

FI2002-6 Electromagnetismo.

Profesor: Marcel G. Clerc.

Auxiliares: Pedro Aguilera, Roberto Gajardo.



Auxiliar 13: Ley de Ampère y medios magnéticos.

20 de Noviembre del 2023

P1.- Tubo con corriente no uniforme:

Para encontrar densidades de corriente \vec{J} en el espacio a partir del campo magnético \vec{B} que hay en este, usamos la ley de Ampère en su forma diferencial¹:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \quad (1)$$

En este caso se tiene \vec{B} expresado en coordenadas cilíndricas, donde este sólo tiene componente en $\hat{\phi}$, entonces:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_\rho & \rho B_\phi & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{k} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho B_\phi & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial z} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\phi) \hat{z}$$

Como B_ϕ sólo depende de ρ , entonces $\frac{\partial B_\phi}{\partial z} = 0$, con lo cual la componente asociada a $\hat{\rho}$ es cero, y así:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{\rho} \left[B_\phi + \rho \frac{\partial B_\phi}{\partial \rho} \right] \hat{k} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\mu_0 J_0}{2} \left(\rho - \frac{\rho^3}{2a^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\mu_0 J_0}{2} \left(\rho - \frac{\rho^3}{2a^2} \right) \right) \right] \hat{k} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\mu_0 J_0}{2\rho} \left[\rho - \frac{\rho^3}{2a^2} + \rho \left(1 - \frac{3\rho^2}{2a^2} \right) \right] \hat{k} = \frac{\mu_0 J_0}{2\rho} \left(\rho - \frac{\rho^3}{2a^2} + \rho - \frac{3\rho^3}{2a^2} \right) \hat{k} \\ &\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 J_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Reemplazando esto en la ley de Ampère diferencial mostrada en (1) se tiene que:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}(\rho) = J_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \hat{k}}$$

Esta expresión nos dice que mientras más nos alejamos del centro del cilindro, la cantidad de cargas que fluyen a lo largo de este disminuye, hasta hacerse cero en el borde de la tubería (es decir, en $\rho = a$). Ahora, para encontrar la intensidad de corriente I integrar la densidad de corriente que acabamos de encontrar:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

¹Esta ley de Ampère es sólo válida para el caso de electrostática y magnetostática. Si existen campos que varíen en el tiempo, se debe agregar el término $\mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ al lado derecho de la expresión.

En esta expresión $d\vec{S}$ es el diferencial de superficie asociado a un corte transversal de la tubería. En este caso esta superficie es un disco de radio a , y entonces $d\vec{S} = \rho d\phi d\rho \hat{k}$, con $\rho \in [0, a]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$. Entonces:

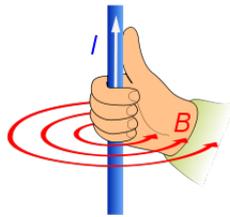
$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} J_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \hat{k} \cdot (\rho d\phi d\rho \hat{k}) = 2\pi J_0 \int_0^a \left(\rho - \frac{\rho^3}{a^2}\right) d\rho$$

$$\Rightarrow I = 2\pi J_0 \left(\int_0^a \rho d\rho - \frac{1}{a^2} \int_0^a \rho^3 d\rho\right) = 2\pi J_0 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{a^2} \frac{a^4}{4}\right) \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} \pi a^2 J_0}$$

Por último, con este resultado podemos calcular el campo magnético en los puntos fuera del espacio usando la ley de Ampère en su forma integral:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}} \tag{2}$$

Esta expresión nos dice que la integral de línea del campo magnético \vec{B} a lo largo de una curva cerrada Γ es igual a la permeabilidad magnética del vacío multiplicada por la corriente I_{enl} que está siendo enlazada por la curva (es decir, la corriente que atraviesa el área encerrada por la curva Γ). Esta expresión es útil para encontrar la corriente asociada a un campo magnético, o en el caso de ciertas simetrías también puede usarse para encontrar el campo magnético a partir de la corriente que enlaza una curva conveniente Γ . En este último caso, para encontrar la curva más conveniente a utilizar en la integral debemos entender de manera cualitativa qué forma tiene el campo magnético en nuestro sistema a partir del sentido de la corriente y la regla de la mano derecha. Esta regla nos dice que en el caso de una corriente a través de un alambre recto, el campo magnético generado forma circunferencias cuyo centro es el alambre, y si alineamos el pulgar de nuestra mano derecha con la dirección y sentido en la cual fluye la corriente, entonces el sentido del campo magnético sobre estas circunferencias estará dado por el sentido de rotación del resto de nuestros dedos, tal como se muestra en la siguiente figura:



