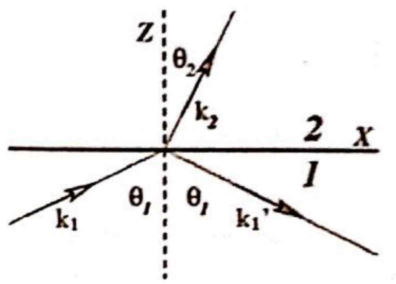
Pauta Aux 14

P1) a) Es posible escribir cada componente de la onda, notando que, dada la geometría existente



$$\vec{k}_1 = k_1 \sin\theta_1 \hat{x} + k_1 \cos\theta_1 \hat{z}$$

$$\vec{k}_1' = k_1' \sin\theta_1 \hat{x} - k_1' \cos\theta_1 \hat{z}$$

$$\vec{k}_2 = k_2 \sin\theta_2 \hat{x} + k_2 \cos\theta_2 \hat{z}$$

Así, los campos eléctricos asociados a las ondas incidente y reflejada se ven por

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = k_1 x \operatorname{sen}\theta_1 + k_1 z \cos\theta_1 \Rightarrow \|\vec{E}_I\| = E_1 e^{i(k_1 x \operatorname{sen}\theta_1 + k_1 z \cos\theta_1 - \omega t)}$$

$$\vec{k}_1' \cdot \vec{r} = k_1' x \operatorname{sen}\theta_1 - k_1' z \cos\theta_1 \Rightarrow \|\vec{E}_R\| = E_1' e^{i(k_1' x \operatorname{sen}\theta_1 - k_1' z \cos\theta_1 - \omega t)}$$

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = k_2 x \operatorname{sen}\theta_2 + k_2 z \cos\theta_2 \Rightarrow \|\vec{E}_T\| = E_2 e^{i(k_2 x \operatorname{sen}\theta_2 + k_2 z \cos\theta_2 - \omega t)}$$

Para ver la dirección de estos, usamos que $\vec{E} = \frac{\omega}{k} \vec{B}_0 \times \hat{k}$. Como $\vec{B}_0 = B_0 \hat{y}$, la dirección la podemos ver mediante

dirección de $\vec{E}_1$ — dirección de $\vec{B}_1$ — dirección de $\vec{k}_1$

$$\hat{E}_1 = \hat{B}_1 \times \hat{k}_1 = \hat{y} \times (k_1 \sin\theta_1 \hat{x} + k_1 \cos\theta_1 \hat{z}) = k_1 \cos\theta_1 \hat{x} - k_1 \sin\theta_1 \hat{y}$$

$$\hat{E}_1' = -\hat{B}_1' \times \hat{k}_1' = \hat{y} \times (k_1 \sin\theta_1 \hat{x} - k_1 \cos\theta_1 \hat{z}) = k_1 \cos\theta_1 \hat{x} + k_1 \sin\theta_1 \hat{y}$$

$$\hat{E}_2 = \hat{B}_2 \times \hat{k}_2 = \hat{y} \times (k_2 \operatorname{sen}\theta_2 \hat{x} + k_2 \cos\theta_2 \hat{z}) = k_2 \cos\theta_2 \hat{x} - k_2 \sin\theta_2 \hat{y}$$

De manera que, finalmente, el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E}_I = E_1 e^{i(k_1 x \operatorname{sen}\theta_1 + k_1 z \cos\theta_1 - \omega t)} (k_1 \cos\theta_1 \hat{x} - k_1 \sin\theta_1 \hat{y})$$

$$\vec{E}_R = E_1' e^{i(k_1' x \operatorname{sen}\theta_1 - k_1' z \cos\theta_1 - \omega t)} (k_1 \cos\theta_1 \hat{x} + k_1 \sin\theta_1 \hat{y})$$

$$\vec{E}_T = E_2 e^{i(k_2 x \operatorname{sen}\theta_2 + k_2 z \cos\theta_2 - \omega t)} (k_2 \cos\theta_2 \hat{x} - k_2 \sin\theta_2 \hat{y})$$

