

FI2002-6 Electromagnetismo.

Profesor: Marcel G. Clerc.

Auxiliares: Pedro Aguilera, Roberto Gajardo.

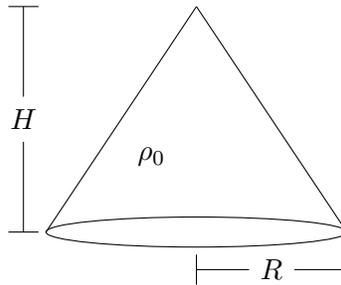


## Desarrollo Auxiliar 7: Preparación Control 1.

04 de Octubre del 2023

### P1.- Cono macizo cargado:

Se tiene un cono macizo de radio  $R$  y altura  $H$  con una densidad de carga uniforme  $\rho_0$ , tal como se muestra en la siguiente figura:



Partiremos por el campo eléctrico. Como no se cumple ninguna de las simetrías relevantes en este curso, la única forma que tenemos de calcular el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  es a través de su definición integral:

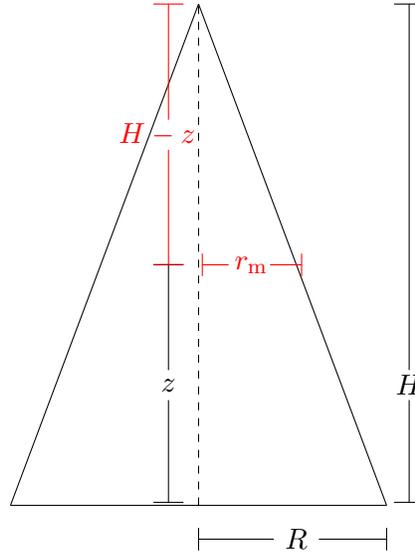
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq \quad (1)$$

En esta expresión,  $\vec{r}$  es el punto del espacio donde queremos calcular el campo eléctrico,  $\vec{r}'$  es la posición de un punto arbitrario de nuestra distribución de carga, y  $dq$  es la carga infinitesimal que se encuentra en la posición  $\vec{r}'$ , la cual se expresa en función de la densidad de carga y un diferencial de línea, superficie o volumen, según corresponda. En este caso en particular, por la forma que tiene la distribución de carga conviene modelar el sistema haciendo uso de coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\phi$  y  $z$  con origen en el centro de la base del cono, y conviene usar un sistema de referencia tal que  $\hat{k}$  es paralelo al eje de simetría del cono, y apunta desde el origen hacia el vértice de este. Con todo esto, ya que queremos calcular el campo eléctrico en el vértice del cono tendremos que  $\vec{r} = H\hat{k}$ , mientras que la posición de un punto arbitrario del cono se puede escribir como  $\vec{r}' = r\hat{r} + z\hat{k}$ , donde  $z$  es la altura con respecto a la base del cono, y  $r$  es la distancia radial medida desde el eje de simetría. Por otro lado, ya que la distribución es volumétrica se tiene que  $dq = \rho_0 dV$ , donde se usa el diferencial de volumen  $dV = r d\phi dr dz$  en coordenadas cilíndricas. Ahora, en este caso particular es importante entender que los límites de integración que usemos deben ser consistentes con los límites físicos de nuestra distribución de carga, ya que como tenemos un cono, el límite superior  $r_m$  de la integral asociada a la variable radial  $r$  es diferente para distintos valores de la altura  $z$ , tal como se puede apreciar en la figura de la siguiente página. Por semejanza de triángulos podemos encontrar una expresión para  $r_m(z)$ :

$$\frac{r_m}{R} = \frac{H - z}{H} \Rightarrow r_m(z) = \frac{R}{H}(H - z) \quad (2)$$

Tomando en cuenta esto, y con el apoyo de la figura, se tienen los siguientes límites de integración:

$$\phi \in [0, 2\pi) \quad ; \quad r \in [0, r_m(z)] \quad ; \quad z \in [0, H]$$