En este caso específico, ya que la corriente fluye paralela a \hat{k} en todo el cilindro, la regla de la mano derecha nos dice que el campo magnético forma circunferencias paralelas al plano XY en el espacio, donde la intensidad del campo magnético en dicha circunferencia depende del radio de esta. En otras palabras, para este tipo de configuraciones se tiene que $\vec{B} = B(\rho)\hat{\phi}$, y entonces si queremos aplicar la ley de Ampère para encontrar el campo magnético, el camino Γ conveniente que debemos utilizar es una circunferencia de radio ρ , con lo cual $d\vec{\ell} = \rho d\phi \hat{\phi}$, con $\phi \in [0, 2\pi)$, ya que debe ser una curva cerrada. Reemplazando esto en el lado izquierdo de la expresión (2) se tiene lo siguiente:

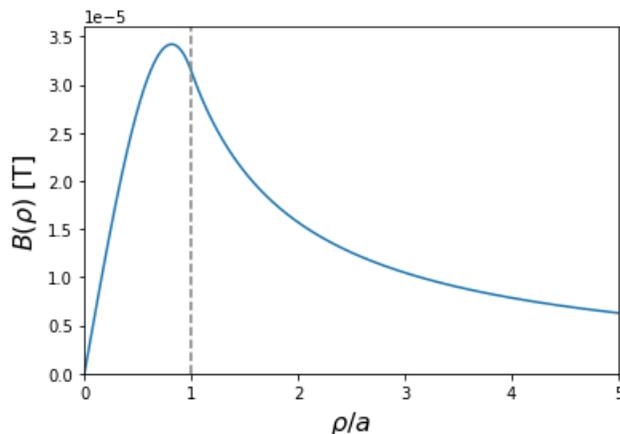
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} (B(\rho)\hat{\phi}) \cdot (\rho d\phi \hat{\phi}) = \int_0^{2\pi} \rho B(\rho) d\phi \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi \rho B(\rho)$$

Ahora, si consideramos una circunferencia Γ cuyo radio ρ sea mayor al radio del cilindro, la corriente I_{enl} enlazada por esta curva corresponde a la corriente que atraviesa una sección transversal del cilindro

infinito, es decir, $I_{\text{enl}} = \frac{1}{2}\pi a^2 J_0$. Entonces, reemplazando esto y el resultado anterior en la ley de Ampère (2) se tiene que:

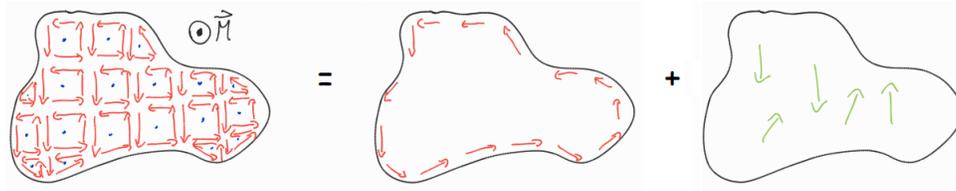
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}} \Rightarrow 2\pi\rho B(\rho) = \frac{1}{2}\mu_0\pi a^2 J_0 \Rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0 a^2 J_0}{4\rho} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 a^2 J_0}{4\rho} \hat{\phi}}$$

Podemos notar que el resultado es el mismo que para un cable infinito con una corriente $I = \frac{1}{2}\pi a^2 J_0$, lo cual es consecuencia de que cualquier alambre infinito con una densidad de corriente paralela a este se verá como un alambre con una corriente uniforme I si nos alejamos lo suficiente. Al graficar la intensidad del campo magnético en todo el espacio usando $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}$, $a = 0,01 \text{ m}$ y $J_0 = 10^{-4} \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ se obtiene lo siguiente:



P2.- Cilindro magnético:

- a) La magnetización corresponde a una propiedad de los materiales que caracteriza cómo estos perciben y producen campos magnéticos. La magnetización aparece ya que cada electrón en el material se comporta como un pequeño imán (dipolo magnético), el cual puede modelarse como un loop de corriente². En condiciones especiales estos loops no se cancelan del todo, generando lo que se conocen como *corrientes de magnetización*. El fenómeno se ilustra en el siguiente dibujo, donde los puntos azules representan las partículas que componen al material magnetizado (en este caso la magnetización sale de la pantalla) y que se modelan como loops de corriente:



