FI2002-6 Electromagnetismo.
Profesor: Marcel G. Clerc.
Auxiliares: Pedro Aguilera, Roberto Gajardo.

Desarrollo Auxiliar 10: Fuerza de Lorentz.

24 de Octubre del 2023

P1.- Espectrómetro de masas:

Tenemos una partícula con carga q que entra con cierta velocidad $\vec{v}_0$ a una zona con campo magnético $\vec{B}$. Si estos dos vectores no son paralelos , sabemos que aparece una fuerza que afecta la trayectoria de la partícula, desviándola de su dirección original. Para conocer de forma cuantitativa el efecto de esta fuerza en la trayectoria de la partícula debemos encontrar la ecuación de movimiento de la partícula, y luego integrarla para obtener las cantidades cinemáticas de interés (posición y velocidad) en función del tiempo.

La ecuación de movimiento de la partícula se obtiene a partir de la 2da ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, donde $\vec{F}$ es la fuerza neta que siente la partícula y $\vec{a}$ es su aceleración. En este caso, tomando en cuenta un movimiento en el plano de la página, y considerando que sólo existe la fuerza de Lorentz, se tiene que $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, donde $\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath}$ es la velocidad de la partícula en un instante arbitrario[1], y $\vec{B} = -B_0\hat{k}$ es el campo magnético en la zona del espacio donde está la partícula. Con esto, la fuerza neta de la partícula es la siguiente:

$$\vec{F} = q\left(\left(\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath}\right) \times \left(-B_0\hat{k}\right)\right) = -qB_0\left(\dot{x}(\hat{\imath} \times \hat{k}) + \dot{y}(\hat{\jmath} \times \hat{k})\right) \Rightarrow \vec{F} = -qB_0\dot{y}\hat{\imath} + qB_0\dot{x}\hat{\jmath}$$

Por otro lado, si consideramos un instante arbitrario la partícula está acelerando en las dos direcciones posibles (porque la fuerza tiene componentes en ambas direcciones), entonces $\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath}$, y si reemplazamos en la 2da ley de Newton y separamos en componentes se tiene lo siguiente:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -qB_0\dot{y}\hat{\imath} + qB_0\dot{x}\hat{\jmath} = m\ddot{x}\hat{\imath} + m\ddot{y}\hat{\jmath} \Rightarrow m\ddot{x} = -qB_0\dot{y} \quad ; \quad m\ddot{y} = qB_0\dot{x}$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{qB_0}{m}\dot{y} \quad ; \quad \ddot{y} = \frac{qB_0}{m}\dot{x} \tag{1}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, por lo tanto debemos desacoplarlas (es decir, encontrar una ecuación que sólo dependa de alguna de las variables x o y), y luego integrar usando las condiciones iniciales de posición y velocidad. En este caso para desacoplar las ecuaciones derivamos la primera ecuación mostrada en (1) con respecto al tiempo, obteniendo lo siguiente:

$$\frac{d\ddot{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{qB_0}{m}\dot{y}\right) \Rightarrow \dddot{x} = -\frac{qB_0}{m}\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{m}{qB_0}\dddot{x}$$

Reemplazando esto en la segunda expresión mostrada en (1) podremos encontrar una ecuación diferencial para x. Luego, para bajar el orden de la EDO encontrada podemos reescribirla usando la velocidad horizontal $\dot{x} = v_x$, entonces:

$$\ddot{y} = \frac{qB_0}{m}\dot{x} \Rightarrow -\frac{m}{qB_0}\dddot{x} = \frac{qB_0}{m}\dot{x} \Rightarrow \dddot{x} + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{v}_x + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 v_x = 0$$

[1] Es importante entender que la partícula se mueve horizontalmente **sólo en el instante en que entra a la zona con campo magnético**. Una vez dentro, aparecerá una fuerza vertical que le desviará en esa dirección, lo que hará que aparezca una componente vertical de la velocidad. Por eso se toma una velocidad lo más general posible.

