $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \mathbf{2}\delta_{ij}$ (resume las dos anteriores)

d) $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

e) $\sigma_i \sigma_k = \mathbf{1}\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ (resume las cuatro anteriores)

f) $\operatorname{tr}\sigma = 0$ y $\det\sigma = -1$

g) $(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{1} + i(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\boldsymbol{\sigma}$

h) $[\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}] = 2i(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\boldsymbol{\sigma}$

i) $\operatorname{tr}[(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma})] = 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

j) $\sigma = \sigma^\dagger$

donde se usó que $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

Problema único: matrices de Pauli

a) Demuestre que cualquier matriz A de 2×2 puede ser escrita como una combinación lineal de las matrices de Pauli y la identidad, es decir, demuestre que

$$A = a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z + d\mathbf{1} \tag{2}$$

b) Escriba expresiones para los coeficientes a, b, c y d en términos de la traza de los productos entre A y cada matriz asociada al respectivo coeficiente.

c) Encuentre una expresión lineal en las matrices de Pauli y la identidad para

$$\frac{1}{3\sigma_y + \mathbf{1}} \tag{3}$$

d) Compruebe que su resultado es compatibles con lo obtenido en b).