

FI2002-6 Electromagnetismo.

Profesor: Marcel G. Clerc.

Auxiliares: Pedro Aguilera, Roberto Gajardo.



Desarrollo Auxiliar 3: Ley de Gauss.

29 de Agosto del 2022

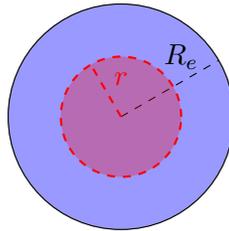
P1. Cilindro y esfera macizos:

Sabemos que el campo eléctrico del cilindro y de la esfera pueden calcularse de forma relativamente sencilla usando la ley de Gauss, sin embargo, en el caso del sistema combinado usar la ley de Gauss no es algo directo, ya que no tenemos simetría de ningún tipo. Lo que se hace en este tipo de casos es usar la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico del cilindro y de la esfera por separado (usando un sistema de referencia conveniente en cada caso), y luego sumarlos para obtener el campo total en virtud del principio de superposición. Ahora, es importante entender que cuando sumamos los campos de cada elemento del sistema, la respuesta estará completa sólo si estos campos se escriben con un sistema de coordenadas y un sistema de referencia en común.

Partimos por calcular el campo eléctrico de la esfera de radio R_e y densidad de carga ρ_e . Usaremos coordenadas esféricas r , θ y ϕ con origen en el centro de la esfera, y aplicaremos la ley de Gauss para el caso de simetría esférica, por lo tanto $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ y $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta)d\phi d\theta \hat{r}$. Cuando desarrollamos la ley de Gauss en estos casos tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E(r)\hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta)d\phi d\theta \hat{r} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow r^2 E(r) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta \right) &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1)$$

Ya que es una esfera maciza, el campo eléctrico dentro y fuera de esta tendrá un comportamiento distinto, por lo tanto debemos considerar el caso $r \leq R_e$ (dentro de la esfera) y el caso $r > R_e$ (fuera de la esfera) por separado. En el caso $r \leq R_e$ usamos como superficie gaussiana una esfera de radio r , como la que se muestra en la siguiente figura:



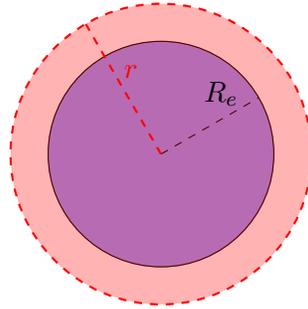
Como la densidad de carga ρ_e es uniforme, entonces podemos obtener la carga encerrada Q_{enc} por la esfera roja multiplicando esta densidad por el volumen. Entonces:

$$Q_{\text{enc}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e \quad (2)$$

Con esto, y usando la expresión (1), se tiene lo siguiente:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi r^3 \rho_e}{3\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_e r}{3\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_e r}{3\epsilon_0} \hat{r} ; r \leq R_e$$

Para el caso $r > R_e$ la superficie gaussiana encierra el total de la carga de la esfera, tal como se muestra en la siguiente figura:



La carga encerrada se puede obtener reemplazando $r = R_e$ en la expresión (2) (ya que eso corresponde a integrar en toda la esfera), entonces:

$$Q_{\text{enc}} = \frac{4}{3}\pi R_e^3 \rho_e$$

Con esto, y usando la expresión (1), se tiene lo siguiente:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi R_e^3 \rho_e}{3\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_e R_e^3}{3\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_e R_e^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} ; r > R_e$$

En resumen, el campo eléctrico \vec{E}_e de la esfera cumple lo siguiente:

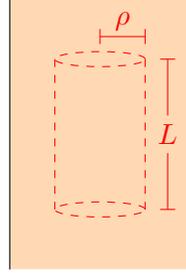
$$\vec{E}_e(r) = \begin{cases} \frac{\rho_e r}{3\epsilon_0} \hat{r} & ; \text{ Dentro de la esfera} \\ \frac{\rho_e R_e^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} & ; \text{ Fuera de la esfera} \end{cases} \quad (3)$$

Ahora calculamos el campo eléctrico del cilindro infinito de radio R_c y densidad de carga ρ_c . Usaremos coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z con origen en algún punto del eje de simetría del cilindro, y aplicaremos la ley de Gauss para el caso de simetría axial, por lo tanto $\vec{E} = E(\rho)\hat{\rho}$ y $d\vec{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho}$. A pesar de que el cilindro es infinito, para el caso de la ley de Gauss usamos como superficie gaussiana el manto de un cilindro de radio ρ y longitud L (finita), y entonces al desarrollar la ley de Gauss se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^L E(\rho)\hat{\rho} \cdot \rho d\phi dz \hat{\rho} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \rho E(\rho) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^L dz \right) &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2\pi\rho L E(\rho) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (4)$$

