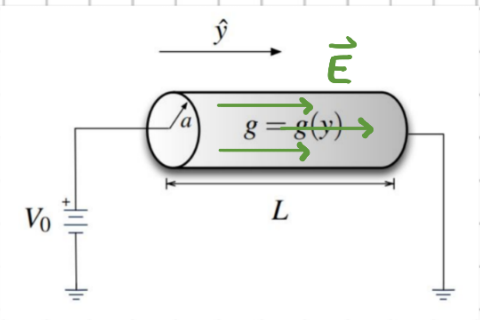
P1// Dada la geometría del problema, sabemos que la diferencia de potencial impuesta sobre el cilindro genera un campo $\vec{E}$ (y por tanto $\vec{J}$) que sólo tendrá componente en y. Es decir:



$$\vec{E} = E(y)\hat{y} \qquad \vec{J} = J(y)\hat{y} = g(y)J(y)\hat{y}$$

Luego, como en el sistema no está entrando ni saliendo carga (se mueven pero dentro), se cumple la ecuación de continuidad:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

Como $\vec{J} = J(y)\hat{y}$, entonces $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{\partial}{\partial y}J(y) = 0$. Resolviendo resulta:

$$\vec{J}(y) = C\hat{y}$$

Donde C es una constante por determinar. Para esto, planteamos el potencial y su relación con el campo eléctrico.

$$\Delta V = V(0) - V(L) = V_0 = -\int_L^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^L \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Por ley de Ohm local, sabemos que $\vec{E} = \vec{J}/g = \vec{J}/g_0(1+y/L)$. Luego:

$$V_0 = \int_0^L \frac{C\hat{y}}{g_0(1+y/L)}\cdot dy\hat{y} \qquad u = 1 + y/L \quad dy = L\,du \qquad y=0 \rightarrow u=1 \quad y=L \rightarrow u=2$$

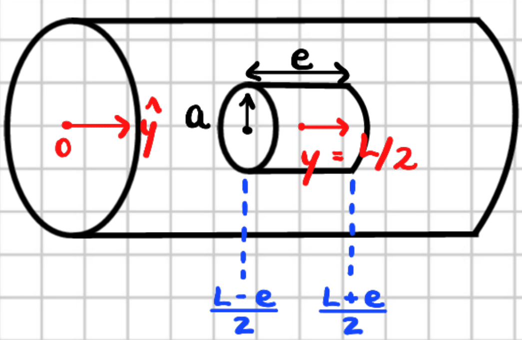
$$V_0 = \frac{CL}{g_0}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{CL}{g_0}\ln(2)$$

$$\therefore C = \frac{V_0 g_0}{L\cdot\ln(2)}$$

Sabiendo el valor de C, tenemos $\vec{J}$ y $\vec{E}$:

$$\vec{J} = \frac{V_0 g_0}{L\cdot\ln(2)}\hat{y} \qquad \vec{E}(y) = \frac{V_0}{L\cdot\ln(2)\cdot(1+y/L)}\hat{y} //$$

b) Tenemos lo siguiente:



La fórmula de potencia disipada es:

$$P = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$$

Donde V es el volumen del objeto donde se generan pérdidas, que en este caso es el disco de radio a y espesor e.

Entonces los límites de integración serán los del disco:

$$P = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{\frac{L-e}{2}}^{\frac{L+e}{2}} \frac{V_0}{\ln(2)(y+L)} \hat{y} \cdot \frac{V_0 \varrho_0}{L \cdot \ln(2)} \hat{y} \; r dr d\theta dy$$

$$P = \underbrace{\int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta}_{\text{Área tapa del disco}} \int_{\frac{L-e}{2}}^{\frac{L+e}{2}} \frac{V_0^2 \varrho_0}{L \ln(2)^2} \cdot \frac{dy}{(y+L)} = \pi a^2 \frac{V_0^2 \varrho_0}{L \ln(2)^2} \int_{\frac{L-e}{2}}^{\frac{L+e}{2}} \frac{dy}{(y+L)}$$

$$P = \pi a^2 \frac{V_0^2 \varrho_0}{L \ln(2)^2} \int_{\frac{3L-e}{2}}^{\frac{3L+e}{2}} \frac{du}{u} = \pi a^2 \frac{V_0^2 \varrho_0}{L \ln(2)^2} \cdot \ln\left(\frac{3L+e}{3L-e}\right)$$