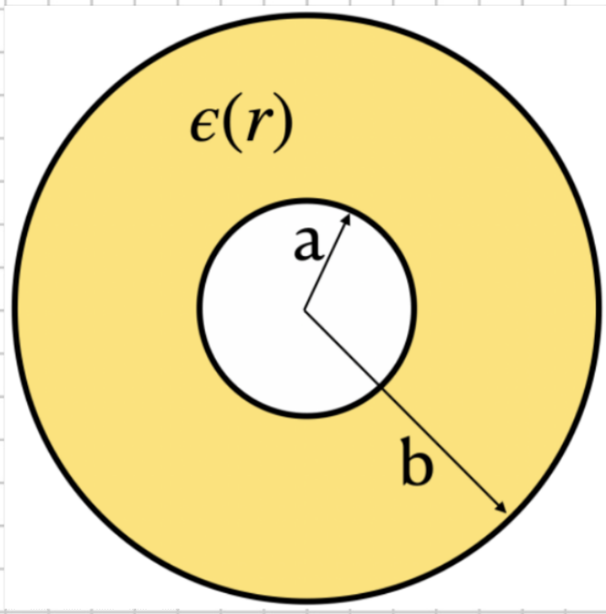
P1// Dada la indicación, planteamos las ecuaciones que satisfacen lo pedido:



$$\varepsilon(r=a) = m + n/a^2 = \varepsilon_0$$
$$\varepsilon(r=b) = m + n/b^2 = \varepsilon_1$$

Igualando m:

$$\varepsilon_0 - n/a^2 = \varepsilon_1 - n/b^2 \leftrightarrow n(1/b^2 - 1/a^2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$$

$$\therefore n = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)a^2b^2}{a^2 - b^2} \;//$$

Reemplazando en alguna expresión:

$$m = \varepsilon_0 - n/a^2 = \varepsilon_0 - \frac{1}{\cancel{a^2}} \cdot \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\cancel{a^2}b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\varepsilon_0 a^2 - \cancel{\varepsilon_0 b^2} - \varepsilon_1 b^2 + \cancel{\varepsilon_0 b^2}}{a^2 - b^2} = \frac{\varepsilon_0 a^2 - \varepsilon_1 b^2}{a^2 - b^2} \;//$$

b) Supongamos el conductor interno tiene una carga libre Q. Por simetría esférica se tendrá $\vec{D} = D(r)\hat{r}$. Por Gauss, para $a < r < b$:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad \rightarrow \quad 4\pi r^2 D(r) = Q \quad \rightarrow \quad \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Como es un dieléctrico lineal, $\vec{D} = \varepsilon(r)\vec{E}$. Luego:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon(r)}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi r^2 (m + n/r^2)}\hat{r}$$

La diferencia de potencial entre las placas será:

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{mr^2 + n} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{m}\int_a^b \frac{dr}{r^2 + n/m}$$

$$* \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan(x/a)$$

$$V(a) - V(b) = \frac{Q}{4\pi m} \cdot \sqrt{\frac{n}{m}}\left(\arctan\left(b \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}\right) - \arctan\left(a \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}\right)\right)$$

La capacidad del sistema será:

$$C \underset{*}{=} Q/\Delta V = 4\pi m \cdot \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \left(\arctan\left(b \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}\right) - \arctan\left(a \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}\right)\right)^{-1} //$$

c) Para un dieléctrico lineal se tiene:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \wedge \quad \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)\vec{E} = \varepsilon(r)\vec{E}$$ *por lineal

Luego $\varepsilon(r) = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \rightarrow \varepsilon_0 \chi_e = \varepsilon(r) - \varepsilon_0$. Así se puede trabajar con $\vec{P}$.

$$\vec{P} = (\varepsilon(r) - \varepsilon_0)\vec{E} = (\varepsilon(r) - \varepsilon_0)\cdot \vec{D}/\varepsilon(r) = (1 - \varepsilon_0/\varepsilon(r))\cdot \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

En interfaces se tiene $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$, con $\hat{n}$ la normal que sale del dieléctrico.
Vemos cada superficie:

$r = a \rfloor \quad \sigma_{p,a} = \vec{P}(r=a)\cdot(-\hat{r}) = (1 - \cancel{\varepsilon_0/}\varepsilon_0)\cdot \frac{Q}{4\pi a^2}\hat{r}\cdot -\hat{r} = 0$

$r = b \rfloor \quad \sigma_{p,b} = \vec{P}(r=b)\cdot\hat{r} = (1 - \varepsilon_0/\varepsilon_1)\cdot \frac{Q}{4\pi b^2}\hat{r}\cdot\hat{r} = (1 - \varepsilon_0/\varepsilon_1)\cdot \frac{Q}{4\pi b^2}$