Ya que es un cilindro macizo, el campo eléctrico dentro y fuera de este tendrá un comportamiento distinto, por lo tanto debemos considerar el caso $\rho \leq R_c$ (dentro del cilindro) y el caso $\rho > R_c$ (fuera del cilindro) por separado. En el caso $\rho \leq R_c$ usamos como superficie gaussiana un cilindro de radio ρ y largo L , como la que se muestra en la figura de la siguiente página. Como la densidad de carga ρ_c es uniforme, entonces podemos obtener la carga encerrada Q_{enc} por el cilindro gaussiano multiplicando esta densidad por el volumen del cilindro. Entonces:

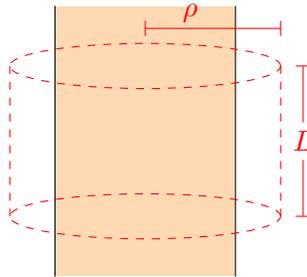
$$Q_{\text{enc}} = \pi\rho^2 L \rho_c \quad (5)$$



Con esto, y usando la expresión (4), se tiene lo siguiente:

$$2\pi\rho LE(\rho) = \frac{\pi\rho^2 L\rho_c}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(\rho) = \frac{\rho_c\rho}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\rho) = \frac{\rho_c\rho}{2\varepsilon_0} \hat{\rho} \ ; \ \rho \leq R_c$$

Para el caso $\rho > R_c$ la superficie gaussiana encierra el total de la carga de un cilindro de largo L y radio R_c , tal como se muestra en la siguiente figura:



La carga encerrada se puede obtener reemplazando $\rho = R_c$ en la expresión (5), entonces:

$$Q_{\text{enc}} = \pi R_c^2 L \rho_c$$

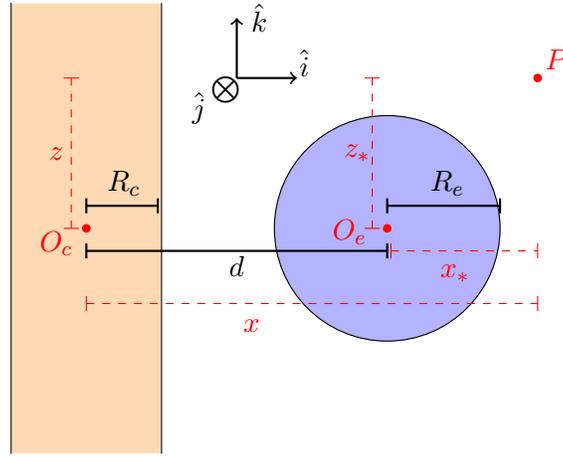
Usando esto y la expresión (4) se tiene lo siguiente:

$$2\pi\rho LE(\rho) = \frac{\pi R_c^2 L \rho_c}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(\rho) = \frac{\rho_c R_c^2}{2\varepsilon_0 \rho} \Rightarrow \vec{E}(\rho) = \frac{\rho_c R_c^2}{2\varepsilon_0 \rho} \hat{\rho} \ ; \ \rho > R_c$$

En resumen, el campo eléctrico \vec{E}_c del cilindro cumple lo siguiente:

$$\vec{E}_c(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho_c \rho}{2\varepsilon_0} \hat{\rho} & ; \text{ Dentro del cilindro} \\ \frac{\rho_c R_c^2}{2\varepsilon_0 \rho} \hat{\rho} & ; \text{ Fuera del cilindro} \end{cases} \quad (6)$$

Ahora es necesario sumar los campos \vec{E}_e y \vec{E}_c para el sistema completo, el cual se muestra en la siguiente página (el punto P es donde queremos calcular el campo eléctrico). Para ambas distribuciones de carga podemos usar los mismos vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , sin embargo, al usar las expresiones (3) y (6) para los campos eléctricos debemos entender que estos campos están asociados a distancias que se miden desde orígenes distintos. La forma más simple de relacionar estas distancias es usar coordenadas cartesianas para cada objeto por separado, y luego relacionar estas coordenadas cartesianas entre si.



