

FI2002-6 Electromagnetismo.**Profesor:** Marcel G. Clerc.**Auxiliares:** Pedro Aguilera, Roberto Gajardo.

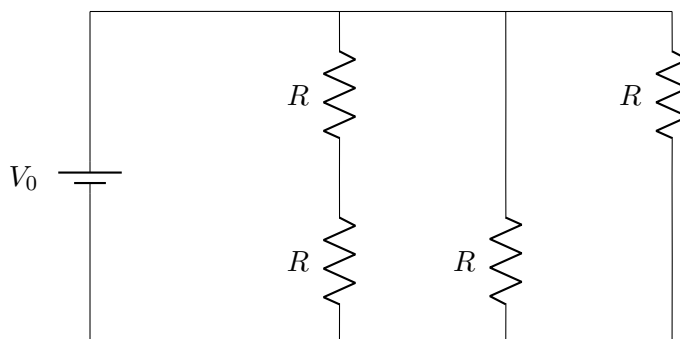
Desarrollo Auxiliar 11: Circuitos RC.

08 de Noviembre del 2023

P1.- Circuito RC (I):

El objetivo de esta pregunta es estudiar el comportamiento de los condensadores en un circuito para los dos casos extremos, es decir, para el caso en donde recién se prende el circuito ($t = 0$) y para el caso en donde el circuito lleva prendido una gran cantidad de tiempo ($t \rightarrow \infty$).

Partiremos por el caso $t = 0$. Si asumimos que los condensadores están descargados antes de prender la fuente de poder, en el preciso instante de activar la batería la carga en cada condensador es nula, y por la relación $Q = CV$, eso implica que en el instante $t = 0$ la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador es nula. Esto puede interpretarse como que, en el instante inicial, los condensadores son como un cable común y corriente, de tal forma que el circuito en ese instante se puede modelar como el siguiente circuito:



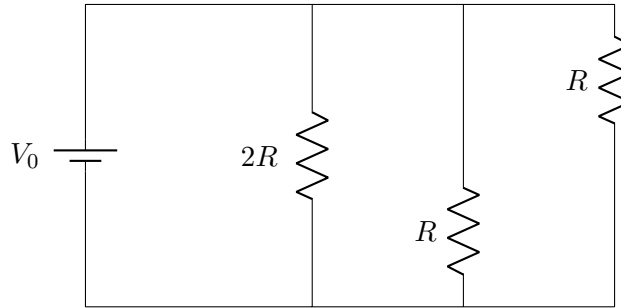
Tomando en cuenta eso, para encontrar la corriente I que circula por la batería en $t = 0$ podemos asociar todas las resistencias en una resistencia equivalente, y luego aplicar la ley de Ohm $V_0 = IR_{eq}$. Recordemos que cuando tenemos N resistencias conectadas en serie, estas son equivalentes a una nueva resistencia cuyo valor es la suma de las resistencias individuales, es decir:

$$R_{eq}^{(serie)} = R_1 + R_2 + \dots + R_N \Rightarrow R_{eq}^{(serie)} = \sum_{i=1}^N R_i$$

Por otro lado, cuando se tiene N resistencias conectadas en paralelo, estas son equivalentes a una nueva resistencia cuyo valor corresponde al inverso de la suma del inverso de cada resistencia, es decir:

$$R_{eq}^{(paralelo)} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right)^{-1} \Rightarrow R_{eq}^{(paralelo)} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$$

Podemos notar que hay dos resistencias en serie, en cuyo caso la resistencia equivalente corresponde a la suma de las resistencias individuales:



Luego de eso tenemos tres resistencias en paralelo, entonces obtenemos un circuito como el siguiente:



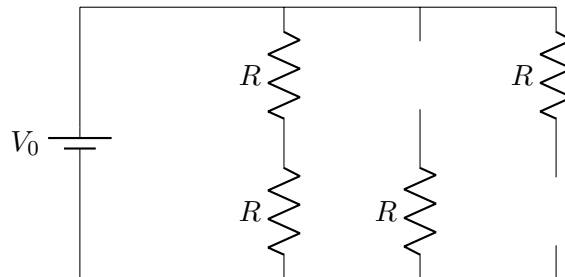
El valor de la resistencia equivalente R_{eq} se calcula con la expresión de la página anterior:

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \left(\frac{5}{2R} \right)^{-1} \Rightarrow R_{eq} = \frac{2}{5}R$$

Entonces, usando la resistencia equivalente y la ley de Ohm, podremos encontrar la corriente que pasa por la batería en $t = 0$:

$$V_0 = IR_{eq} \Rightarrow I = \frac{V_0}{R_{eq}} \Rightarrow \boxed{I(t=0) = \frac{5V_0}{2R}}$$

Ahora, para $t \rightarrow \infty$ se puede asumir que los condensadores en el circuito están completamente cargados, de tal forma que la corriente que pasa por ellos es nula. Esto es conveniente, ya que después de un tiempo muy largo podemos reemplazar cada uno de los condensadores en el circuito por un cable abierto, tal como se representa a continuación:



Tomando en cuenta eso, las únicas resistencias por las cuales circula corriente son las que están conectadas en serie, por lo tanto en este caso la resistencia equivalente del circuito completo sería la suma de las dos resistencias individuales, es decir, $R_{\text{eq}} = 2R$, y entonces a partir de la ley de Ohm:

$$I = \frac{V_0}{R_{\text{eq}}} \Rightarrow \boxed{I(t \rightarrow \infty) = \frac{V_0}{2R}}$$

Comparando los dos resultados, podemos intuir que si medimos la diferencia de potencial de la batería a lo largo del tiempo, esta partirá con el valor $\frac{5V_0}{2R}$ que se encontró anteriormente, y luego comenzará a decaer asintóticamente (por el efecto de carga de los condensadores) hasta el valor $\frac{V_0}{2R}$ que se encontró al final.

P2. Circuito RC (II):

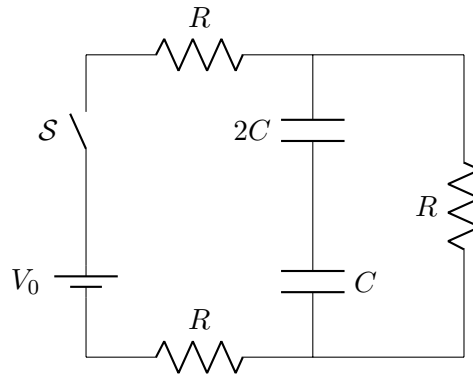
- a) En esta parte debemos asociar la combinación de condensadores del circuito hasta llegar a un solo condensador con cierta capacitancia equivalente C_{eq} . Recordemos que cuando tenemos N condensadores conectados en serie, estos son equivalentes a un nuevo condensador cuya capacitancia corresponde al inverso de la suma del inverso de cada capacitancia individual, es decir:

$$C_{eq}^{(serie)} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right)^{-1} \Rightarrow C_{eq}^{(serie)} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$$

Por otro lado, cuando se tiene N condensadores conectados en paralelo, estos son equivalentes a un nuevo condensador cuya capacitancia es la suma de las capacitancias individuales, es decir:

$$C_{eq}^{(paralelo)} = C_1 + C_2 + \dots + C_N \Rightarrow C_{eq}^{(paralelo)} = \sum_{i=1}^N C_i$$

En este caso la combinación de condensadores es mixta, ya que tenemos un par de condensadores asociados en paralelo, y estos a la vez están conectados en serie con otro condensador idéntico. Los dos condensadores en paralelo se pueden reemplazar por un condensador de capacitancia $2C$, tal como se muestra en la siguiente figura:



Entonces, la capacitancia equivalente corresponde al valor de la capacitancia combinada de los dos condensadores en serie, es decir:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{2C} + \frac{1}{C} \right)^{-1} = \left(\frac{3}{2C} \right)^{-1} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{2}{3}C}$$

- b) Ya que las resistencias no se pueden asociar entre si, este circuito es un circuito RC no estándar, por lo tanto si queremos conocer la corriente en el condensador del centro necesitamos resolver este circuito usando las leyes de Kirchhoff.