Entonces, reemplazando todo en la definición de campo eléctrico y desarrollando, se tiene lo siguiente:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^H \int_0^{r_m(z)} \int_0^{2\pi} \frac{(H\hat{k} - r\hat{r} - z\hat{k})\rho_0 r d\phi dr dz}{|H\hat{k} - r\hat{r} - z\hat{k}|^3}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^H \int_0^{r_m(z)} \int_0^{2\pi} \frac{(H-z)\hat{k}}{(r^2 + (H-z)^2)^{\frac{3}{2}}} r d\phi dr dz - \int_0^H \int_0^{r_m(z)} \int_0^{2\pi} \frac{r\hat{r}}{(r^2 + (H-z)^2)^{\frac{3}{2}}} r d\phi dr dz \right]$$

Al desarrollar la integral con respecto a  $\phi$ , en la primera integral se obtiene un factor  $2\pi$ , mientras que la segunda integral se anula en virtud de que la integral del vector  $\hat{r}$  en un ciclo completo (en este caso entre 0 y  $2\pi$ ) es cero. Tomando en cuenta eso se tiene que:

$$\vec{E} = \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^H \int_0^{r_m(z)} \frac{(H-z)\hat{k}}{(r^2 + (H-z)^2)^{\frac{3}{2}}} r dr dz \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0\hat{k}}{2\epsilon_0} \int_0^H (H-z) \left[ \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H-z)^2)^{\frac{3}{2}}} dr \right] dz$$

Para resolver la integral con respecto a la variable radial se usa el cambio de variable  $u = r^2 + (H-z)^2$ , lo cual nos permite reemplazar directamente el denominador, mientras que para el numerador se tiene lo siguiente:

$$u = r^2 + (H-z)^2 \Rightarrow r^2 = u - (H-z)^2 \Rightarrow 2r dr = du \Rightarrow r dr = \frac{1}{2} du$$

Para los límites de integración, aplicando el cambio de variable  $u = r^2 + (H-z)^2$  se tiene lo siguiente:

$$r = 0 \Rightarrow u = (H-z)^2 \quad ; \quad r = r_m \Rightarrow u = r_m^2 + (H-z)^2$$

Entonces, reemplazando en la integral y desarrollando se tiene lo siguiente:

$$\int_{r=0}^{r=r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H-z)^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \int_{u=(H-z)^2}^{u=r_m^2+(H-z)^2} \frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2} \left[ \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right] \Bigg|_{(H-z)^2}^{r_m^2+(H-z)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \frac{1}{((H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(r_m^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Reemplazamos  $r_m(z)$  desde la expresión (2), y entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dr &= \frac{1}{((H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(\frac{R^2}{H^2}(H - z)^2 + (H - z)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dr &= \frac{1}{((H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(\frac{R^2}{H^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} ((H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dr &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{H^2} + 1}}\right) \frac{1}{((H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Por definición se tiene que  $((H - z)^2)^{\frac{1}{2}} = |H - z|$ , y como estamos integrando siempre en puntos que están por debajo del vértice del cono, se tiene que  $z \leq H$ , por lo tanto  $|H - z| = H - z$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dr &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{H^2} + 1}}\right) \frac{1}{H - z} \\ \Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dr &= \left(1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right) \frac{1}{H - z} \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando en la expresión para el campo eléctrico se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{E} = \frac{\rho_0 \hat{k}}{2\epsilon_0} \int_0^H \left(1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right) \frac{H - z}{H - z} dz &\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right) \hat{k} \int_0^H dz \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 H}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right) \hat{k}} \end{aligned}$$

Ahora, para el potencial eléctrico  $V$  usamos la definición integral:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

En esta expresión la interpretación de  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$  y  $dq$  es la misma que en la expresión (1) para el campo eléctrico, por lo tanto podemos usar las mismas cantidades para resolver esta integral. Entonces:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^H \int_0^{r_m(z)} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 r d\phi dr dz}{|H\hat{k} - r\hat{r} - z\hat{k}|} \Rightarrow V = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^H \int_0^{r_m(z)} \int_0^{2\pi} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} d\phi dr dz$$

