# AUX 23

P1) Las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En un medio vacío, es decir, si densidades de carga $\rho \to 0$ ni corrientes libres $\vec{J} \to 0$ (no existen cargas ni corrientes)

$$\Rightarrow \underset{(1)}{\nabla \cdot \vec{E} = 0}, \quad \underset{(2)}{\nabla \cdot \vec{B} = 0}, \quad \underset{(3)}{\nabla \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}}, \quad \underset{(4)}{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Si aplicamos rotacional a (3)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{d}{dt}\vec{B}$$

Identidad de operadores diferenciales $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

$$\nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{0\ (1)}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{d}{dt}(\nabla \times \vec{B})$$

→ La derivada temporal sale debido a que no se ve afectado por las derivadas espaciales.

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{d}{dt}(\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{d}{dt}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Ecuación de onda de medio vacío ← misma ecuación

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \mu \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

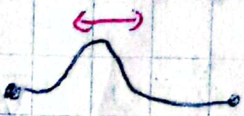
¿Si ahora probamos con $\nabla \times (\nabla \times \vec{B})$?

$$\nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{B}}_{0\ (2)}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow -\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(-\frac{d}{dt}\vec{B}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Las ecuaciones de onda tienen la forma

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 U = 0$$

Donde la constante $v$ es la velocidad de la onda



Comparando con las ecuaciones encontradas antes

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \vec{B} = 0$$

Se identifica que la velocidad de propagación de las ondas "electromagnéticas" es:

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Y si evaluamos con $\mu_0$ y $\varepsilon_0$ conocidas constantes de la naturaleza

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \underset{\text{tesla}}{T}\ \underset{\text{metros}}{m}\ A^{-1} \rightarrow \text{corriente}$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \underset{\text{coulomb}}{C^2}\ N^{-1}\ m^{-2} \quad m \rightarrow \text{metros},\ N \rightarrow \text{newton}$$

$$\Rightarrow (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} = \left((4\pi \times 10^{-7})(8.854 \times 10^{-12})\right)^{-1/2} \left(T\, m\, A^{-1} \cdot C^2 N^{-1} m^{-2}\right)^{-1/2}$$

$$(111.262 \times 10^{-19})^{-1/2}\ m\, s^{-1}$$

$$v \approx 299.796.507\ m/s \rightarrow \text{unidades de velocidad}$$

$$= 2.9 \times 10^{8}\ m/s$$

y según los experimentos de Fizeau, este valor era muy cercano a la velocidad de la luz medida

Se define como constante universal a

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 299796507 \left(\frac{m}{s}\right)$$

Más tarde se confirma que esta velocidad era de la luz *.*

• Ahora sobre la relación de dispersión, se debe resolver la ecuación de las ondas electromagnéticas.

Se propone una solución tipo onda plana

→ Una func. $f(x \pm ct)$ se desplaza a $-\hat{x}$ si es con el + y a $+\hat{x}$ si es con el −.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Donde $\vec{k}$ es el "vector de onda" este vector apunta en la dirección de propagación de la onda y su magnitud $|\vec{k}| = k$ es el "número de onda".

$|\vec{k}|$ se asocia a la longitud de onda como $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ → $k$ en unidades de $\left(\frac{1}{m}\right)$

: Característica de onda plana es que $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$

+ $\omega$ es la frecuencia angular que representa la frecuencia de oscilación de la onda ponderada por $2\pi$ radianes

→ $\omega = 2\pi f$ → $\frac{RAD}{s}$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = |\vec{k}||\vec{r}|\hat{k}\cdot\hat{r} - \omega t = k\left(r\,\hat{k}\cdot\hat{r} - \left(\frac{\omega}{k}\right)t\right)$$

→ representa una velocidad

$$k(r\,\hat{k}\cdot\hat{r} - c\,t)$$

$\frac{\omega}{k}$ es la relación de dispersión

Esto se comprueba sustituyendo la solución en la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = -i\omega\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = -i\omega\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) = (-i\omega)^2\vec{E}(\vec{r},t) = -\omega^2\vec{E}(\vec{r},t)$$