Notamos que las componentes de la corriente que están justo en la superficie del material crean una corriente superficial caracterizada por una densidad superficial de corriente \vec{K}_b , mientras que las componentes en el interior pueden o no cancelarse de forma exacta, y cuando no lo hacen aparecen corrientes en el volumen (flechas verdes) caracterizadas por una densidad volumétrica de corriente \vec{J}_b . Estas densidades de corriente pueden calcularse en función de la magnetización a través de las siguientes expresiones, donde \hat{n} es el vector unitario perpendicular a la superficie del material:

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} \quad ; \quad \vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$

Para el caso de nuestro ejercicio se tiene $\vec{M} = M_0 \hat{i}$, y como estamos trabajando con un cilindro, en coordenadas cilíndricas se tendrá que $\hat{n} = \hat{\rho}$ (vector normal a la superficie del cilindro infinito). Escribiendo $\hat{\rho}$ en coordenadas cartesianas, y desarrollando el producto cruz, seremos capaces de encontrar \vec{K}_b :

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M_0 \hat{i} \times (\cos(\phi)\hat{i} + \sin(\phi)\hat{j}) = M_0 \sin(\phi) (\hat{i} \times \hat{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{K}_b = M_0 \sin(\phi)\hat{k}}$$

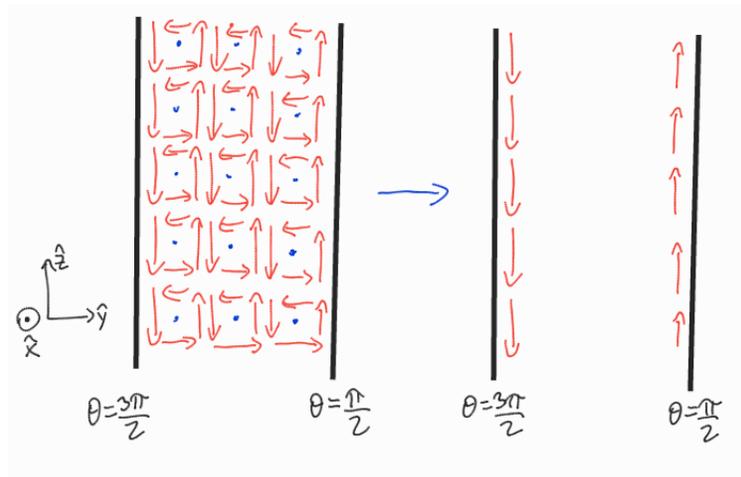
Por otro lado, la densidad volumétrica de corriente está dada por el rotor de la magnetización \vec{M} , sin embargo, como esta es uniforme, entonces al calcular su rotor estamos derivando una constante, de tal forma que:

$$\nabla \times \vec{M} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{J}_b = \vec{0}}$$

Analicemos estos resultados. Primero, como la magnetización está en \hat{i} , entonces al hacer un corte longitudinal en el cilindro (tal que se muestra el plano YZ) los loops que representan a los pequeños dipolos magnéticos que conforman el material se verán como en el dibujo de la página siguiente. Notamos que la corriente resultante en los bordes es paralela a la superficie, es decir, va en la dirección \hat{k} , mientras que el sentido de la corriente concuerda con lo encontrado para \vec{K}_b (las paredes derecha e izquierda están caracterizadas por $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$, respectivamente).

²Como los electrones están orbitando al átomo, hay una corriente asociada, pero en general se cancela con algún otro electrón orbitando en sentido contrario. Sin embargo el electrón también tiene un momento angular intrínseco (spin) que explica el hecho de que cada electrón en sí es también un pequeño imán.

Finalmente, como la magnetización es uniforme, las flechas asociadas a los loops de cada partícula del material son del mismo tamaño, con lo cual las flechas en el volumen se cancelan de forma exacta con sus vecinas, lo que explica que no existan corrientes volumétricas³.



b) Las corrientes que se inducen por magnetización generan campos magnéticos, sin embargo, es importante tomar en cuenta que la forma en que calculamos el campo magnético a partir de estas corrientes no puede ser cualquiera. Separaremos la corriente en dos grupos según su origen:

- i) **Corrientes libres:** Corresponden a aquellas que son inducidas por un transporte real de cargas, por ejemplo, al conectar una batería, y están asociadas a densidades \vec{K}_f y \vec{J}_f .
- ii) **Corrientes ligadas⁴:** Corresponden a aquellas que son inducidas por la magnetización del material, es decir, las corrientes asociadas a \vec{K}_b y \vec{J}_b .