Así, se construye el campo eléctrico total en el medio ① y en el medio ② tal que

$$\vec{E}_{1} = \vec{E}_I + \vec{E}_R \qquad ; \qquad \vec{E}_{2} = \vec{E}_T$$

En el punto de incidencia (el origen), se cumplen las condiciones de borde

$$\vec{D}_{1}\cdot\hat{n} = \vec{D}_{2}\cdot\hat{n} \iff \varepsilon_1 \vec{E}_{1}\cdot\hat{n} = \varepsilon_2 \vec{E}_{2}\cdot\hat{n} \quad (1)$$

$$\vec{E}_{1}\times\hat{n} = \vec{E}_{2}\times\hat{n} \quad (2)$$

En este caso, $\hat{n} = \hat{z}$. Además, evaluando $\vec{E}_{1}$ y $\vec{E}_{2}$ en el origen

$$\vec{E}_{1}(\vec{r}=0) = \vec{E}_I(\vec{r}=0) + \vec{E}_R(\vec{r}=0) \quad ; \quad \vec{E}_{2}(\vec{r}=0) = \vec{E}_T(\vec{r}=0) \quad (3)$$

viendo c/u de estos términos

$$\vec{E}_I(\vec{r}=0) = E_1 e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{z}) \quad ; \quad \vec{E}_R(\vec{r}=0) = E_1' e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} + \sin\theta_1\hat{z})$$

$$\vec{E}_T(\vec{r}=0) = E_2 e^{-i\omega t}(\cos\theta_2\hat{x} - \sin\theta_2\hat{z})$$

Sustituyendo lo obtenido en (3)

$$\vec{E}_{1}(\vec{r}=0) = E_1 e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{z}) + E_1' e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} + \sin\theta_1\hat{z})$$

$$\vec{E}_{2}(\vec{r}=0) = E_2 e^{-i\omega t}(\cos\theta_2\hat{x} - \sin\theta_2\hat{z})$$

Así, en las condiciones de borde, junto a $\hat{n} = \hat{z}$

$$\to \varepsilon_1\left(E_1 e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{z}) + E_1' e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} + \sin\theta_1\hat{z})\right)\cdot\hat{z} = \varepsilon_2 E_2 e^{-i\omega t}(\cos\theta_2\hat{x} - \sin\theta_2\hat{z})\cdot\hat{z}$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_1 E_1 \cancel{e^{-i\omega t}}\sin\theta_1 + \varepsilon_1 E_1' \cancel{e^{-i\omega t}}\sin\theta_1 = -\varepsilon_2 E_2 \cancel{e^{-i\omega t}}\sin\theta_2$$

$$\iff \boxed{\varepsilon_1 \sin\theta_1 (E_1 - E_1') = \varepsilon_2 \sin\theta_2 E_2} \quad (*)$$

$$\to \left(E_1 e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{z}) + E_1' e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} + \sin\theta_1\hat{z})\right)\times\hat{z} = E_2 e^{-i\omega t}(\cos\theta_2\hat{x} - \sin\theta_2\hat{z})\times\hat{z}$$

$$\Rightarrow -E_1 \cancel{e^{-i\omega t}}\cos\theta_1 \cancel{\hat{y}} - E_1' \cancel{e^{-i\omega t}}\cos\theta_1 \cancel{\hat{y}} = -E_2 \cancel{e^{-i\omega t}}\cos\theta_2 \cancel{\hat{y}}$$

$$\iff \boxed{E_1\cos\theta_1 + E_1'\cos\theta_1 = E_2\cos\theta_2} \quad (**)$$

b) Deducir la ley de Snell es sencillo, usando nuevamente las condiciones de borde. En el caso general, dado que la incidencia ocurre en el plano $(z=0)$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{1}(z=0)\times\hat{n} = \vec{E}_{2}(z=0)\times\hat{n}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\vec{E}_I(z=0) + \vec{E}_R(z=0)\right]\times\hat{n} = \vec{E}_T(z=0)\times\hat{n}$$