La primera ley de Kirchhoff (consecuencia de la conservación de la carga eléctrica) es la ley de las corrientes, la cual nos dice que la intensidad total de corriente que entra en un punto del circuito debe ser igual a la intensidad de corriente que sale de este punto. Al aplicar esta ley en un problema, los puntos que nos interesan son aquellos en donde se juntan tres o más ramas, entonces al ver la Figura 1 podemos identificar que los puntos A y B cumplen esa condición. Ahora, dado que en esos dos puntos las ramas que se conectan son las mismas, al aplicar la ley de las corrientes ambos puntos nos entregan la misma información, por lo tanto basta con aplicar la ley de las corrientes en uno de

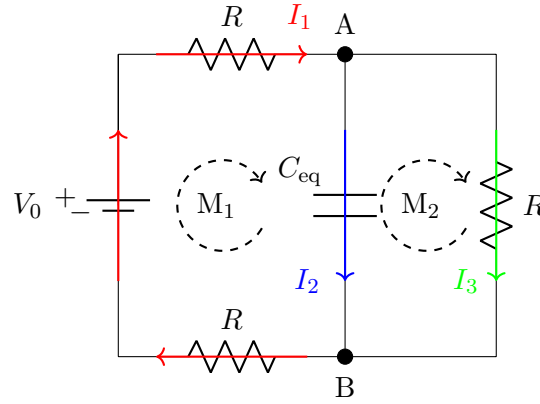


Figura 1: Corrientes en el circuito, y sentido en que se recorren las mallas.

esos dos puntos. Tomando en cuenta el punto A, notamos que entra una intensidad I_1 , mientras que salen I_2 e I_3 , entonces:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

La otra ley de Kirchhoff (consecuencia de la conservación de la energía) es la ley de los voltajes, la cual nos dice que la suma de las diferencias de potencial en una malla cerrada del circuito debe ser cero. En el contexto de esta ley, para definir bien el signo de la diferencia de potencial asociada a cada elemento en cada malla es necesario definir un sentido (horario o antihorario) en el cual recorreremos esta malla, y luego el signo de la diferencia de potencial de cada elemento se asignará según el sentido en el cual pasa la corriente relativo a cómo se recorre la malla:

- i) Cuando se trata de un elemento pasivo (como una resistencia o un condensador), el signo de la diferencia de potencial será negativo si la corriente va en el mismo sentido en el cual estamos recorriendo la malla. En caso contrario será positivo.
- ii) Cuando se trata de una fuente de poder, si al recorrer la malla cruzamos los terminales de este elemento desde $-$ a $+$ entonces la diferencia de potencial es positiva, en caso contrario (es decir, si la cruzamos de $+$ a $-$) será negativa.

Usaremos las mallas M_1 y M_2 mostradas en la Figura 1, donde ambas serán recorridas en sentido horario. Para la malla M_1 podemos ver que la fuente de poder V_0 se cruza de $-$ a $+$ según cómo recorreremos la malla, por lo tanto es positiva. Por otro lado, al cruzar las resistencias y el condensador notamos que el sentido en que recorreremos la malla coincide con el sentido de la corriente en cada uno de estos elementos, por lo tanto la diferencia de potencial asociada a ellos es negativa. Recordando la ley de Ohm $V = IR$, y la relación $Q = CV$ para el condensador, se tiene lo siguiente al aplicar la ley de los voltajes en la malla M_1 :

$$V_0 - RI_1 - \frac{Q_c}{C_{eq}} - RI_1 = 0 \Rightarrow V_0 - 2RI_1 - \frac{3}{2C}Q_c = 0 \quad (2)$$

En la expresión anterior Q_c hace referencia a la carga almacenada en el condensador, la cual cumple que $\frac{dQ_c}{dt} = I_2$. Ahora, para la malla M_2 podemos ver que en la resistencia el sentido de la corriente y el sentido en el cual recorreremos la malla coinciden, por lo tanto su diferencia de potencial es negativa. Por otro lado, en el condensador el sentido de la corriente y el sentido en el cual recorreremos la malla son contrarios, por lo tanto la diferencia de potencial asociada a este elemento es positiva.

