Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI3102-1 Física Moderna

Auxiliar 1

Relatividad especial: transformaciones de Lorentz

Profesor: Álvaro Núñez
Auxiliar: Daniel Lobos
Ayudante: Felipe Cárdenas

17 de agosto de 2023

Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz son transformaciones lineales de coordenadas entre dos sistemas inerciales, uno en reposo (sistema S) y uno en movimiento relativo a este con rapidez v (sistema S'). Eligiendo el eje x como el eje de movimiento:

$$\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \Lambda(v) \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$. Se encuentra que

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \tag{2}$$

donde $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

En unidades naturales ($c = 1$):

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma(\Delta t - v\Delta x) \\ \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta t &= \gamma(\Delta t' + v\Delta x') \\ \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \end{aligned} \tag{4}$$

Problema 1: dilatación temporal y transformaciones de Lorentz

a) ¿A qué velocidad se debe mover un observador para observar que su reloj mide la mitad del tiempo respecto a un observador en reposo?

b) La Tierra y el Sol están a 8,3 min − luz de distancia. Si ignoramos su movimiento relativo, podemos asumir que este sistema (Tierra-Sol) tiene su propio sistema de referencia inercial. Dado que se tienen dos eventos: evento A, ocurrido en $t_A = 0$ en la Tierra y B que sucede en $t_B = 2\,\text{min}$ en el Sol:

   I) Encontrar la diferencia de tiempo entre los eventos A y B para un observador que se mueve desde la Tierra hacia el Sol a una velocidad de $u = 0{,}8c$ y para un observador en sentido contrario con la misma velocidad.

   II) ¿A qué velocidad se tiene que mover la nave para que en su reloj mida que el viaje entre la Tierra y el Sol tarda 5 minutos?, ¿y cuánto dura el viaje de la nave en el sistema de la Tierra-Sol?

Problema 2: paradoja del granero y la pértiga

Tenemos un corredor con una pértiga de 20 metros de largo dirigiéndose hacia un granero de 10 metros de largo. El granero posee dos puertas en sus extremos que se abren y se cierran simultáneamente. El operador de las puertas dentro del granero está seguro que si el corredor se mueve lo suficientemente rápido puede encontrar un instante donde la pértiga esté completamente dentro del granero. Estudiemos este problema asumiendo que el corredor se mueve a una velocidad de $v = 0{,}9c$.

a) ¿Qué ocurre de acuerdo al granero?, ¿y de acuerdo a la pértiga?

b) ¿Qué ocurre efectivamente?

Problema 3: efecto Doppler relativista

Considere una fuente de luz de frecuencia f_s que se mueve de forma oblicua a un observador R con rapidez v como se muestra en la figura 1.

a) Pruebe que R recibe la luz con frecuencia f_obs dada por la fórmula Doppler general:

$$f_\mathrm{obs} = \frac{f_\mathrm{s}}{(1-\beta\cos\theta)\gamma} \tag{5}$$

b) ¿Cuál es la fórmula en el caso que la fuente se mueve directamente hacia R? ¿y si se aleja en sentido opuesto?

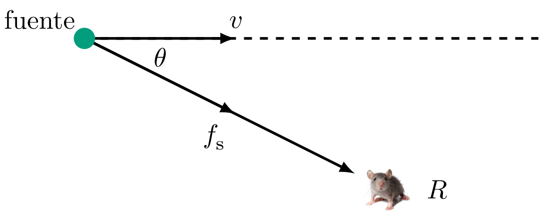

Figura 1: Situación problema 3.

Problema 4: vara con un ángulo

Una vara con longitud propia (medida desde su sistema de referencia) ℓ está en reposo en un sistema S, la barra está en el plano xy con un ángulo dado por: $\theta = \arctan 3/4$ con respecto al eje x. Un sistema de referencia S' se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{x}}$ con respecto a S. En el sistema S' la vara tiene un ángulo de $\pi/4$ con respecto al eje x'.

a) ¿Cuánto vale v?

b) ¿Cuál es el largo ℓ' de la vara medido en S'?