$$\Rightarrow \quad E_I^{\perp}(z=0) + E_R^{\perp}(z=0) = E_T^{\perp}(z=0)$$

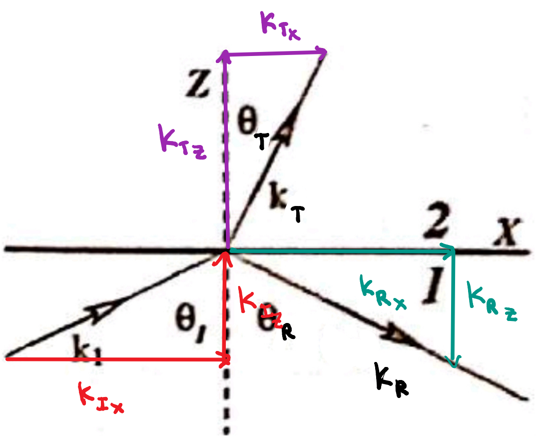
$$\Leftrightarrow \quad E_I e^{i(\vec{k}_I\cdot\vec{r}-\omega t)} + E_R e^{i(\vec{k}_R\cdot\vec{r}-\omega t)} = E_T e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Notar que E_I, E_R y E_T son únicamente las amplitudes de las ondas. La dependencia espacial y temporal está en el exponente. Como la igualdad se debe sostener en todo punto de la interfaz, para que se cumpla la igualdad obtenida, debe darse que

$$\vec{k}_I\cdot\vec{r} = \vec{k}_R\cdot\vec{r} = \vec{k}_T\cdot\vec{r} \qquad / z=0$$

$$\Leftrightarrow \quad k_{I_x}x + k_{I_y}y = k_{R_x}x + k_{R_y}y = k_{T_x}x + k_{T_y}y$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx} \\ k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty} \end{cases} \qquad (4)$$



Los vectores $\vec{k}$ viven en el plano xz, de manera que $k_{I_y} = k_{R_y} = k_{T_y} = 0$. Así, según la geometría

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{I_x} = k_I \sin\theta_I \;;\; k_{I_z} = k_I \cos\theta_I \\ k_{R_x} = k_R \sin\theta_R \;;\; k_{R_z} = k_R \cos\theta_R \\ k_{T_x} = k_T \sin\theta_T \;;\; k_{T_z} = k_T \cos\theta_T \end{cases}$$

Juntándolo con (4)

$$\Rightarrow \quad k_I \sin\theta_I = k_R \sin\theta_R = k_T \sin\theta_T \qquad / \; v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cancel{\omega}}{v_I}\sin\theta_I = \frac{\cancel{\omega}}{v_R}\sin\theta_R = \frac{\cancel{\omega}}{v_T}\sin\theta_T \qquad / \; v = \frac{c}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n_I}{\cancel{c}}\sin\theta_I = \frac{n_R}{\cancel{c}}\sin\theta_R = \frac{n_T}{\cancel{c}}\sin\theta_T$$

Como $n_I = n_R$ (las ondas incidente y reflejada viven en el mismo medio)

$$\Rightarrow n_I \sin\theta_I = n_I \sin\theta_R = n_T \sin\theta_T$$

$$\Rightarrow \sin\theta_I = \sin\theta_R$$

$$\boxed{\Rightarrow \theta_I = \theta_R}$$

Ley de reflexión

$$\boxed{n_I \sin\theta_I = n_T \sin\theta_T}$$

Ley de Snell

Viendo el resultado de (*)

$$\Rightarrow \varepsilon_1 \sin\theta_1 (E_1 - E_1') = \varepsilon_2 \sin\theta_2 E_2$$

$$\Leftrightarrow E_1 - E_1' = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} E_2$$