$\vec{E}(\vec{r},t) = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$, y $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E_{0x}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\hat{x} + E_{0y}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\hat{y} + E_{0z}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\hat{z}\right) + (\ ) + (\ )$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E_{0x}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}(ik_x)\hat{x} + E_{0y}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}(ik_x)\hat{y} + E_{0z}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}(ik_x)\hat{z}\right) + (\ ) + (\ )$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)(ik_x) + (\ ) + (\ ) = (-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2)\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$= -|\vec{k}|^2\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

## Sustituyendo

$$\left(v^2|\vec k|^2 - w^2\right)\vec E_0\, e^{i(\vec k\cdot\vec r - wt)} = 0$$

$$\Rightarrow\ w^2 = v^2|\vec k|^2 \to \left(\frac{w}{|\vec k|}\right)^2 = v^2 \to v = \frac{w}{k} \to w = v\cdot k$$

Relación de dispersión

Si bien tenemos $\vec E(\vec r,t)$, ¿cómo sería $\vec B(\vec r,t)$?

Usamos la ley de Faraday $\nabla\times\vec E = -\frac{\partial}{\partial t}\vec B$

Usando rotacional en cartesianas, y suponiendo que $\vec k = k\hat z$ y que $E_z$ y $B_z$ son constantes.

$$\nabla\times\vec E = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat x + \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat y = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat x - \frac{\partial B_y}{\partial t}\hat y$$

$$\to\ -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\ ,\quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$\to$ caso $\vec E = \vec E_0 e^{i(kz-wt)}$, $\vec B = \vec B_0 e^{i(kz-wt)}$

$$-E_{0y}(ik) = -B_{0x}(-iw)\qquad E_{0x}(ik) = -B_{0y}(-iw)$$

$$\hookrightarrow\ E_{0y}k = -B_{0x}w \quad y \quad E_{0x}k = B_{0y}w$$

$\vec E_0 = E_{0x}\hat x + E_{0y}\hat y + E_{0z}\hat z$

$\vec B_0 = B_{0x}\hat x + B_{0y}\hat y + B_{0z}\hat z$

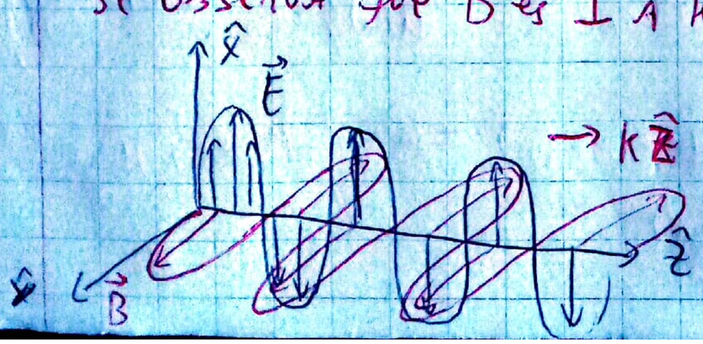
$$\to\ B_{0x} = -\frac{k}{w}E_{0y}\ ,\quad B_{0y} = \frac{k}{w}E_{0x}$$

$$\hookrightarrow\ \boxed{\vec B_0 = \frac{k}{w}\hat z\times\vec E_0}$$

O más general

$$\vec B_0 = \frac{k}{w}\left(\hat k\times\vec E_0\right) \Rightarrow \vec B(\vec r,t) = \frac{1}{c}\hat k\times\vec E(\vec r,t)$$

Se observa que $\vec B$ es $\perp$ a $\hat k$ y a $\perp\vec E$




$\to k\hat z$

ondas electromagnéticas planas monocromáticas

# Pauta Auxiliar 23

Ondas electromagnéticas

**Profesor: Claudio Arenas**
Auxiliares: Álvaro Flores y Tomás Vatel
Ayudante: Vicente Torelli

## Pregunta 1

Se estudia la transmisión de ondas electromagnéticas planas y monocromáticas (una única frecuencia) incidiendo normalmente sobre una placa neutra con conductividad $\sigma$ ($\vec{J}_l = \sigma\vec{E}$), y coincidente con el plano $xy$.
La ecuación de continuidad para la densidad de energía electromagnética es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J}_l \cdot \vec{E} \tag{1}$$