Con todo esto, para la malla M_2 se tiene lo siguiente:

$$-RI_3 + \frac{Q_c}{C_{eq}} = 0 \Rightarrow -RI_3 + \frac{3}{2C}Q_c = 0 \quad (3)$$

Una vez que aplicamos la ley de las corrientes y la ley de los voltajes a todos los puntos y mallas independientes del circuito (respectivamente), terminamos con un sistema de ecuaciones que nos permite despejar la corriente en todas las ramas del circuito. En particular, como en este caso queremos encontrar I_2 debemos desarrollar el sistema de ecuaciones hasta despejar esta cantidad. Entonces, a partir de la ecuación (1) se tiene lo siguiente:

$$I_2 = I_1 - I_3$$

Para reemplazar I_1 e I_3 los despejamos desde las ecuaciones (2) y (3):

$$I_1 = \frac{V_0}{2R} - \frac{3}{4RC}Q_c \quad ; \quad I_3 = \frac{3}{2RC}Q_c$$

Entonces, reemplazando en la expresión para I_2 se tiene lo siguiente:

$$I_2 = \frac{V_0}{2R} - \frac{3}{4RC}Q_c - \frac{3}{2RC}Q_c \Rightarrow I_2 = \frac{V_0}{2R} - \frac{9}{4RC}Q_c$$

Ahora, recordando que $I_2 = \frac{dQ_c}{dt}$ podemos llegar a una ecuación diferencial para la carga Q_c del condensador:

$$\frac{dQ_c}{dt} = \frac{V_0}{2R} - \frac{9}{4RC}Q_c \Rightarrow \frac{dQ_c}{dt} + \frac{9}{4RC}Q_c = \frac{V_0}{2R}$$

Esta ecuación corresponde a una EDO lineal de primer orden no homogénea, entonces para resolverla buscamos la solución $Q_H(t)$ de la EDO homogénea, y sumamos la solución particular $Q_p(t)$ de la EDO original. Primero, para la solución particular $Q_p(t)$ notamos que una función constante es solución de la ecuación diferencial:

$$Q_p(t) = \frac{2}{9}CV_0$$

La solución $Q_H(t)$ de la EDO homogénea corresponde a la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dQ_H}{dt} + \frac{9}{4RC}Q_H = 0$$

La solución de esta EDO corresponde a una función exponencial cuyo exponente es la constante que acompaña a Q_H , pero con signo contrario, entonces:

$$Q_H(t) = Q_0 e^{-\frac{9}{4RC}t}$$

La constante Q_0 corresponde a una constante de integración, la cual se obtiene generalmente a partir de las condiciones iniciales. Entonces, como $Q_c = Q_H + Q_p$ se tiene que:

$$\Rightarrow Q_c(t) = Q_0 e^{-\frac{9}{4RC}t} + \frac{2}{9}CV_0$$

Para encontrar la constante de integración Q_0 debemos imponer que en el instante inicial el condensador no estaba cargado, entonces:

$$Q_c(t=0) = 0 \Rightarrow Q_0 + \frac{2}{9}CV_0 = 0 \Rightarrow Q_0 = -\frac{2}{9}CV_0$$