En este caso, para el campo \vec{E}_c la distancia radial ρ se mide desde el eje de simetría del cilindro, y la altura z se mide a lo largo de ese eje a partir del punto O_c . Tomando en cuenta esto, sean x , y y z las coordenadas cartesianas medidas desde el punto O_c , se tiene que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \hat{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\hat{i} + y\hat{j}) \quad (7)$$

Por otro lado, para el campo \vec{E}_e la distancia radial r se mide a partir del punto O_e , entonces, sean x_* , y_* y z_* las coordenadas cartesianas medidas desde ese punto, se tiene que:

$$r = \sqrt{x_*^2 + y_*^2 + z_*^2} \quad ; \quad \hat{r} = \frac{1}{\sqrt{x_*^2 + y_*^2 + z_*^2}}(x_*\hat{i} + y_*\hat{j} + z_*\hat{k})$$

Ahora, si la línea que une a los puntos O_c y O_e está alineada con el eje x , entonces es directo ver que $y_* = y$ y $z_* = z$ (esto último puede verse directamente en la figura anterior). Por otro lado, podemos notar que $x = d + x_*$, de tal forma que $x_* = x - d$. Esto nos permite escribir las cantidades asociadas a las coordenadas esféricas de la esfera en coordenadas cartesianas con un origen común al del cilindro:

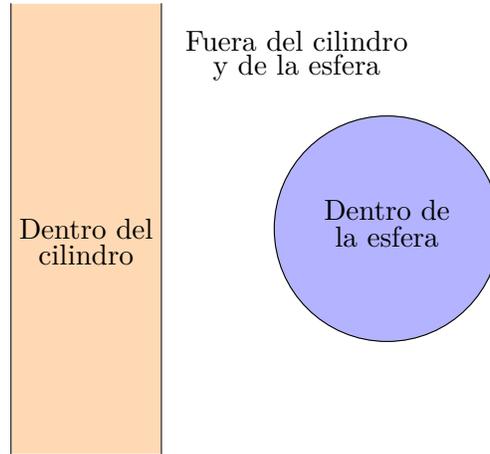
$$r = \sqrt{(x - d)^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad \hat{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - d)^2 + y^2 + z^2}}((x - d)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad (8)$$

Con las expresiones (7) y (8) podemos reescribir los campos \vec{E}_e y \vec{E}_c con un sistema de coordenadas común, entonces:

$$\vec{E}_e(r) = \begin{cases} \frac{\rho_e}{3\epsilon_0}((x - d)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) & ; \text{ Dentro de la esfera} \\ \frac{\rho_e R_e^3}{3\epsilon_0((x - d)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}((x - d)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) & ; \text{ Fuera de la esfera} \end{cases}$$

$$\vec{E}_c(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho_c}{2\epsilon_0}(x\hat{i} + y\hat{j}) & ; \text{ Dentro del cilindro} \\ \frac{\rho_c R_c^2}{2\epsilon_0(x^2 + y^2)}(x\hat{i} + y\hat{j}) & ; \text{ Fuera del cilindro} \end{cases}$$

Ahora que los campos están escritos con un sistema de coordenadas común, podemos sumarlos directamente para encontrar el campo eléctrico en todo el espacio. Para lograr esto, debemos entender que la configuración completa tiene tres zonas importantes:



Entonces, al sumar los campos \vec{E}_e y \vec{E}_c debemos considerar estas tres zonas, y notar cuál expresión usar para los campos en cada caso. Por ejemplo, en el caso neto dentro del cilindro debemos considerar el campo que el propio cilindro genera en su interior, más el campo que la esfera genera en su exterior, entonces:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\rho_c}{2\epsilon_0}(x\hat{i} + y\hat{j}) + \frac{\rho_e R_e^3((x-d)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{3\epsilon_0((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \text{Dentro del cilindro}$$

De forma similar, en el caso neto dentro de la esfera debemos considerar el campo que la propia esfera genera en su interior, más el campo que el cilindro genera en su exterior, entonces:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\rho_c R_c^2(x\hat{i} + y\hat{j})}{2\epsilon_0(x^2 + y^2)} + \frac{\rho_e}{3\epsilon_0}((x-d)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad ; \quad \text{Dentro de la esfera}$$

Por último, el caso neto en el espacio sin carga corresponde a la suma del campo que cada objeto genera en su exterior, es decir:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\rho_c R_c^2(x\hat{i} + y\hat{j})}{2\epsilon_0(x^2 + y^2)} + \frac{\rho_e R_e^3((x-d)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{3\epsilon_0((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \text{Fuera del cilindro y de la esfera}$$