En que $u = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$ y $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

a) Integrando en un volumen finito $\Omega$, dé una interpretación física para cada uno de los términos de la ecuación (1).

b) Muestre, a partir de la ecuaciones de Maxwell, que la ecuación que describe la propagación de ondas en el medio conductor es:

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

Con $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

c) Considerando una onda incidente con frecuencia $\omega$, del tipo $\vec{E} = \hat{x}E_0 e^{j(kz-\omega t)}$, con $E_0$ real.

- Demuestre que la relación de dispersión en el conductor, es dcir la relación entre $\omega$ y $k$, es:

$$k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2\left(1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right) \tag{3}$$

- Calcule el campo magnético $\vec{B}$ en el conductor.
- Calcule el promedio temporal del flujo de energía como función de $z$. Interprete.

Respuesta:

a) Se integra en un volumen $\Omega$ la ecuación (1), entonces:

$$\iiint_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u(\vec{r},t)dv + \iiint_\Omega \nabla\cdot\vec{S} = -\iiint_\Omega \vec{J}_l(\vec{r})\cdot\vec{E}dv \rightarrow \tag{4}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\iiint_\Omega u(\vec{r},t)dv + \oiint_{\partial\Omega} \vec{S}\cdot d\vec{s} = -\iiint_\Omega \vec{J}_l(\vec{r})\cdot\vec{E}dv \tag{5}$$

Donde el primer termino resulta de intercambiar la derivada parcial temporal por la intergación en volumen y se interpreta como la disminución de la energía electromagnetica por unidad de tiempo en un volumen $\Omega$. El primer temrino del lado derecho resulta del teorema de De la divergencia el cual se interpreta como el flujo del vector de Poynting o flujo de la aneergía electromagentica por unidad de tiempo a través del superficie delimitada por el volumen $\Omega$ y el tercer segundo termino del lado derecho s erefiere a la contribución del trabjo por unida de tiempo (potencia) realizado sobre las cargas libres pertenecientes al volumen $\Omega$.

b) Utilizando la identidad vectorial $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$ sobre el campo eléctrico y usando la ley de Maxwell $\nabla\cdot\vec{E} = 0$.

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\nabla^2\vec{E} = \nabla\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{B}\right) \tag{6}$$

Donde la ultima igualdad nace de la ley de Faraday y el rotacional del campo magnetico viene dado por $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ por lo que la ecuación resulta en:

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{7}$$

Donde se utilizó que $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ y se identifica que el factor $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ donde $c$ es la velocidad de la luz en este medio conductor.

c) Si se considera una onda incidente con frecuencia $\omega$, del tipo $\vec{E} = \hat{x}E_0e^{j(kz-\omega t)}$, con $E_0$ real.

- Se calcula la termino por separado usando la defición de campo electrico anterior:

$$\nabla^2\vec{E} = \nabla^2\left(E_0e^{j(kz-\omega t)}\right)\hat{x} = E_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(e^{j(kz-\omega t)}\right)\hat{x} = -k^2E_0e^{j(kz-\omega t)}\hat{x} \tag{8}$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}E_0e^{j(kz-\omega t)}\hat{x} = -j\omega E_0e^{j(kz-\omega t)}\hat{x} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2E_0e^{j(kz-\omega t)}\hat{x} \tag{10}$$

Entonces juntado todos los términos:

$$\left(-k^2 + j\omega\sigma\mu_0 + \mu_0\varepsilon_0\omega^2\right)\vec{E} = 0 \tag{11}$$

Entonces $k = \sqrt{j\omega\sigma\mu_0 + \mu_0\varepsilon_0\omega^2} = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0\omega^2\left(1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)}$ Lo que se conoce como la relación de dispersión $k = k(\omega)$. Podemos ver también que el vector de onda es un valor complejo de la forma $\vec{k} = (\alpha + j\beta)\hat{z}$ donde $\alpha$ y $\beta$ son la parte real e imaginaria respectivamente del numero de onda. El calculo explicito para los factores $\alpha$ y $\beta$ se despareden de la siguiente idea si $x = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$ e $y = \omega\sigma\mu_0$ (no confundir $x$ e $y$ con las coordenadas espaciales).