La integral con respecto a  $\phi$  nos entrega un factor  $2\pi$ , entonces:

$$\Rightarrow V = \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^H \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} dr dz \Rightarrow V = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^H \left[ \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} dr \right] dz$$

Para resolver la integral con respecto a la variable radial se usa nuevamente el cambio de variable  $u = r^2 + (H - z)^2$ , lo cual nos permite reemplazar directamente todas las cosas que usamos en la integral para el campo eléctrico. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^{r=r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} dr &= \int_{u=(H-z)^2}^{u=r_m^2+(H-z)^2} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left[ \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] \Big|_{(H-z)^2}^{r_m^2+(H-z)^2} \\ &\Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} dr = (r_m^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}} - ((H - z)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Reemplazamos  $r_m(z)$  desde la expresión (2), y entonces:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} dr = \left( \frac{R^2}{H^2} (H - z)^2 + (H - z)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - ((H - z)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} dr = \sqrt{\frac{R^2}{H^2} + 1} ((H - z)^2)^{\frac{1}{2}} - ((H - z)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} dr = \left( \sqrt{\frac{R^2}{H^2} + 1} - 1 \right) ((H - z)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Usando  $((H - z)^2)^{\frac{1}{2}} = |H - z|$ , y tomando en cuenta que  $|H - z| = H - z$  (ya que  $z \leq H$ ), se tiene que:

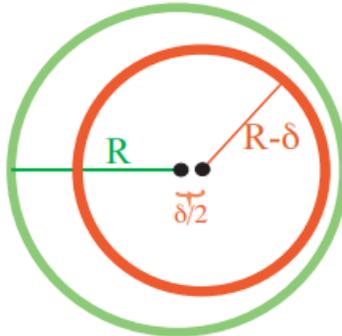
$$\Rightarrow \int_0^{r_m(z)} \frac{r}{(r^2 + (H - z)^2)^{\frac{1}{2}}} dr = \left( \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{H} - 1 \right) (H - z)$$

Entonces, reemplazando en la expresión para  $V$  nos queda una integral directa de resolver, y así:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \int_0^H \left( \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{H} - 1 \right) (H - z) dz = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left( \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{H} - 1 \right) \left[ H^2 - \frac{H^2}{2} \right] \\ &\Rightarrow V = \frac{\rho_0 H^2}{4\varepsilon_0} \left( \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{H} - 1 \right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{\rho_0 H}{4\varepsilon_0} (\sqrt{R^2 + H^2} - H)} \end{aligned}$$

**P2.- Campo y potencial eléctrico de átomos neutros:**

- a) Un modelo para átomos dipolares consiste en una combinación de dos casquetes con densidad de carga  $\sigma$ , pero de distinto signo, una de radio  $R$  y otra de radio  $R - \delta$ , donde los centros de estos casquetes están separados a en distancia  $\frac{\delta}{2}$ , tal como se muestra en la siguiente figura:



Para encontrar el campo eléctrico de este sistema aprovecharemos el principio de superposición, es decir, calculamos el campo que produce cada casquete, y luego los sumamos para encontrar el campo total. Ahora, es importante entender que para ocupar el principio de superposición el campo de cada casquete debe calcularse usando el mismo punto del espacio como origen, y por conveniencia ubicaremos el origen en el centro del casquete de radio  $R$  con carga negativa.

Partamos por calcular el campo  $\vec{E}_-(\vec{r})$  producido por el casquete de carga negativa. Ya que es un casquete no existe carga en un radio  $r < R$  medido desde su centro, entonces la carga encerrada por una esfera gaussiana de radio  $r < R$  sería cero, y por ley de Gauss:

$$\vec{E}_-(\vec{r}) = \vec{0} \quad ; \quad r < R.$$

Por otro lado para  $r > R$  la carga encerrada por una esfera gaussiana será la carga total del casquete, la cual es su área por la densidad superficial de carga. Como el área de la superficie de una esfera de radio  $R$  es  $4\pi R^2$ , entonces  $Q_{\text{enc}} = -4\pi R^2\sigma$ , y por ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = -\frac{4\pi R^2\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = -\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 r^2} \quad ; \quad r > R$$

