P1

a) Para calcular la carga total del problema usaremos el mismo procedimiento para calcular el lado derecho de la ley de gauss, como se trata de una esfera usaremos coordenadas esféricas:

$$Q = \iiint_V \rho(r)\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{R}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r^2\, dr$$

$$= 4\pi\rho_0 \int_0^{R} r^2 - \frac{r^4}{R^2}\, dr$$

$$= 4\pi\rho_0\left[\int_0^{R} r^2\, dr - \int_0^{R}\frac{r^4}{R^2}\, dr\right]$$

$$= 4\pi\rho_0\left[\frac{R^3}{3} - \frac{1}{\cancel{R^2}}\cdot\frac{\cancel{R^5}^{\,3}}{5}\right] \Big/ \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{5} = \frac{5R^3 - 3R^3}{15} = \frac{2R^3}{15}$$

$$\boxed{Q = 4\pi\rho_0\cdot\frac{2R^3}{15} = \frac{8}{15}\pi R^3\rho_0}$$

b) Notamos que al ser una esfera con carga uniforme, existe simetría esférica, por lo que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Procedemos a calcular el campo por ley de gauss:

$r < R$: $$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 4\pi\rho_0\left[\int_0^{r} r^2\, dr - \int_0^{r}\frac{r^4}{R^2}\, dr\right]$$ / Hasta análogo a la parte anterior

$$= 4\pi\rho_0\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right]$$

$$\Rightarrow \oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E(r)$$ / Igual para ambas zonas

$$\Rightarrow \cancel{4}\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r<R) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right]\hat{r}}$$

$r>R$: $Q_{enc} = Q = \frac{8}{15}\pi R^3\rho_0$ / Aquí ya encerramos toda la carga Q

$$\Rightarrow \cancel{4}\cancel{\pi} r^2 E(r) = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cancel{\pi} R^3\rho_0}{15\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r>R) = \frac{2R^3\rho_0}{15\varepsilon_0 r^2}}$$

c) Para calcular el utilizamos que $V(r) - \cancel{V(\infty)}^{0} = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$:

$r>R$: $$V(r>R) = -\int_\infty^r \frac{2R^3\rho_0}{15\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$\boxed{V(r>R) = \frac{2R^3\rho_0}{15\varepsilon_0 r}}$$

$r<R$: $$V(r<R) = \underbrace{-\int_R^r E(r<R)\,dr}_{I_1} \underbrace{- \int_\infty^R E(r>R)\,dr}_{I_2}$$

$$I_2 = -\int_{\infty}^{R} E(r>R)\,dr = V(R) = \frac{2R^{\cancel{3}\,2}\rho_0}{15\varepsilon_0 \cancel{R}} = \frac{2R^2\rho_0}{15\varepsilon_0}$$

$$I_1 = -\int_{R}^{r} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right] dr$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\int_{R}^{r} \frac{r^3}{5R^2}\,dr - \int_{R}^{r} \frac{r}{3}\,dr\right]$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{(r^4 - R^4)}{20R^2} + \frac{(R^2 - r^2)}{6}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r<R) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{(r^4 - R^4)}{20R^2} + \frac{(R^2 - r^2)}{6}\right] + \frac{2R^2\rho_0}{15\varepsilon_0}}$$

d) Calculamos el vector desplazamiento con la ley de gauss, pero recordando que dependiendo de donde nos paramos en θ es si tenemos un D u otro:

$$Q_{lib} = Q = \frac{8}{15}\pi R^3 \rho_0$$

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} D_2\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} D_1\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= 2\pi r^2 (D_2 + D_1)$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\cancel{\pi} r^2 (D_2 + D_1) = \frac{\cancel{8}\,4}{15}\cancel{\pi} R^3 \rho_0$$

$$\Rightarrow D_2 + D_1 = \frac{4R^3\rho_0}{15 r^2}$$

Notamos que nos está faltando una ecuación, por lo que usaremos las condiciones de borde, para este caso notamos que en la interfaz entre los dieléctricos, la normal apunta hacia $\hat{k}$, mientras que la tangente apunta en $\hat{r}$, por lo que nos será más útil la C.B $E_{1,t} = E_{2,t}$.

$$E_{1,t} = E_{2,t} \Rightarrow E_1 = E_2 \quad / \text{ Campo está completamente en } \hat{r}$$

$$\Rightarrow \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2} \Rightarrow D_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2$$

Reemplazamos esto en la ecuación anterior:

$$D_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2 = \frac{4R^3\rho_0}{15r^2}$$

$$\Rightarrow D_2\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{4R^3\rho_0}{15r^2} \quad / \quad 1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_2}$$

$$\Rightarrow \vec{D}_2 = \frac{4R^3\rho_0\,\varepsilon_2}{15r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2} = \frac{4R^3\rho_0\,\hat{r}}{15r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\Rightarrow \vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\vec{D}_2 = \frac{4R^3\rho_0\,\varepsilon_1}{15r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} = \frac{4R^3\rho_0\,\hat{r}}{15r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