$$\sqrt{x + jy} = \alpha + j\beta \rightarrow x + jy = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta \tag{12}$$

Se tiene un sistema de ecuaciones $x = \alpha^2 - \beta^2$ e $y = 2\alpha\beta$, entonces si se despeja primero $\beta$ se llega a una ecuación de 4to orden de la forma $\beta^4 + x\beta^2 - y^2/4 = 0$, ecuación que la ser resuelta, se puede obtener el la forma de $\alpha$ también dependiente de $x$ e $y$.

$$\beta = \sqrt{-\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{13}$$

Entonces el campo eléctrico se puede reescribir como:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{j((\alpha + j\beta)z - \omega t)}\hat{x} = E_0 e^{-\beta z} e^{j(\alpha z - \omega t)}\hat{x} \tag{14}$$

El cual se puede interpreta como una onda transversal que decae en el espacio a medida que avanza a lo largo de la coordenada $z$.

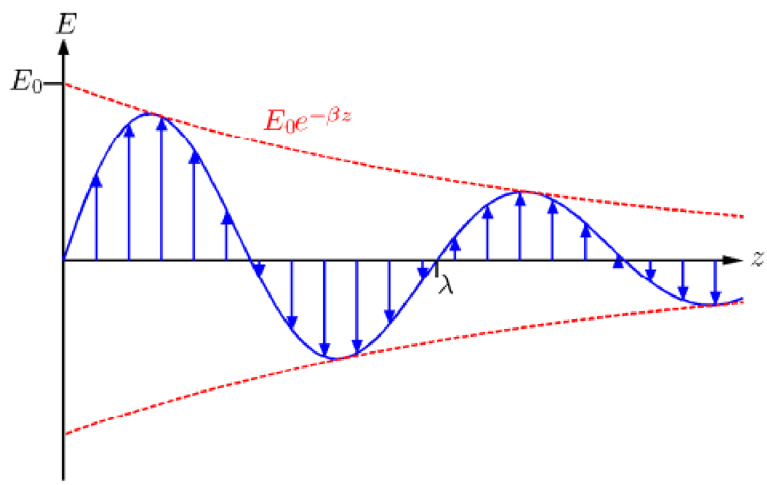



Figura 1: Ilustración del decaimiento del módulo del campo eléctrico a medida que avanza por el eje $z$.

- El campo magnético se puede calcular de l a siguiente expresión para ondas electromagnéticas planas monocromáticas (una única frecuencia) $\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r},t)}{\omega}$. Entonces ocupando $\vec{E}$ anterior nos podemos dar cuenta de que la dependencia espacial en la coordenada $z$ indica que el vector de onda $\vec{k}$ está en dirección $\hat{z}$ que es perpendicular a la dirección del campo eléctrico entonces por conveniencia, escribimos el vector de onda en forma polar $\vec{k} = |\vec{k}|e^{j\phi}\hat{z}$ con $\phi = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ y $|\vec{k}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. De este modo:

$$\vec{B} = \frac{|\vec{k}|}{\omega} E_0 e^{-\beta z} e^{j(\alpha z - \omega t + \phi)}(\hat{z} \times \hat{x}) = \frac{|\vec{k}|}{\omega} E_0 e^{-\beta z} e^{j(\alpha z - \omega t + \phi)}\hat{y} \tag{15}$$

- Como ya se tienen el campo eléctrico y magnético en sus formas complejas, se puede calcular el promedio temporal del vector de Poyting con la siguiente expresión $\left\langle \vec{S} \right\rangle =$