Tomando en cuenta esto, se tienen las siguientes expresiones que relacionan las corrientes libres y los campos:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad ; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f \quad ; \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S}$$

Es importante notar que la ley de Ampère asociada al campo \vec{H} sólo es válida si usamos la densidad de corriente libre, y por lo tanto **jamás debemos usar la ley de Ampère calculando la corriente a partir de densidades de corriente ligada**, sino que debemos aplicar directamente ley de Biot-Savart para calcular el campo generado por estas corrientes ligadas.

En este caso sólo tenemos densidad superficial de corriente \vec{K}_b , por lo tanto debemos aplicar la ley de Biot-Savart para el caso de densidad superficial:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{K}_b \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS$$

Como queremos el campo en cualquier punto del eje de nuestro cilindro, entonces $\vec{r} = z\hat{k}$, donde z es la altura a la cual calculamos el campo. Por otro lado, $\vec{r}' = R\hat{\rho} + z'\hat{k}$, y como estamos en el manto de un cilindro con radio constante, entonces $dS = R d\phi dz'$, con $\phi \in [0, 2\pi)$ y $z' \in (-\infty, \infty)$.

³Este resultado es general; si la magnetización es uniforme, no hay densidad de corriente volumétrica.

⁴Se dicen “ligadas” porque corresponden a corrientes generadas por cargas que realmente no se desplazan de su átomo de origen (permanecen ligadas), pero cuyo efecto colectivo es una corriente.

Entonces, reemplazando en la integral y desarrollando:

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{M_0 \sin(\phi) \hat{k} \times (-R\hat{\rho} + (z - z')\hat{k})}{(R^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} R d\phi dz'$$

Primero, con el producto cruz desaparece el término del numerador que está en \hat{k} , entonces:

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi) (\hat{k} \times \hat{\rho})}{(R^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi dz' = -\frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\phi) \hat{\phi}}{(R^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} d\phi dz'$$

Notamos que el numerador sólo depende de ϕ , mientras que el denominador sólo depende de z' , entonces podemos separar las integrales:

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin(\phi) \hat{\phi} d\phi \right)$$

Para la integral en z' hacemos el cambio de variable $u = z - z'$, con lo cual $dz' = -du$ y los límites se relacionan como:

$$z' \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \quad ; \quad z' \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow -\infty$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{du}{(R^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(R^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{R^2}$$

Por otro lado, para integrar con respecto al ángulo debemos escribir $\hat{\phi}$ en la base cartesiana:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(\phi) \hat{\phi} d\phi &= \int_0^{2\pi} \sin(\phi) (-\sin(\phi)\hat{i} + \cos(\phi)\hat{j}) d\phi = -\hat{i} \int_0^{2\pi} \sin^2(\phi) d\phi + \hat{j} \int_0^{2\pi} \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(\phi) \hat{\phi} d\phi = -\pi \hat{i} \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando los resultados de las integrales en la expresión para \vec{B} , tendremos que:

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi} \left(\frac{2}{R^2} \right) (-\pi \hat{i}) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{2} \hat{i}}$$

Con lo cual se obtiene el campo magnético en el eje del cilindro magnetizado.

P3.- Alambre en medio magnético:

- a) Ya que se tiene simetría axial, y ya que estamos en presencia de un medio material magnético, debemos usar la ley de Ampère para la intensidad magnética \vec{H} :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enl}}^{(f)}$$

En esta expresión la corriente $I_{\text{enl}}^{(f)}$ es la corriente **libre** enlazada por la curva Γ , y por lo tanto, si existen corrientes de magnetización, no deben añadirse en esta parte. Ya que se tiene simetría axial podemos inferir que $\vec{H} = H(\rho)\hat{\phi}$, donde ρ es la distancia radial medida desde el eje de simetría del alambre (el cual es paralelo a \hat{z}), y $\hat{\phi}$ es el vector unitario azimutal de coordenadas cilíndricas. Tomando en cuenta eso, usamos como curva Γ una circunferencia de radio ρ , por lo tanto $d\vec{\ell} = \rho d\phi\hat{\phi}$, donde $\phi \in [0, 2\pi)$, y entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enl}}^{(f)} &\Rightarrow \int_0^{2\pi} (H(\rho)\hat{\phi}) \cdot (\rho d\phi\hat{\phi}) = I_{\text{enl}}^{(f)} \Rightarrow 2\pi\rho H(\rho) = I_{\text{enl}}^{(f)} \\ &\Rightarrow H(\rho) = \frac{I_{\text{enl}}^{(f)}}{2\pi\rho} \Rightarrow \vec{H}(\rho) = \frac{I_{\text{enl}}^{(f)}}{2\pi\rho} \hat{\phi} \end{aligned}$$