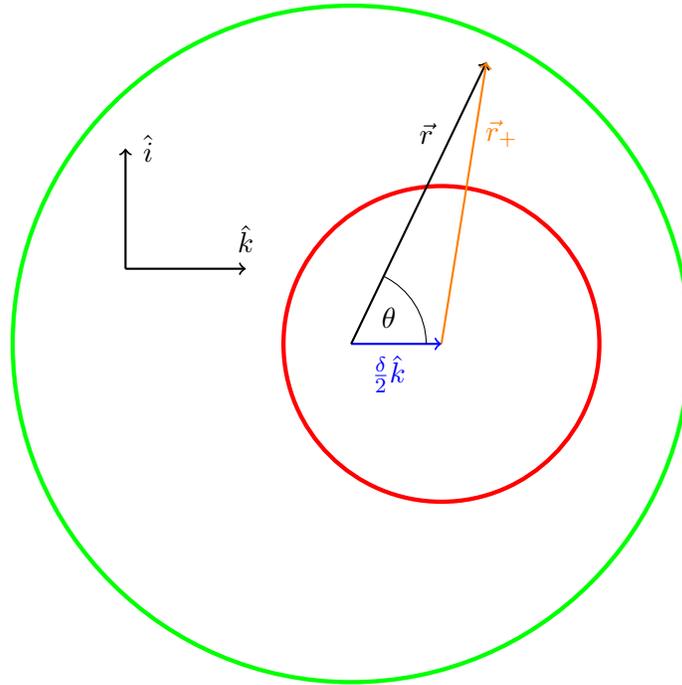
Como hay simetría esférica, la dirección del campo es  $\hat{r}$  en coordenadas esféricas, y así finalmente se tiene que:

$$\vec{E}_-(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & ; \quad r < R \\ -\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} & ; \quad r > R \end{cases}$$

Ahora necesitamos el campo eléctrico  $\vec{E}_+(\vec{r})$  producido por el casquete de radio  $R - \delta$  y carga positiva. Sea  $\vec{r}_+$  el vector posición medido desde el centro de este casquete, si usáramos ese punto como origen entonces el campo eléctrico producido por este casquete es análogo al encontrado anteriormente para el casquete de carga negativa, sólo que cambiamos  $\vec{r}$  por  $\vec{r}_+$ ,  $-\sigma$  por  $\sigma$ , y  $R$  por  $R - \delta$ , entonces:

$$\vec{E}_+(\vec{r}_+) = \begin{cases} \vec{0} & ; \quad r_+ < R - \delta \\ \frac{(R-\delta)^2\sigma}{\epsilon_0 r_+^2} \hat{r}_+ & ; \quad r_+ > R - \delta \end{cases}$$

Ahora nos gustaría sumar ambos resultados para obtener el campo total, sin embargo recordemos que necesitamos los campos medidos desde el mismo origen (en este caso el centro del casquete de carga negativa), y con la expresión anterior  $\vec{E}_+$  está medido con respecto a un origen desplazado  $\frac{\delta}{2}$  hacia la derecha del origen que elegimos al principio del desarrollo, tal como se muestra en la siguiente figura:



Para volver al origen correcto escribimos  $\vec{r}_+$  en función de  $\vec{r}$  apoyándonos en una relación geométrica entre los vectores:

$$\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{\delta}{2} \hat{k}$$

Usando teorema del coseno podemos ser capaces de encontrar la distancia  $r_+$ , y con ello  $\hat{r}_+$ :

$$r_+ = \sqrt{r^2 + \frac{\delta^2}{4} - r\delta \cos(\theta)} \Rightarrow \hat{r}_+ = \frac{\vec{r} - \frac{\delta}{2} \hat{k}}{\sqrt{r^2 + \frac{\delta^2}{4} - r\delta \cos(\theta)}}$$

Entonces, reemplazando en el campo eléctrico  $\vec{E}_+$  tendremos que:

$$\vec{E}_+(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & ; r_+ < R - \delta \\ \frac{(R-\delta)^2 \sigma}{\epsilon_0 \left( r^2 + \frac{\delta^2}{4} - r\delta \cos(\theta) \right)^{\frac{3}{2}}} \left( \vec{r} - \frac{\delta}{2} \hat{k} \right) & ; r_+ > R - \delta \end{cases}$$