Por un lado, gracias a la Ley de Snell,

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

por otro,

los dos medios tienen el mismo μ

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} \Rightarrow n_1^2 = \frac{\mu\varepsilon_1}{\mu_0\varepsilon_0}, \quad n_2^2 = \frac{\mu\varepsilon_2}{\mu_0\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

Sustituyendo

$$E_1 + E_1' = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} E_2 = \frac{n_2^{\cancel{2}}}{n_1^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n_1}}{\cancel{n_2}} E_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_1 - E_1' = E_2 \frac{n_2}{n_1}} \qquad (***)$$

c) Si $\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_2 = 0$, por ley de Snell. Así, $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = 1$, tal que (**) se reduce a

$$E_1 + E_1' = E_2 \qquad (****)$$

Luego, haciendo $(**)$ + $(***)$

$$2E_1 = E_2 + E_2 \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow 2E_1 = E_2\left(\frac{n_2+n_1}{n_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_2 = 2E_1 \frac{n_1}{n_1+n_2}}$$

Después, $(***) - (**)$

$$2E_1' = E_2 - E_2\frac{n_2}{n_1} = E_2 \frac{n_1-n_2}{n_1} \quad / \quad E_2 = 2E_1 \frac{n_1}{n_1+n_2}$$

$$= 2E_1 \frac{\cancel{n_1}}{n_1+n_2} \cdot \frac{n_1-n_2}{\cancel{n_1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1' = E_1 \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}}$$

Luego, las fracciones de energía transmitida (T) y reflejada (R) se obtienen por los cocientes entre las intensidades

$$\Rightarrow I_I = \frac{\varepsilon v E_1^2}{2} \quad / \quad v = \frac{c}{n} \Leftrightarrow n = \frac{c}{v} = c\sqrt{\mu\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{n^2}{c^2\mu}, \text{ con } \varepsilon=\varepsilon_1,\ n=n_1,\ \mu=\mu_1$$

$$= \frac{n_1^{\cancel{2}}}{c^{\cancel{2}}\mu_1} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{n_1}} \cdot \frac{E_1^2}{2} = \frac{E_1^2 n_1}{2c\mu_1}$$

$$\Rightarrow I_R = \frac{\varepsilon v E_1'^2}{2} \quad / \text{ procedimiento análogo, con } \varepsilon=\varepsilon_1,\ n=n_1,\ \mu=\mu_1$$

$$= \frac{n_1^{\cancel{2}}}{c^{\cancel{2}}\mu_1} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{n_1}} \cdot \frac{E_1'^2}{2} = \frac{E_1'^2 n_1}{2c\mu_1}$$

$$\Rightarrow I_T = \frac{\varepsilon v E_2^2}{2} \quad / \text{ procedimiento análogo, con } \varepsilon=\varepsilon_2,\ n=n_2,\ \mu=\mu_2$$

$$= \frac{n_2^{\cancel{2}}}{c^{\cancel{2}}\mu_2} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{n_2}} \cdot \frac{E_2^2}{2} = \frac{E_2^2 n_2}{2c\mu_2}$$

Luego, como calculando los coeficientes de transmisión y reflexión

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\frac{E_2^2 n_2}{\cancel{2c\mu_2}}}{\frac{E_1^2 n_1}{\cancel{2c\mu_1}}} = \frac{E_2^2}{E_1^2}\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\cancel{E_1^2}}\left(2\cancel{E_1}\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)^2 \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}}$$

$\mu_1 = \mu_2$

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{\dfrac{E_1'^2 n_1}{\cancel{2c\mu_1}}}{\dfrac{E_1^2 n_1}{\cancel{2c\mu_1}}} = \frac{E_1'^2}{E_1^2} = \frac{1}{\cancel{E_1^2}}\left(\cancel{E_1}\,\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2 \iff \boxed{R = \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2}$$