En resumen, el campo eléctrico en todo el espacio es:

$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\rho_c}{2\epsilon_0}(x\hat{i} + y\hat{j}) + \frac{\rho_e R_e^3((x-d)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{3\epsilon_0((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} & ; \quad \text{Dentro del cilindro} \\ \frac{\rho_c R_c^2(x\hat{i} + y\hat{j})}{2\epsilon_0(x^2 + y^2)} + \frac{\rho_e}{3\epsilon_0}((x-d)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) & ; \quad \text{Dentro de la esfera} \\ \frac{\rho_c R_c^2(x\hat{i} + y\hat{j})}{2\epsilon_0(x^2 + y^2)} + \frac{\rho_e R_e^3((x-d)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{3\epsilon_0((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} & ; \quad \text{Fuera del cilindro y de la esfera} \end{cases}$$

P2. Esfera con carga no uniforme:

Tenemos la siguiente densidad de carga no uniforme:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \cos(kr)}{r^2} & ; \quad 0 \leq r \leq R \\ 0 & ; \quad r > R \end{cases} \quad (9)$$

En esta expresión, r da cuenta de la distancia radial medida desde el centro de la esfera, mientras que ρ_0 y k son parámetros conocidos. Como la densidad de cargas tiene simetría esférica, entonces podemos aplicar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico. La ley de Gauss dice que el flujo de campo eléctrico \vec{E} a través de una superficie cerrada S es directamente proporcional a la carga eléctrica Q_{enc} encerrada por dicha superficie, es decir:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \quad (10)$$

Para distribuciones de carga que tengan alguna simetría espacial, el campo eléctrico generado por ellas debe cumplir ciertas propiedades asociadas a esa simetría, y en ciertos casos esas propiedades son tales que nos permiten despejar la magnitud del campo eléctrico a partir del lado izquierdo de la ley de Gauss. Por ejemplo, en los casos con simetría esférica¹ el campo eléctrico sólo puede depender de la distancia radial r , y sólo puede apuntar en la dirección radial \hat{r} , es decir, $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$. Ahora, si calculamos el flujo de un campo eléctrico con esta forma, la superficie ideal para hacerlo es la de una esfera, ya que esta nos permite atrapar el máximo flujo posible. Tomando en cuenta eso, en los casos con simetría esférica la integral del lado izquierdo de la ley de Gauss se calcula sobre la superficie de una esfera de radio r , con lo cual se tiene $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta \hat{r}$, donde $\phi \in [0, 2\pi]$ y $\theta \in [0, \pi]$, y así:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E(r)\hat{r}) \cdot (r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta \hat{r}) \Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = r^2 E(r) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\phi d\theta$$

En el último paso se sacó el factor $r^2 E(r)$ de la integral ya que sólo se integra con respecto a ϕ y θ . Al resolver la integral se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= r^2 E(r) \left(\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) = r^2 E(r) (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) (2\pi) \\ &\Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando este resultado en la expresión (10) para la ley de Gauss, encontramos una expresión que nos permite despejar la magnitud $E(r)$ del campo eléctrico en los casos de simetría esférica:

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \quad (11)$$

¹La simetría esférica puede identificarse en aquellos casos donde la densidad de carga volumétrica ρ depende a lo más de la distancia radial r (medida desde el origen). Físicamente, esta simetría nos dice que la distribución de cargas se ve exactamente igual desde cualquier ángulo que se le vea.

Ahora, el término Q_{enc} corresponde a la carga encerrada por la esfera gaussiana de radio r , la cual podemos calcular integrando la densidad de carga ρ en el volumen de esta esfera. Usaremos r' , θ y ϕ como coordenadas esféricas para la integral, de tal forma que $r' \in [0, r]$, $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$. Por otro lado, como se usan coordenadas esféricas el diferencial de volumen es $dV = (r')^2 \sin(\theta) dr' d\theta d\phi$, y la densidad de carga a usar es la expresión (9) (recordando que se usa r' como coordenada radial). Entonces:

$$Q_{\text{enc}} = \iiint \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(r')(r')^2 \sin(\theta) dr' d\theta d\phi$$