Para finalizar el cálculo de \vec{H} necesitamos la corriente enlazada $I_{\text{enl}}^{(f)}$, la cual será distinta si consideramos los casos $\rho < R$ y $\rho > R$. Para $\rho < R$ la curva Γ estará encerrando el área $\pi\rho^2$ de un disco de radio ρ , y por esta área sólo fluye una fracción del total de corriente que fluye por el cilindro de radio R . Como la densidad de corriente J_0 es uniforme, entonces $I_{\text{enl}}^{(f)} = J_0\pi\rho^2$, y así:

$$\vec{H}(\rho) = \frac{J_0\pi\rho^2}{2\pi\rho} \hat{\phi} \Rightarrow \vec{H}(\rho) = \frac{1}{2}J_0\rho\hat{\phi} \quad ; \quad \rho < R$$

Para $\rho > R$, independiente del valor de ρ la corriente que atravesará el área del disco encerrado por la curva Γ siempre será la corriente total que fluye por el circuito, la cual será $I_{\text{enl}}^{(f)} = J_0\pi R^2$, donde πR^2 es el área de un corte transversal del cilindro. Reemplazando esto en la expresión para \vec{H} se tiene que:

$$\vec{H}(\rho) = \frac{J_0\pi R^2}{2\pi\rho} \hat{\phi} \Rightarrow \vec{H}(\rho) = \frac{J_0 R^2}{2\rho} \hat{\phi} \quad ; \quad \rho > R$$

En resumen, el campo intensidad magnética en todo el espacio es el siguiente:

$$\vec{H}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}J_0\rho\hat{\phi} & ; \quad \rho < R \\ \frac{J_0 R^2}{2\rho}\hat{\phi} & ; \quad \rho > R \end{cases}$$

Ahora, usando \vec{H} y la susceptibilidad magnética χ tenemos las siguientes expresiones para el campo magnético \vec{B} y la magnetización \vec{M} :

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} \quad ; \quad \vec{M} = \chi\vec{H}$$

Como el material magnético está envolviendo al cilindro, la susceptibilidad magnética será cero para $\rho < R$, y χ para $\rho > R$, entonces:

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 J_0 \rho \hat{\phi} & ; \quad \rho < R \\ \frac{\mu_0(1+\chi)J_0 R^2}{2\rho} \hat{\phi} & ; \quad \rho > R \end{cases} \quad ; \quad \vec{M}(\rho) = \begin{cases} \vec{0} & ; \quad \rho < R \\ \chi \frac{J_0 R^2}{2\rho} \hat{\phi} & ; \quad \rho > R \end{cases}$$

- b) Si \hat{n} es el vector unitario perpendicular a la superficie del material magnético (apuntando hacia afuera de este), las densidades de corriente de magnetización pueden calcularse de la siguiente forma:

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} \quad ; \quad \vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$

Para la densidad superficial \vec{K}_b se tiene que $\hat{n} = -\hat{\rho}$, se evalúa esta cantidad en el borde $\rho = R$, y se debe usar la expresión de \vec{M} válida para $\rho > R$, entonces:

$$\vec{K}_b = \left(\frac{\chi J_0 R^2}{2R} \hat{\phi} \right) \times (-\hat{\rho}) \Rightarrow \boxed{\vec{K}_b = \frac{1}{2} \chi J_0 R \hat{z}}$$

Para la densidad volumétrica \vec{J}_b usamos el rotor en coordenadas cilíndricas, y se debe usar la expresión de \vec{M} válida para $\rho > R$, entonces:

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_\rho & \rho M_\phi & M_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho \frac{\chi J_0 R^2}{2\rho} & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{J}_b = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\chi J_0 R^2}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Como todas las componentes que aparecen en la última fila del determinante son constantes, todas las derivadas serán cero, y por lo tanto:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}_b = \vec{0}}$$