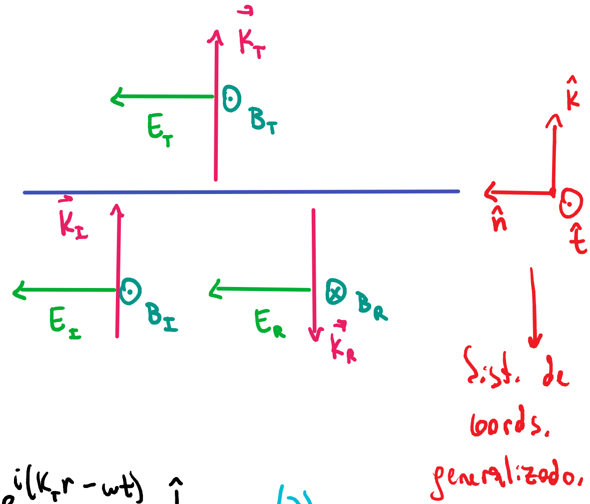
$\mu_1 = \mu_2$

Evaluando numéricamente, $n_1 = 1$ y $n_2 = 1{,}5$

$$\Rightarrow T = 0{,}96 \quad ; \quad R = 0{,}04$$

Notar que $R+T = 1$, como es de esperarse.

P2) a) Escribiendo las ondas incidentes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$



$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_I &= E_I e^{i(k_I r-\omega t)} \hat{n} \\ \vec{B}_I &= B_I e^{i(k_I r-\omega t)} \hat{t} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$r \in \{x,y,z\}$, dependiendo del SR escogido.

Luego, las transmitidas

$$\vec{E}_T = E_T e^{i(k_T r-\omega t)} \hat{n} \qquad \vec{B}_T = B_T e^{i(k_T r-\omega t)} \hat{t} \quad (2)$$

Usando $k = \frac{\omega n}{c}$, con $n = n'$, se tiene que

$$\Rightarrow k_T = \frac{\omega}{c} n (1+i\rho) = \frac{\omega n}{c} + i\frac{\omega n \rho}{c} \Leftrightarrow k_T = \alpha + i\beta$$

$\alpha = \frac{\omega n}{c}$

$\beta = \frac{\omega n \rho}{c}$

Luego, la longitud de penetración $d = \frac{1}{\beta}$ resulta

$$\boxed{d = \frac{c}{\omega n \rho}}$$

Mientras que la velocidad de propagación y longitud de onda

$$v = \frac{\omega}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{v = \frac{c}{n}} \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n}}$$

b) Además de las relaciones (1) y (2), para la onda reflejada se tiene

$$\vec{E}_R = E_R e^{i(-k_I r-\omega t)} \hat{n} \qquad \vec{B}_R = B_R e^{i(-k_I r-\omega t)} \hat{t} \quad (3) \quad / k_R = -k_I$$

Expresando las amplitudes de las ondas de campo magnético, en términos de la onda de campo eléctrico mediante $\vec{B} = \hat{k} \times \vec{E} / \omega$

$$\Rightarrow B_I = \frac{k_I E_I}{\omega} \Big/ \frac{k_I}{\omega} = \frac{n}{c} \; ; \quad B_R = \frac{-k_I E_R}{\omega} \Big/ \frac{k_I}{\omega} = \frac{n}{c} \; ; \quad B_T = \frac{k_T E_T}{\omega} \Big/ \frac{k_T}{\omega} = \frac{n'}{c}$$

$$\Leftrightarrow B_I = \frac{n}{c} E_I \; ; \quad B_R = -\frac{n}{c} E_R \; ; \quad B_T = \frac{n'}{c} E_T$$

Tal que

$$\vec{B}_I = \frac{n}{c} E_I e^{i(k_I r-\omega t)} \hat{t} \; ; \quad \vec{B}_R = -\frac{n}{c} E_R e^{i(-k_I r-\omega t)} \hat{t} \; ; \quad \vec{B}_T = \frac{n'}{c} E_T e^{i(k_T r-\omega t)} \hat{t}$$