Como la densidad de carga ρ es distinta en distintas zonas del espacio, debemos dividirnos en casos. Primero, en el caso $r \leq R$ usamos sólo la primera parte de la definición de ρ mostrada en (9), entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q_{\text{enc}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \frac{\rho_0 \cos(kr')}{(r')^2} (r')^2 \sin(\theta) dr' d\theta d\phi \\ \Rightarrow Q_{\text{enc}} &= 4\pi\rho_0 \int_0^r \cos(kr') dr' \Rightarrow Q_{\text{enc}} = \frac{4\pi\rho_0}{k} \sin(kr) \quad ; \quad r \leq R \end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en (11) y desarrollando, seremos capaces de encontrar el campo eléctrico en el caso $r \leq R$:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0 k} \sin(kr) \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k r^2} \sin(kr) \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k r^2} \sin(kr) \hat{r} \quad ; \quad r \leq R$$

Ahora, para el caso $r > R$, se tiene que $\rho(r) = 0$ en la zona fuera de la esfera cargada, por lo tanto la integral asociada a la variable radial en el cálculo de Q_{enc} sólo llega a $r = R$, entonces:

$$\begin{aligned} Q_{\text{enc}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(r')(r')^2 \sin(\theta) dr' d\theta d\phi \\ \Rightarrow Q_{\text{enc}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho_0 \cos(kr')}{(r')^2} (r')^2 \sin(\theta) dr' d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^r 0 (r')^2 \sin(\theta) dr' d\theta d\phi \\ \Rightarrow Q_{\text{enc}} &= 4\pi\rho_0 \int_0^R \cos(kr') dr' \Rightarrow Q_{\text{enc}} = \frac{4\pi\rho_0}{k} \sin(kR) \quad ; \quad r > R \end{aligned}$$

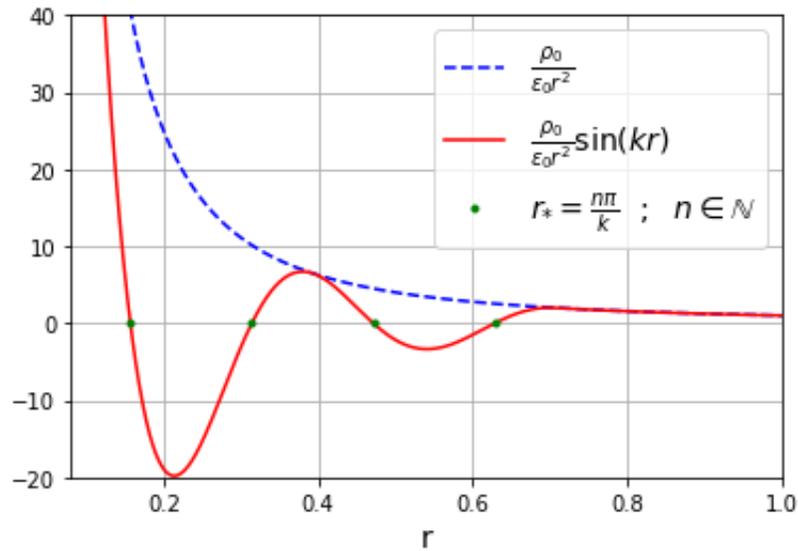
Reemplazando esta expresión en (11) y desarrollando, seremos capaces de encontrar el campo eléctrico en el caso $r > R$:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0 k} \sin(kR) \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k r^2} \sin(kR) \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k r^2} \sin(kR) \hat{r} \quad ; \quad r > R$$

Entonces, el campo eléctrico generado por la distribución de cargas es:

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k r^2} \sin(kr) \hat{r} & ; \quad r \leq R \\ \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k r^2} \sin(kR) \hat{r} & ; \quad r > R \end{cases}$$

Podemos notar que para $r \leq R$ el campo tiene un comportamiento que decae a la vez que oscila, y que además diverge cuando $r \rightarrow 0$. Además, como en esa zona el campo eléctrico es proporcional a $\sin(kr)$, eso nos dice que en los puntos $r_* = \frac{n\pi}{k}$ (con $n \in \mathbb{N}$ y $r_* < R$) el campo se hará cero². Para el caso $r > R$ el comportamiento oscilatorio se rompe, obteniendo nuevamente un campo que decae a cero cuando $r \rightarrow \infty$, lo cual tiene sentido ya que cualquier distribución de cargas con simetría esférica debe comportarse como una carga puntual en las zonas del espacio fuera de ella. Todo lo mencionado puede apreciarse en el siguiente gráfico, donde $\rho_0 = \varepsilon_0 = 1$, $k = 20$ y $R = 0,7$:



²Recordar que $\sin(x) = 0$ cuando $x = n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$ (en la pregunta usamos $n \in \mathbb{N}$ ya que $r \geq 0$).