Comprobando que se cumple la condición de borde.

e) Calculamos el vector $\vec{P}$ como $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$:

$$\Rightarrow \vec{P}_1 = \frac{4R^3 \rho_0 \varepsilon_1}{15 r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r} - \frac{4R^3 \rho_0 \varepsilon_0}{15 r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r} = \frac{4R^3 \rho_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{15 r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r}$$

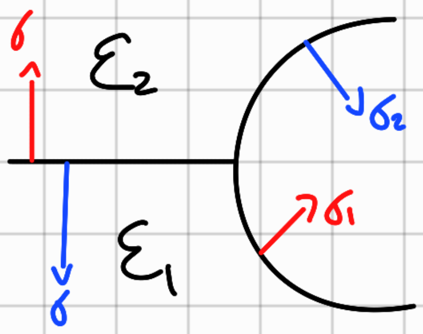
$$\Rightarrow \vec{P}_2 = \frac{4R^3 \rho_0 \varepsilon_2}{15 r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r} - \frac{4R^3 \rho_0 \varepsilon_0}{15 r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r} = \frac{4R^3 \rho_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{15 r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \hat{r}$$

Ahora comenzamos calculando las densidades volumetricas que recordemos se calculan como $\rho = -\nabla \cdot \vec{P}$:

$$\Rightarrow -\nabla \cdot \vec{P}_1 = -\frac{\partial (r^2 V)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{4R^3 \rho_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{15 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \right) = 0 = \rho_1$$

$$\Rightarrow -\nabla \cdot \vec{P}_2 = -\frac{\partial (r^2 V)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{4R^3 \rho_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{15 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \right) = 0 = \rho_2$$

Ahora finalmente para las densidades de superficie identificamos las normales y calculamos como $\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n}$:



$$\sigma_1 = P_1 \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = \frac{4R^3 \rho_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)}{15 r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\sigma_2 = P_2 \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = \frac{4R^3 \rho_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_2)}{15 r^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

En rigurosidad tenemos también las densidades de carga σ y σ, pero estas apuntan en $\hat{k}$ y $-\hat{k}$, por lo que en coordenadas esfericas puede ser un calculo algo engorroso, por lo que su cálculo será omitido, basta con mencionar que estas existen.

P2

Calculamos el momento dipolar de la nueva configuración

$$\vec{p}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \int dq(\vec{r}_1\,')\,\vec{r}_1\,' + \int dq(\vec{r}_2\,')\,\vec{r}_2\,'$$

$$= \int_0^L \lambda(z)dz \cdot z\hat{z} + \int_{-L}^0 -\lambda(z)dz \cdot z\hat{z}$$

$$= \alpha\left[\int_0^L z^2 dz - \int_{-L}^0 z^2 dz\right]\hat{z}$$

$$= \alpha\left(\frac{z^3}{3}\Big|_0^L - \frac{z^3}{3}\Big|_{-L}^0\right) = \frac{2\alpha}{3}L^3\hat{z}$$

Para obtener los componentes monopolares y dipolares del potencial, usamos los siguientes fórmulas:

$V_{mono}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, donde Q es la carga total del sistema. En este caso, como son 2 "polos" de mismas dimensiones pero cargas opuestas, la carga neta es 0.

$$V_{dip}(r) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}^{\,\to r\hat{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{2\alpha}{3}L^3\hat{z}\cdot r\left(\sin\cancel{(\theta)\cos}(\varphi)\hat{x} + \sin(\theta)\cancel{\sin}(\varphi)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z}\right)\right)$$

$$V_{dip}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\frac{2\alpha}{3}L^3\cdot r\cos(\theta) = \frac{\alpha L^3}{6\pi\varepsilon_0 r^2}\cos(\theta)$$

Luego el potencial total es:

$$V(r) = V_{mono} + V_{dip} = \frac{\alpha L^3}{6\pi\varepsilon_0 r^2}\cos(\theta)$$

Recordemos θ es el ángulo azimutal, por lo que, si nos centramos en un punto en el plano xy, $\theta = \pi/2 \rightarrow \cos(\theta) = 0 \rightarrow V(\vec{r}) = 0$, lo cual se debía cumplir dado el planteamiento inicial del problema.

Para calcular el campo eléctrico, usamos la expresión:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\frac{2\alpha L^3 \cancel{r}\cos(\theta)\cdot \cancel{r}\hat{r}}{\cancel{r^2}} - \frac{2}{3}\alpha L^3\hat{z}\right)$$

Siguiendo con el desarrollo, se tiene el campo en el espacio trabajado en coordenadas cartesianas. Para obtener $\sigma(x,y)$, se aplica la condición de borde para conductores ($\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}|_{borde} \cdot \hat{n}$).