$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\Big\{\vec{E}\times\vec{H}^*\Big\}$. Donde $\vec{H}=\vec{B}/\mu_0$. Entonces:

$$\Big\langle\vec{S}\Big\rangle=\frac{1}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{|\vec{k}|E_0^2e^{-2\beta z}}{\omega}e^{j(\alpha z-\omega t)}e^{-j(\alpha z-\omega t+\phi)}(\hat{x}\times\hat{y})\right)\right\}=\frac{1}{2\mu_0}\frac{|\vec{k}|E_0^2}{\omega}\,\mathrm{Re}\Big\{\Big(e^{-j\phi}\Big)\Big\}\hat{z}\rightarrow \tag{16}$$

$$\rightarrow\Big\langle\vec{S}\Big\rangle=\frac{1}{2\mu_0}\frac{|\vec{k}|E_0^2e^{-2\beta z}}{\omega}\cos{(\phi)}\hat{z} \tag{17}$$

Lo que es una cantidad real y se obtiene una dependencia en la fase $\phi$ constante y de la coordenada espacial $z$ y se puede interpretar que este vector promedio en el tiempo irá disminuyendo con a medida que avanza a lo largo de dicha coordenada lo que da cuenta de la conductividad del medio en el que se inducen corriente que a su vez extraen parte de la energía de la onda electromagnética para convertirla en calor mediante las perdidas por efecto Joule.

# Pregunta 1.5 de Yapaaa!!!!

Considere una onda electromagnética que viaja en la dirección $z$ en el vacío, el cual posee un campo eléctrico dado por.

$$\vec{E}=E_1e^{j(kz-\omega t)}\hat{x}+E_2e^{j(kz-\omega t-\phi)}\hat{y} \tag{18}$$

Donde $E_1$ y $E_2$ son números reales.

a) Determine el campo magnético asociado a esta onda electromagnética y el promedio temporal del vector de Poynting.

b) Considere el caso $\phi=\frac{\pi}{2}$ y $E_1=E_2=E_0$. Encuentre las funciones reales que describen el campo eléctrico y magnético de la onda.

Respuesta:

a) Para este caso, el calculo del campo magnético es directo con la formula $\vec{B}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$ dado que se identifica que el campo eléctrico es una onda monocromática con una sola frecuencia. En cuanto al vector de onda, se identifica que como en el argumento de la exponencial de $\vec{E}$ es un producto $kz$ entonces el vector de onda debe tener dirección $\hat{z}$, es decir, $\vec{k}=k\hat{z}$. Entonces:

$$\vec{B}=\frac{k\hat{z}\times\Big(E_1e^{j(kz-\omega t)}\hat{x}+E_2e^{j(kz-\omega t-\phi)}\hat{y}\Big)}{\omega}=\frac{k}{\omega}\Big(E_1e^{j(kz-\omega t)}\hat{y}-E_2^{j(kz-\omega t-\phi)}\hat{x}\Big) \tag{19}$$

Ahora tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ está escritos de manera fasorial, entonces para obtener el promedio temporal del vector de Poynting, basta con aplicar la formula dada por $\Big\langle\vec{S}\Big\rangle=$

$\frac{1}{2}\,\text{Re}\Big\{\vec{E}\times\vec{H}^*\Big\}$. Entonces:

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle = \frac{1}{2}\,\text{Re}\bigg\{\Big(E_1e^{j(kz-\omega t)}\hat{x} + E_2e^{j(kz-\omega t-\phi)}\hat{y}\Big)\times\left(\frac{k}{\mu_0\omega}\left(E_1e^{-j(kz-\omega t)}\hat{y} - E_2^{-j(kz-\omega t-\phi)}\hat{x}\right)\right)\bigg\} = .. \tag{20}$$

$$.. = \frac{1}{2}\frac{k}{\mu_0\omega}\,\text{Re}\Big\{E_1^2\hat{z} + E_2^2\hat{z}\Big\} = \frac{1}{2}\frac{k}{\mu_0\omega}\left(E_1^2\hat{z} + E_2^2\hat{z}\right) \tag{21}$$

Donde los términos cruzados $E_1E_2$ se anulan debido a los productos cruces entre los vectores unitarios $\hat{x}\times\hat{x} = 0$.