Esta EDO corresponde a la ecuación de movimiento de un oscialdor armónico, por lo tanto la solución corresponde a una superposición entre un seno y un coseno, cuya frecuencia es la raíz cuadrada de la constante $\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2$. Entonces:

$$v_x(t) = A\cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + C\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)$$

Las constantes A y C son constantes de integración que se obtienen al aplicar las condiciones iniciales para la velocidad en $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. Antes de aplicar estas condiciones iniciales debemos encontrar la velocidad vertical $\dot{y} = v_y$, para lo cual obtenemos $\ddot{x}$ derivando $v_x(t)$, y luego lo reemplazamos en la primera expresión mostrada en (1) para despejar $\dot{y}$:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} \;&\Rightarrow\; \ddot{x} = -\frac{qB_0A}{m}\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \frac{qB_0C}{m}\cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\\
\ddot{x} = -\frac{qB_0}{m}\dot{y} \;&\Rightarrow\; -\frac{qB_0}{m}\dot{y} = -\frac{qB_0A}{m}\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + \frac{qB_0C}{m}\cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\\
&\Rightarrow\; v_y(t) = A\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) - C\cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)
\end{aligned}$$

Ahora podemos aplicar las condiciones iniciales asociadas a la velocidad para obtener A y C. Primero, como la velocidad inicial es puramente horizontal se tiene que $v_y(0) = 0$, entonces:

$$\begin{gathered}
v_y(0) = 0 \;\Rightarrow\; -C = 0 \;\Rightarrow\; C = 0\\
\Rightarrow\; v_x(t) = A\cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \quad ; \quad v_y(t) = A\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)
\end{gathered}$$

Para la componente horizontal de la velocidad inicial se tiene que $v_x(0) = v_0$, entonces:

$$\begin{gathered}
v_x(0) = v_0 \;\Rightarrow\; A = v_0\\
\Rightarrow\quad v_x(t) = v_0\cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \quad ; \quad v_y(t) = v_0\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \qquad (2)
\end{gathered}$$

Ahora que tenemos las componentes de la velocidad, si asumimos que el punto en el cual la partícula entra a la zona con campo magnético es el origen de coordenadas (es decir, $x(0) = y(0) = 0$) podemos integrar v_x y v_y con respecto al tiempo entre el instante inicial y un instante de tiempo arbitrario, y con eso obtener las componentes de la trayectoria de la partícula. Entonces:

$$\int_0^t v_x(t')dt' = \int_0^t v_0\cos\left(\frac{qB_0}{m}t'\right)dt' \;\Rightarrow\; \int_0^t \frac{dx}{dt'}dt' = v_0\left[\frac{m}{qB_0}\sin\left(\frac{qB_0}{m}t'\right)\right]\Bigg|_0^t$$

Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que el lado izquierdo es igual a $x(t) - x(0)$, entonces:

$$x(t) - x(0) = \frac{v_0m}{qB_0}\left(\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) - \sin(0)\right) \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{v_0m}{qB_0}\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)$$

Ahora integramos $v_y(t)$. A partir de la segunda expresión mostrada en (2) se tiene lo siguiente:

$$\int_0^t v_y(t')dt' = \int_0^t v_0\sin\left(\frac{qB_0}{m}t'\right)dt' \;\Rightarrow\; \int_0^t \frac{dy}{dt'}dt' = v_0\left[-\frac{m}{qB_0}\cos\left(\frac{qB_0}{m}t'\right)\right]\Bigg|_0^t$$

$$\Rightarrow\ y(t)-y(0)=\frac{v_0 m}{qB_0}\left(-\cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)+\cos(0)\right)\ \Rightarrow\ y(t)=\frac{v_0 m}{qB_0}\left(1-\cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\right)$$

Entonces, como conocemos toda la información sobre la trayectoria de la partícula en la zona con campo magnético, podemos responder cualquier cosa asociada su movimiento. En particular, si queremos conocer el ángulo de la trayectoria cuando esta abandona la zona con campo magnético, debemos recordar que en cinemática este ángulo se obtiene a partir de las componentes de la velocidad. Entonces, si v_{fx} y v_{fy} son, respectivamente, las componentes horizontal y vertical de la velocidad en el punto final del trayecto, se tiene que:

$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{v_{fy}}{v_{fx}}\right) \tag{3}$$