Para resumir, el campo generado por cada casquete es:

$$\vec{E}_-(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & ; \text{ Dentro del casquete verde} \\ -\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} & ; \text{ Fuera del casquete verde} \end{cases}$$

$$\vec{E}_+(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & ; \text{ Dentro del casquete rojo} \\ \frac{(R-\delta)^2\sigma}{\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{\delta^2}{4} - r\delta \cos(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}} \left(r\hat{r} - \frac{\delta}{2}\hat{k}\right) & ; \text{ Fuera del casquete rojo} \end{cases}$$

Al sumar las contribuciones correspondientes en cada zona del espacio, se obtiene finalmente el siguiente campo eléctrico generado por el sistema:

$$\vec{E}(r, \theta) = \begin{cases} \vec{0} & ; \text{ Dentro del casquete rojo} \\ \frac{(R-\delta)^2\sigma}{\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{\delta^2}{4} - r\delta \cos(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}} \left(r\hat{r} - \frac{\delta}{2}\hat{k}\right) & ; \text{ Espacio entre casquetes} \\ -\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} + \frac{(R-\delta)^2\sigma}{\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{\delta^2}{4} - r\delta \cos(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}} \left(r\hat{r} - \frac{\delta}{2}\hat{k}\right) & ; \text{ Fuera del casquete verde} \end{cases} \quad (3)$$

En este punto tendríamos que calcular el límite  $\delta \rightarrow 0$ , en el cual sabemos que los casquetes coincidirán. Con ver el sistema, y considerando este límite, deberíamos ser capaces de intuir que el sistema es algo parecido a un dipolo, por lo tanto debe ser posible desarrollar la expresión anterior hasta llegar al campo de ese tipo de distribuciones. Primero que todo, como al final del límite ambos radios serán  $R$ , entonces podemos usar la aproximación  $R - \delta \approx R$ , además por esto mismo sólo nos interesa aplicar el límite en el campo dentro del casquete rojo y fuera del casquete verde de la expresión (3), ya que no existirá espacio entre casquetes. Desarrollamos la expresión para el campo eléctrico  $\vec{E}_{\text{out}}$  fuera de los casquetes:

$$\vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) \approx -\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} + \frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{\delta^2}{4} - r\delta \cos(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}} \left(r\hat{r} - \frac{\delta}{2}\hat{k}\right)$$

Ahora, como  $\delta \rightarrow 0$  entonces  $\delta^2$  es un término despreciable, y de ahora en adelante desechamos cualquier término que sea proporcional a esta cantidad, entonces:

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) \approx -\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} + \frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 (r^2 - r\delta \cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} \left(r\hat{r} - \frac{\delta}{2}\hat{k}\right)$$

Desarrollamos el denominador y aplicamos la aproximación polinómica a primer orden<sup>1</sup>:

$$\frac{1}{(r^2 - r\delta \cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} = (r^2 - r\delta \cos(\theta))^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1}{(r^2 - r\delta \cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} = r^{-3} \left(1 - \frac{\delta}{r} \cos(\theta)\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{(r^2 - r\delta \cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3\delta}{2r} \cos(\theta)\right)$$

<sup>1</sup>Es decir, la aproximación  $(1+x)^n \approx 1+nx$  cuando  $x \ll 1$

Entonces, reemplazando en la expresión para  $\vec{E}_{\text{out}}$  tendremos que:

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) \approx -\frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} + \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^3} \left(1 + \frac{3\delta}{2r} \cos(\theta)\right) \left(r\hat{r} - \frac{\delta}{2} \hat{k}\right)$$