b) En el caso de que $\phi = \frac{\pi}{2}$ y $E_1 = E_2 = E_0$, podemos reescribir los campos eléctricos y magnéticos.

$$\vec{E} = E_0\left(e^{j(kz-\omega t)}\hat{x} + e^{j(kz-\omega t-\frac{\pi}{2})}\hat{y}\right) = E_0\left(e^{j(kz-\omega t)}\hat{x} - je^{j(kz-\omega t)}\hat{y}\right) = E_0e^{j(kz-\omega t)}\left(\hat{x} - j\hat{y}\right) .. \tag{22}$$

$$.. = E_0\left(\cos\left(kz-\omega t\right)\hat{x} + \sin\left(kz-\omega t\right)\hat{y} + j\left(\sin\left(kz-\omega t\right)\hat{x} - \cos\left(kz-\omega t\right)\hat{y}\right)\right) \rightarrow \tag{23}$$

$$\rightarrow \text{Re}\Big\{\vec{E}\Big\} = E_0\left(\cos\left(kz-\omega t\right)\hat{x} + \sin\left(kz-\omega t\right)\hat{y}\right) \tag{24}$$

$$\vec{B} = \frac{kE_0}{\omega}\left(e^{j(kz-\omega t)}\hat{y} - e^{j(kz-\omega t-\frac{\pi}{2})}\hat{x}\right) = \frac{kE_0}{\omega}\left(e^{j(kz-\omega t)}\hat{y} + je^{j(kz-\omega t)}\hat{x}\right) = .. \tag{25}$$

$$.. = \frac{kE_0}{\omega}e^{j(kz-\omega t)}\left(\hat{y} + j\hat{x}\right) = .. \tag{26}$$

$$.. = \frac{kE_0}{\omega}\left(\cos\left(kz-\omega t\right)\hat{y} - \sin\left(kz-\omega t\right)\hat{x} + j\left(\sin\left(kz-\omega t\right)\hat{y} + \cos\left(kz-\omega t\right)\hat{x}\right)\right) \rightarrow \tag{27}$$

$$\rightarrow \text{Re}\Big\{\vec{B}\Big\} = \frac{kE_0}{\omega}\left(\cos\left(kz-\omega t\right)\hat{y} - \sin\left(kz-\omega t\right)\hat{x}\right) \tag{28}$$

Estos resultados indican que los campos están polarizados circularmente ya que presentan amplitudes contentes y tienen dependencias trigonométricas en sus componentes espaciales, en la siguiente figura se ilustra una idea de como se observa desde un punto de vista transversal de la onda electromagnética.

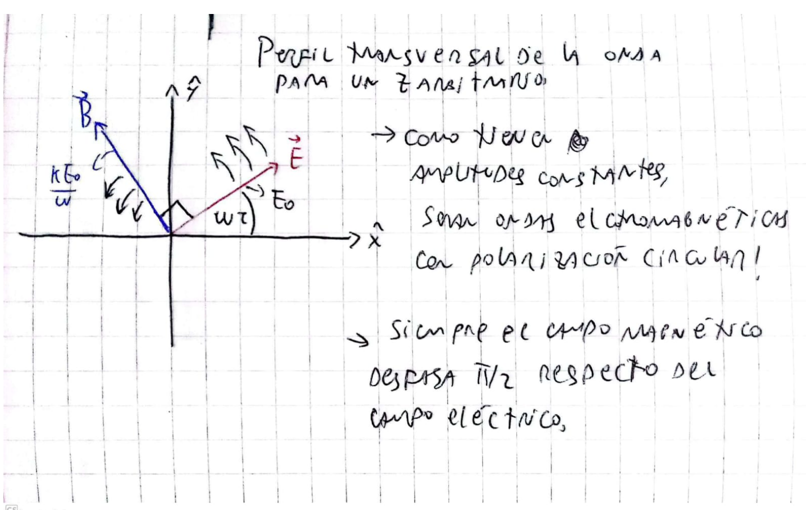



Figura 2: Vista transversal de la onda electromagnética, se observa como los campos están desfasados 90 grados y sus direccione oscilan en el tiempo según $\omega$.