Luego, dadas las condiciones de borde, considerando la normal a la superficie como $\hat{k}$, dado el SR escogido,

$$\Rightarrow E_1 \times \hat{k} = E_2 \times \hat{k}$$

/ $E_1 = E_I(r=0) + E_R(r=0)$; $E_2 = E_T(r=0)$
reemplazamos de (1), (2) y (3)

$$\Leftrightarrow \left(E_I \cancel{e^{-i\omega t}}\, \hat{n} + E_R \cancel{e^{-i\omega t}}\, \hat{n}\right) \times \hat{k} = \left(E_T \cancel{e^{-i\omega t}}\, \hat{n}\right) \times \hat{k} \Rightarrow E_I + E_R = E_T \quad (4)$$

A continuación, para $\vec{B}$ (mediante $\vec{H}$)

$$\Rightarrow H_1 \times \hat{k} = H_2 \times \hat{k}$$

/ $H_1 = \frac{1}{\mu_1}\left[B_I(r=0) + B_R(r=0)\right]$; $H_2 = \frac{B_T(r=0)}{\mu_2}$,
de (1), (2) y (3)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu_1}\left[\frac{n}{\cancel{c}} E_I \cancel{e^{-i\omega t}}\, \hat{t} - \frac{n}{\cancel{c}} E_R \cancel{e^{-i\omega t}}\, \hat{t}\right] \times \hat{k} = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{n'}{\cancel{c}} E_T \cancel{e^{-i\omega t}}\, \hat{t}\right) \times \hat{k} \xRightarrow{\mu_1 \approx \mu_2} n(E_I - E_R) = n' E_T$$

$$\Leftrightarrow E_I - E_R = \frac{n'}{n} E_T \quad (5)$$

Haciendo (4) + (5)

$$\Rightarrow 2E_I = E_T\left(1 + \frac{n'}{n}\right) = E_T \frac{n'+n}{n} \Rightarrow E_T = \frac{2n}{n+n'} E_I \quad / \; n' = n(1+i\rho)$$

$$= \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n} + \cancel{n}(1+i\rho)} E_I$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_T = \frac{2}{2+i\rho} E_I}$$

Luego, (4) − (5)

$$2E_R = E_T\left(1 - \frac{n'}{n}\right) \Leftrightarrow E_R = \frac{E_T}{2} \frac{n-n'}{n} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{n}}{n+n'} E_I \cdot \frac{n-n'}{\cancel{n}}$$

$$\Leftrightarrow E_R = \frac{n-n'}{n+n'} E_I$$

$$= \frac{\cancel{n} - \cancel{n}(1+i\rho)}{\cancel{n} + \cancel{n}(1+i\rho)} E_I \Leftrightarrow \boxed{E_R = \frac{-i\rho}{2+i\rho} E_I}$$

c) Escribiendo en forma polar c/ complejo

i) $$\frac{2}{2+ip} = \frac{2(2-ip)}{4+p^2} = \frac{4}{4+p^2} - i\,\frac{2p}{4+p^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{4+p^2}\right)^2 + \left(\frac{2p}{4+p^2}\right)^2}\; e^{i\theta}$$

Con

$$\tan\theta = \frac{-\frac{\cancel{2}p}{\cancel{4+p^2}}}{\frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{4+p^2}}} = \frac{-p}{2} \Rightarrow \theta = -\arctan\left(\frac{p}{2}\right)$$

→ desfase buscado! (entre I y T)

ii) $$\frac{-ip}{2+ip} = \frac{-ip(2-ip)}{4+p^2} = -\frac{p^2}{4+p^2} - i\,\frac{2p}{4+p^2} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{4+p^2}\right)^2 + \left(\frac{2p}{4+p^2}\right)^2}\; e^{i\phi}$$

Con

$$\tan\phi = \frac{\cancel{-}\frac{2\cancel{p}}{\cancel{4+p^2}}}{\cancel{-}\frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{4+p^2}}} = \frac{2}{p} \Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{2}{p}\right)$$