Realizamos la multiplicación de las cantidades entre paréntesis, e ignoramos el término proporcional a  $\delta^2$ , entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) &\approx -\frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} + \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^3} \left(r\hat{r} + \frac{3\delta}{2} \cos(\theta)\hat{r} - \frac{\delta}{2} \hat{k}\right) \\ \Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) &\approx -\frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} + \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} + \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^3} \left(\frac{3\delta}{2} \cos(\theta)\hat{r} - \frac{\delta}{2} \hat{k}\right) \Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) \approx \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^3} \left(\frac{3\delta}{2} \cos(\theta)\hat{r} - \frac{\delta}{2} \hat{k}\right) \end{aligned}$$

Para llegar al campo de un dipolo debemos aplicar el límite  $\delta \rightarrow 0$  a la vez que la carga  $q = 4\pi R^2\sigma$  asociada a los cascarones tiende a infinito. En ese sentido debemos hacer que aparezca esta carga en la expresión del campo eléctrico, para lo cual multiplicamos por  $4\pi$  en el numerador y denominador, entonces:

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) \approx \frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(\frac{3\delta}{2} \cos(\theta)\hat{r} - \frac{\delta}{2} \hat{k}\right) \Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) \approx \frac{q\frac{\delta}{2}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(3 \cos(\theta)\hat{r} - \hat{k}\right)$$

El siguiente paso para escribir esto como un dipolo es notar (a partir de la última figura) que  $\cos(\theta) = \hat{k} \cdot \hat{r}$ , entonces:

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) \approx \frac{q\frac{\delta}{2}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(3 (\hat{k} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{k}\right)$$

Definimos el vector  $\vec{d} = \frac{\delta}{2} \hat{k}$ , y entonces reordenando la expresión anterior:

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(3 (q\vec{d} \cdot \hat{r}) \hat{r} - q\vec{d}\right)$$

Ahora si, recordamos que el límite dipolar ocurre cuando  $\vec{d} \rightarrow \vec{0}$  (lo cual ocurre en virtud de que  $\delta \rightarrow 0$ ) y cuando  $q \rightarrow \infty$ , a la vez que el producto  $\vec{p} = q\vec{d}$  se mantiene constante, entonces en el límite:

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(3 (\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}\right) \Rightarrow \vec{E}_{\text{out}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3 (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$

Entonces, como dentro de los cascarones la carga encerrada (y por lo tanto el campo eléctrico) es cero, el resultado final para el campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & ; r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right) & ; r \geq R \end{cases}$$

Esto nos dice que el átomo produce un campo eléctrico dipolar que sólo existe en el exterior de los cascarones, de tal forma que las líneas de campo salen de un hemisferio y llegan al otro.

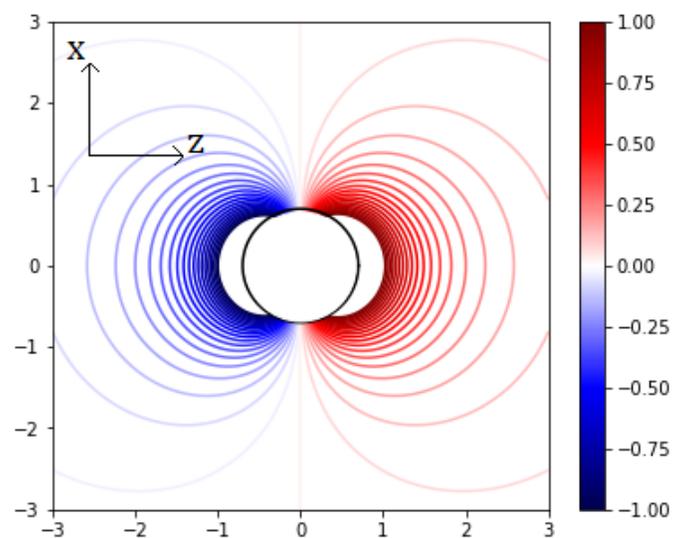
- b) Dado que este sistema es un dipolo, entonces el potencial es el de un dipolo puntual, el cual sólo es válido para puntos fuera de los cascarones, entonces:

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Usamos  $\vec{p} = p\hat{k}$ , y entonces:

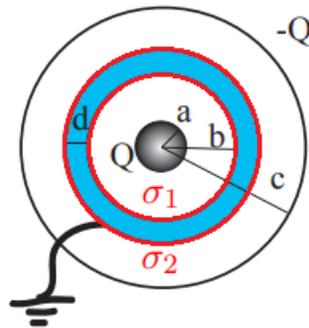
$$\Rightarrow V(r, \theta) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Al graficar para los puntos fuera del sistema en el plano XZ se obtiene el siguiente resultado (usando  $\frac{p}{4\pi\epsilon_0} = 1$ ), donde los distintos colores hacen referencia a distintos valores que puede tomar  $V(r, \theta)$ :

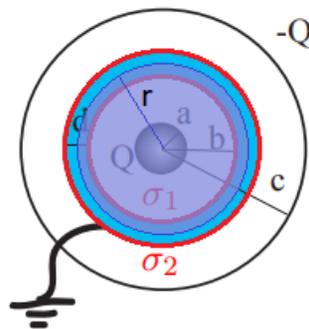


**P3.- Conductores y densidad de carga:**

Recordemos que la característica principal de los materiales conductores (desde el punto de vista de la electrostática) es que, cuando estos están aislados, las cargas libres en el material se reordenarán hasta que el potencial en el material conductor sea uniforme, lo que implica que el campo eléctrico en el interior de un material conductor es cero. Para que esto se cumpla, en el estado estacionario del conductor (es decir, cuando el potencial eléctrico ya es uniforme) las cargas libres deben situarse en las superficies del material (generando densidades de carga superficial), ya que de otra forma habría carga neta dentro del conductor, lo que generaría un potencial eléctrico no uniforme. Tomando en cuenta eso, asumimos que en el cascarón conductor de nuestro sistema se induce una densidad de carga superficial  $\sigma_1$  en la superficie interior (es decir, a una distancia  $r = b$  del centro), y una densidad de carga superficial  $\sigma_2$  en la superficie exterior (es decir, a una distancia  $r = b + d$  del centro), tal como se muestra en la siguiente figura:



Para calcular la densidad de carga  $\sigma_1$  asociada a la cara interior del cascarón podemos apoyarnos en la ley de Gauss, y en el hecho de que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es nulo dentro del conductor. Consideramos una esfera gaussiana de radio  $r \in (b, b + d)$  con su superficie en el interior del conductor, tal como se muestra en la siguiente figura:



Al aplicar la ley de Gauss estaremos tomando en cuenta el campo en el borde de la esfera gaussiana (interior del conductor), el cual es nulo, entonces:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow \oiint_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_{enc} = 0$$

En este caso la carga encerrada por la superficie gaussiana corresponde a la carga total  $Q$  de la esfera maciza, más la carga  $Q_1$  asociada a la superficie interior del cascarón conductor. Entonces:

$$Q_{enc} = 0 \Rightarrow Q + Q_1 = 0 \tag{4}$$

Ahora, como se tiene simetría esférica las densidades de carga superficial inducidas en el cascarón conductor son uniformes, por lo tanto la carga  $Q_1$  puede expresarse usando la densidad de carga  $\sigma_1$  a través de la relación  $Q_1 = 4\pi b^2 \sigma_1$ , y así:

$$\Rightarrow Q + 4\pi b^2 \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi b^2} \quad (5)$$

Como no conocemos la carga neta del cascarón conductor, no podemos calcular la otra densidad de carga usando esta cantidad como lo hicimos en la clase auxiliar. Lo que si sabemos sobre el cascarón conductor es que está conectado a tierra, por lo tanto  $V = 0$  en todos los puntos del cascarón. Este dato, junto a la ley de Gauss, nos servirá para encontrar la carga  $Q_2$  de la superficie exterior del cascarón conductor, y con esto podremos encontrar la densidad de carga  $\sigma_2$  que falta.