Dado que ahora sabemos $\Delta V = V_0$, reemplazamos $Q = C\cdot V_0$:

$$\therefore \sigma_{p,b} = (1 - \varepsilon_0/\varepsilon_1)\cdot \frac{V_0 m}{b^2}\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\left(\arctan\left(b\cdot\sqrt{\frac{m}{n}}\right) - \arctan\left(a\cdot\sqrt{\frac{m}{n}}\right)\right)^{-1} //$$

P2

a) Para comenzar este problema debemos calcular el momento dipolar del aro, para lo cual notamos que la carga se encuentra distribuida continua y uniformemente por el aro, por lo que ocuparemos la fórmula para cargas continuas del momento dipolar:

$$\vec{P} = \int dq' \cdot \vec{r}\,'$$

Entonces, lo que queda ahora es simplemente encontrar que vale cada componente y luego calcular la integral:

$$dq' = \lambda(\phi) R\, d\phi \quad ; \quad \vec{r}\,' = R\hat{r}$$

donde $\vec{r}\,'$ es donde está la carga en el espacio y $\lambda(\phi)$ la densidad que va a depender de en que mitad del aro estemos parados

$$\Rightarrow \int dq' \cdot \vec{r}\,' = \int_0^{2\pi} \lambda(\phi) R^2 d\phi\, \hat{r} \quad / \quad \hat{r} = \cos\phi\, \hat{\imath} + \operatorname{sen}\phi\, \hat{\jmath}$$

Notamos que no podemos sacar $\hat{r}$ como constante de la integral ya que este depende de ϕ, por lo cual lo convertiremos a su expresión en coordenadas cartesianas

$$\Rightarrow \vec{P} = \int_0^{2\pi} \lambda(\phi) R^2 d\phi \left(\cos\phi\, \hat{\imath} + \operatorname{sen}\phi\, \hat{\jmath} \right)$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \lambda(\phi) R^2 \cos\phi\, d\phi\, \hat{\imath}}_{P_x} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \lambda(\phi) R^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, \hat{\jmath}}_{P_y}$$

Ahora podemos calcular la integral para cada componente de $\vec{P}$ por separado

$$P_x = \int_0^{2\pi} \lambda(\phi) R^2 \cos\phi \, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \lambda R^2 \cos\phi \, d\phi + \int_{\pi}^{2\pi} (-\lambda) R^2 \cos\phi \, d\phi$$

Acá notamos que $\lambda(\phi) = \begin{cases} \lambda \, ; \, \phi \in [0,\pi] \\ -\lambda \, ; \, \phi \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$ por como está en la figura

$$= \lambda R^2 \cancel{\operatorname{sen}\phi}\Big|_0^{\pi} - \lambda R^2 \cancel{\operatorname{sen}\phi}\Big|_{\pi}^{2\pi} = 0$$

$$\Rightarrow P_x = 0$$

Calculamos ahora la otra componente:

$$P_y = \int_0^{2\pi} \lambda(\phi) R^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \lambda R^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi + \int_{\pi}^{2\pi} (-\lambda) R^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi$$

$$= -\lambda R^2 \cos\phi \Big|_0^{\pi} + \lambda R^2 \cos\phi \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= 4R^2\lambda$$

$$\therefore \boxed{\vec{P} = P_x \hat{\imath} + P_y \hat{\jmath} = 4R^2 \lambda \hat{\jmath}}$$

Ahora debemos calcular el potencial en todo el espacio, donde haremos el mismo procedimiento anterior, usaremos la formula y identificaremos cuanto vale cada componente:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Ahora $\vec{r}$ es donde queremos calcular el potencial ($\vec{r} \neq \vec{r}'$) por lo que será un punto cualquiera en el espacio ya que es lo que se pide:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow r^3 = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$$

y $\vec{P}$ es el calculado anteriormente, por lo que reemplazamos:

$$V(\vec{r}) = \frac{\cancel{4}\lambda R^3 \hat{j} \cdot (x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{\lambda R^3 y}{\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}$$

Ahora que tenemos el campo debemos simplemente evaluarlo en el plano xz $(y=0)$:

$$\boxed{V(x,0,z) = 0}$$

b) Ahora solo nos falta calcular el campo eléctrico, para esto debemos recordar que teniendo el potencial el campo simplemente es

$$\vec{E} = -\nabla V = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

Calculamos cada derivada parcial por separado:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-3\lambda R^2 xy}{\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-3\lambda R^2 xy}{\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-\lambda R^2 (x^2-2y^2+z^2)}{\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Por lo que el campo final nos queda:

$$\boxed{E(\vec{r}) = \frac{3\lambda R^2 xy}{\pi \varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\hat{i} + \frac{\lambda R^2 (x^2-2y^2+z^2)}{\pi \varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\hat{j} + \frac{3\lambda R^2 xy}{\pi \varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\hat{k}}$$