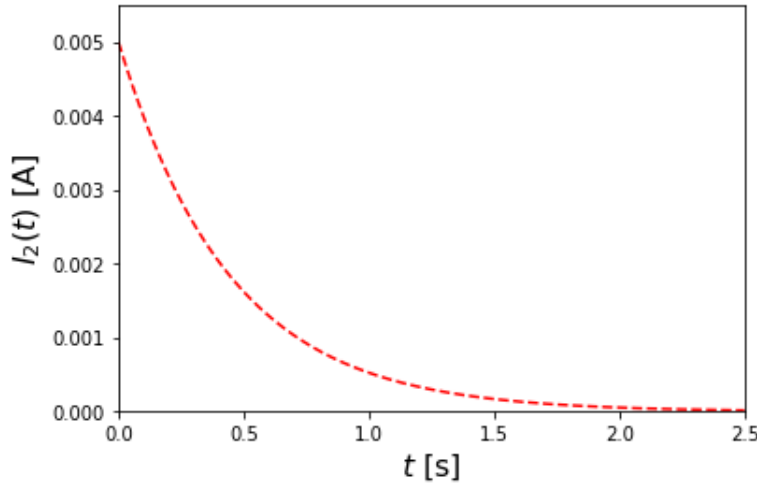
Entonces, reemplazando en la expresión para $Q_c(t)$ se tiene que:

$$Q_c = -\frac{2}{9}CV_0e^{-\frac{9}{4RC}t} + \frac{2}{9}CV_0 \Rightarrow Q_c(t) = \frac{2}{9}CV_0 \left(1 - e^{-\frac{9}{4RC}t}\right)$$

Por último, recordando que $I_2 = \frac{dQ_c}{dt}$, podemos ser capaces de encontrar la corriente en el condensador equivalente, entonces:

$$I_2(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{2}{9}CV_0 \left(1 - e^{-\frac{9}{4RC}t}\right) \right] = \frac{2}{9}CV_0 \left(-\frac{9}{4RC}\right) \left(-e^{-\frac{9}{4RC}t}\right) \Rightarrow I_2(t) = \frac{V_0}{2R}e^{-\frac{9}{4RC}t} \quad (4)$$

Esta expresión nos dice que la corriente en el condensador es máxima en $t = 0$, y luego tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$, lo cual es característico en los condensadores de un circuito RC. Por otro lado, ya que nuestro resultado es positivo entonces el sentido que se le dió a la corriente I_2 en la Figura 1 es correcto. Usando $V_0 = 10 \text{ V}$, $R = 1000 \Omega$ y $C = 0,001 \text{ F}$ se tiene lo siguiente:



- c) Al desconectar el switch las dos resistencias horizontales y la fuente de poder dejan de formar parte del circuito, por lo tanto sólo nos queda el condensador equivalente y una resistencia formando una malla M_* . Ya que no existe una fuente de poder, el condensador comenzará a descargarse generando una corriente I_* que atraviesa la resistencia, tal como se muestra en la Figura 2. Al aplicar la ley de los voltajes a esta malla (recorriéndola en sentido antihorario) se tiene lo siguiente:

$$-RI_* - \frac{Q_*}{C_{eq}} = 0 \Rightarrow I_* + \frac{3}{2RC}Q_* = 0$$

Ya que la corriente I_* está directamente relacionada con la carga que se acumula en el condensador, se tiene que $I_* = \frac{dQ_*}{dt}$, y entonces:

$$\Rightarrow \frac{dQ_*}{dt} + \frac{3}{2RC}Q_* = 0$$

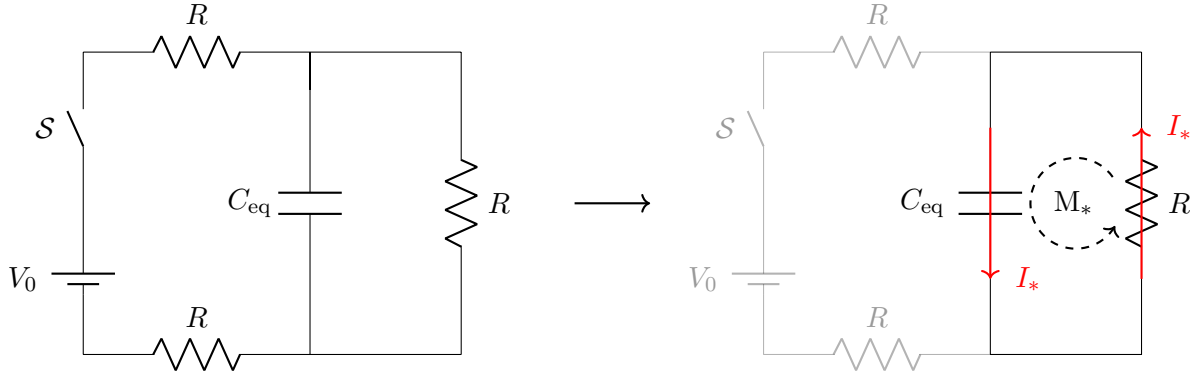


Figura 2: Luego de desconectar el switch, el circuito queda con una sola malla M_* .

Ahora, como queremos encontrar la corriente I_* (y gracias a que la EDO anterior es homogénea), podemos derivar esta ecuación diferencial con respecto al tiempo, entonces:

$$\frac{d^2 Q_*}{dt^2} + \frac{3}{2RC} \frac{dQ_*}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI_*}{dt} + \frac{3}{2RC} I_* = 0$$

La solución de esta EDO corresponde a una función exponencial cuyo exponente es la constante que acompaña a I_* , pero con signo contrario, y entonces:

$$I_*(t) = I_0 e^{-\frac{3}{2RC} t}$$

Es importante entender que el tiempo t en la expresión anterior es un tiempo distinto al mostrado en la expresión (4), ya que I_* sólo es válido para $t \geq T$. Para arreglar esto transformamos el tiempo en la expresión anterior, de tal forma que en $t = T$ se obtenga $I_* = I_0$. Entonces, si aplicamos el cambio $t \rightarrow t - T$ se tiene lo siguiente:

$$\Rightarrow I_*(t) = I_0 e^{-\frac{3}{2RC} (t-T)}$$

La constante I_0 corresponde a una constante de integración, la cual se obtiene con la condición inicial. En este caso el valor inicial de la corriente I_* corresponde al valor de la corriente I_2 en $t = T$, entonces usando la expresión (4) se tiene lo siguiente:

$$I_*(t = T) = I_2(t = T) \Rightarrow I_0 = \frac{V_0}{2R} e^{-\frac{9T}{4RC}} \Rightarrow I_*(t) = \frac{V_0 e^{-\frac{9T}{4RC}}}{2R} e^{-\frac{3}{2RC} (t-T)}$$

Entonces, si juntamos esta corriente junto con el resultado de la parte (b), tendremos una expresión para la corriente I_c a lo largo del condensador equivalente en función del tiempo:

$$I_c(t) = \begin{cases} \frac{V_0}{2R} e^{-\frac{9}{4RC} t} & ; \quad t < T \\ \frac{V_0 e^{-\frac{9T}{4RC}}}{2R} e^{-\frac{3}{2RC} (t-T)} & ; \quad t \geq T \end{cases}$$

Ya que el resultado para $t \geq T$ es positivo, significa que la corriente I_* (es decir, la corriente I_c luego de $t = T$) fluye como se impuso en la Figura 2. Esto es importante, ya que como I_2 tenía el mismo sentido en la Figura 1, eso nos dice que el sentido de la corriente en el condensador no cambia

al desconectar el switch. Lo que si podemos notar es que la corriente que atraviesa a la resistencia vertical cambia de sentido al desconectar el switch, lo que se puede apreciar al comparar los sentidos de I_3 e I_* en las figuras 1 y 2, respectivamente. Por último, al analizar el resultado para I_c podemos notar que para $t \geq T$ el decaimiento exponencial es menos intenso, ya que el exponente es de un valor absoluto menor que para $t < T$. Tomando en cuenta esto, al graficar nuevamente la corriente obtendremos un gráfico que cambia ligeramente en $t = T$, lo cual se puede apreciar en la siguiente imagen (donde se usó $T = 0,5$ s, $V_0 = 10$ V, $R = 1000 \Omega$ y $C = 0,001$ F):