Tomando en cuenta que  $V \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , y tomando en cuenta la simetría esférica<sup>2</sup> del sistema, el potencial eléctrico en cualquier punto a una distancia  $r$  del centro de la esfera es:

$$V(r) = \int_r^\infty E(r) dr$$

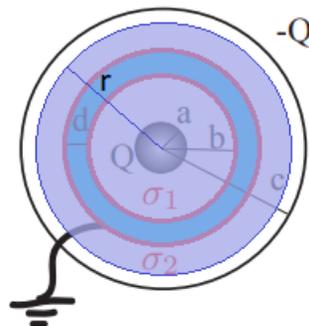
De las figuras de la página anterior podemos notar que los puntos del cascarón son tales que  $r \in [b, b + d]$ , y como el cascarón es conductor (y está conectado a tierra), se tiene que en todos estos puntos  $V = 0$ . Eso nos dice que si reemplazamos un  $r$  de este intervalo en la integral anterior, su valor será cero, por lo tanto tomamos el valor más conveniente, que corresponde a  $r = b + d$ . Entonces:

$$\Rightarrow \int_{b+d}^\infty E(r) dr = 0$$

Ahora, debemos tomar en cuenta que la magnitud  $E(r)$  del campo eléctrico es una función distinta para  $r \in [b + d, c]$  y para  $r \in (c, \infty)$ , entonces:

$$\Rightarrow \int_{b+d}^c E(r) dr + \int_c^\infty E(r) dr = 0 \quad (6)$$

Podemos encontrar una expresión válida para cada intervalo usando la ley de Gauss. Para  $r \in [b + d, c]$  la carga encerrada  $Q_{\text{enc}}$  corresponde a la suma entre la carga de la esfera maciza, la carga de la cara interior, y la carga de la cara exterior del cascarón conductor, tal como se puede ver en la siguiente figura:



<sup>2</sup>Es decir,  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ .

Entonces:

$$Q_{\text{enc}} = Q + Q_1 + Q_2$$

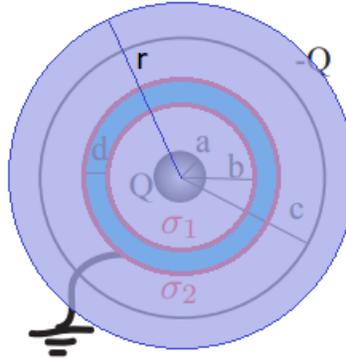
Usando el resultado (4) del cálculo anterior se tiene que:

$$\Rightarrow Q_{\text{enc}} = Q_2$$

Tomando en cuenta esto y la simetría esférica, al aplicar la ley de Gauss para  $r \in [b + d, c]$  se tiene lo siguiente:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} ; r \in [b + d, c] \quad (7)$$

Para  $r \in (c, \infty)$  la carga encerrada  $Q_{\text{enc}}$  es la carga que consideramos anteriormente, más la carga  $-Q$  del conductor de grosor despreciable, tal como se muestra en la siguiente figura:



Entonces:

$$Q_{\text{enc}} = Q + Q_1 + Q_2 - Q \Rightarrow Q_{\text{enc}} = Q_2 - Q$$

Tomando en cuenta esto y la simetría esférica, al aplicar la ley de Gauss para  $r \in (c, \infty)$  se tiene lo siguiente:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_2 - Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_2 - Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} ; r \in (c, \infty) \quad (8)$$

Entonces, reemplazando las expresiones (7) y (8) en las integrales mostradas en (6), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{b+d}^c \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_c^\infty \frac{Q_2 - Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr &= 0 \Rightarrow \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{b+d}^c + \frac{Q_2 - Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_c^\infty = 0 \\ \Rightarrow \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(b+d)} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} &= 0 \Rightarrow Q_2 = \frac{b+d}{c} Q \end{aligned}$$

Recordamos que la carga exterior del cascarón conductor puede escribirse como  $Q_2 = 4\pi(b+d)^2\sigma_2$ , ya que esta está distribuida de manera uniforme, entonces:

$$\Rightarrow 4\pi(b+d)^2\sigma_2 = \frac{b+d}{c}Q \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi c(b+d)}}$$

Podemos notar que si  $c \rightarrow \infty$  entonces esta densidad de carga superficial se va a cero, lo cual tiene sentido, ya que el cascarón exterior de carga  $-Q$  es el que induce una carga en la cara exterior del cascarón conductor, y mientras más lejos esté, menos intenso es su efecto sobre el material conductor.