Para encontrar estas componentes necesitamos el tiempo que la partícula demora en llegar al final de la zona con campo magnético, para lo cual podemos usar la expresión para $x(t)$, y el dato de que el ancho de la zona con campo es L. Si $t=T$ es el instante de tiempo en el cual la partícula llega al final de la zona con campo, se debe cumplir que $x(T)=L$, entonces:

$$x(T)=L\quad\Rightarrow\quad\frac{v_0 m}{qB_0}\sin\left(\frac{qB_0}{m}T\right)=L\quad\Rightarrow\quad T=\frac{m}{qB_0}\sin^{-1}\left(\frac{qB_0L}{v_0m}\right)$$

Con este tiempo se tiene que $v_{fx}=v_x(T)$ y $v_{fx}=v_x(T)$, entonces:

$$v_{fx}=v_0\cos\left(\frac{qB_0}{m}\frac{m}{qB_0}\sin^{-1}\left(\frac{qB_0L}{v_0m}\right)\right)\quad\Rightarrow\quad v_{fx}=v_0\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{qB_0L}{v_0m}\right)\right)$$
$$v_{fy}=v_0\sin\left(\frac{qB_0}{m}\frac{m}{qB_0}\sin^{-1}\left(\frac{qB_0L}{v_0m}\right)\right)\quad\Rightarrow\quad v_{fy}=v_0\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{qB_0L}{v_0m}\right)\right)$$

Entonces, al reemplazar estas componentes en la expresión (3) para el ángulo α, se tiene finalmente que:

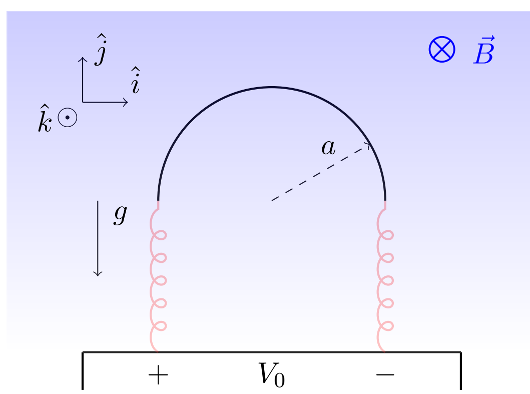
$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{v_0\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{qB_0L}{v_0m}\right)\right)}{v_0\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{qB_0L}{v_0m}\right)\right)}\right)=\tan^{-1}\left(\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{qB_0L}{v_0m}\right)\right)\right)\ \Rightarrow\ \boxed{\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{qB_0L}{v_0m}\right)}$$

P2.- Alambre flotante:

a) Si queremos estudiar el equilibrio del alambre necesitamos buscar todas las fuerzas que estén actuando sobre este, y luego imponer que la suma de todas ellas sea cero. Tomando en cuenta el sistema de la figura del enunciado, podemos notar que existe gravedad y el alambre tiene masa M, por lo tanto debemos considerar el peso $\vec{F}_g = -Mg\hat{j}$ del alambre. Por otro lado, ya que existe un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular al plano de la corriente I, el alambre siente una fuerza asociada a las cargas en movimiento, la cual debemos encontrar integrando a lo largo del alambre. Si se tiene un trozo de alambre infinitesimal $d\vec{\ell}$ por el cual circula una corriente de intensidad I en presencia de un campo magnético $\vec{B}$, este trozo infinitesimal sentirá una fuerza $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$, entonces si queremos conocer la fuerza neta que siente un alambre asociado a una curva Γ, debemos integrar a lo largo de esta curva para superponer el aporte de todos los trozos infinitesimales. Tomando en cuenta esto, la fuerza neta que siente un alambre con corriente en presencia de un campo magnético es:

$$\vec{F}_l = \int_\Gamma I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

En el caso de este problema se tiene un alambre con resistencia R en forma de semicircunferencia al cual se le aplica una diferencia de potencial V_0 según la polarización que se muestra en la siguiente figura:



Por el orden de los terminales podemos inferir que aparece una corriente en el alambre en sentido horario[2], cuyo valor es $I = \frac{V_0}{R}$ (en virtud de la ley de Ohm). Por otro lado, como el alambre tiene forma de un arco de circunferencia de radio a se tiene que $d\vec{\ell} = ad\phi\hat{\phi}$, donde la integral va desde π hasta 0, por el sentido de la corriente. Por otro lado, se tiene que $\vec{B} = -\frac{B_0 y}{a}\hat{k}$, donde y es la altura de un trozo $d\vec{\ell}$ de alambre arbitrario medida desde la base donde se aplica la diferencia de potencial. Ya que esta altura varía al recorrer los distintos puntos del alambre, lo mejor es representarla como $y = y_0 + a\sin(\phi)$, donde y_0 será una altura de referencia que nos servirá para despejar la altura de equilibrio del alambre (ver figura). Entonces, la fuerza $\vec{F}_l$ que siente el alambre por la presencia del campo magnético es:

$$\vec{F}_l = \int_\pi^0 Iad\phi\hat{\phi} \times \left(-\frac{B_0 y}{a}\hat{k}\right) = -IB_0\int_\pi^0 (y_0 + a\sin(\phi))d\phi(\hat{\phi} \times \hat{k}) = -IB_0\int_\pi^0 (y_0 + a\sin(\phi))\hat{\rho}d\phi$$

[2]En un circuito la corriente fluye desde el terminal positivo hacia el negativo.

$$\Rightarrow\ \vec{F_l} = -IB_0 \int_{\pi}^{0} (y_0 + a\sin(\phi))(\cos(\phi)\hat{\imath} + \sin(\phi)\hat{\jmath})d\phi$$

$$\Rightarrow\ \vec{F_l} = -IB_0 \left[y_0\hat{\imath}\int_{\pi}^{0}\cos(\phi)d\phi + y_0\hat{\jmath}\int_{\pi}^{0}\sin(\phi)d\phi + a\hat{\imath}\int_{\pi}^{0}\sin(\phi)\cos(\phi)d\phi + a\hat{\jmath}\int_{\pi}^{0}\sin^2(\phi)d\phi \right]$$

Para las integrales se tiene lo siguiente:

$$\int_{\pi}^{0}\cos(\phi)d\phi = \sin(0) - \sin(\pi)\ \Rightarrow\ \int_{\pi}^{0}\cos(\phi)d\phi = 0$$

$$\int_{\pi}^{0}\sin(\phi)d\phi = -\cos(0) - (-\cos(\pi))\ \Rightarrow\ \int_{\pi}^{0}\sin(\phi)d\phi = -2$$

$$\int_{\pi}^{0}\sin(\phi)\cos(\phi)d\phi = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}\sin(2\phi)d\phi = -\frac{1}{4}\cos(0) - \left(-\frac{1}{4}\cos(2\pi)\right)\ \Rightarrow\ \int_{\pi}^{0}\sin(\phi)\cos(\phi)d\phi = 0$$

$$\int_{\pi}^{0}\sin^2(\phi)d\phi = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}d\phi - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}\cos(2\pi)d\phi = \frac{1}{2}\left(0 - \pi - \sin(0) + \sin(2\pi)\right)\ \Rightarrow\ \int_{\pi}^{0}\sin^2(\phi)d\phi = -\frac{\pi}{2}$$

Entonces, reemplazando estas integrales em $\vec{F_l}$ y recordando que en este caso $I = \frac{V_0}{R}$ se tiene lo siguiente:

$$\vec{F_l} = -IB_0\left(-2y_0 - \frac{\pi a}{2}\right)\hat{\jmath}\ \Rightarrow\ \vec{F_l} = \frac{B_0V_0}{R}\left(2y_0 + \frac{\pi a}{2}\right)\hat{\jmath}$$

Ahora, para encontrar la altura de equilibrio debemos imponer que la suma de fuerzas sea cero, es decir, $\vec{F_g} + \vec{F_l} = \vec{0}$. Entonces, al imponer esto y despejar y_0 se tendrá una altura de equilibrio:

$$\vec{F_g} + \vec{F_l} = \vec{0}\ \Rightarrow\ -Mg\hat{\jmath} + \frac{B_0V_0}{R}\left(2y_0 + \frac{\pi a}{2}\right)\hat{\jmath} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow\ 2y_0 + \frac{\pi a}{2} = \frac{MgR}{B_0V_0}\ \Rightarrow\ \boxed{y_0 = \frac{MgR}{2B_0V_0} - \frac{\pi a}{4}}$$

b) Ya que queremos que el alambre se levante, necesitamos que $y_0 \geq 0$. Entonces:

$$y_0 \geq 0\ \Rightarrow\ \frac{MgR}{2B_0V_0} - \frac{\pi a}{4} \geq 0\ \Rightarrow\ \boxed{V_0 \leq \frac{2MgR}{\pi a B_0}}$$