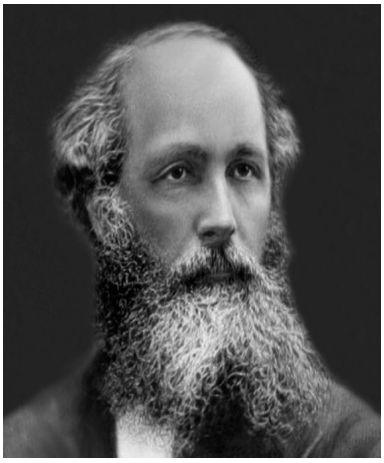
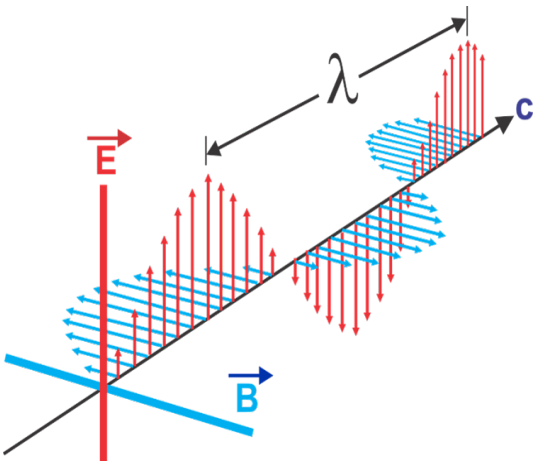
FI2002-2 Electromagnetismo
Profesor: Claudio Arenas
Auxiliares: Álvaro Flores & Tomás Vatel
Ayudante: Vicente Torelli

Auxiliar #23: Ondas electromagnéticas

Viernes 01 de Diciembre de 2023



(a) James Clerk Maxwekk



(b) Ilustración onda electromagnética plana monocromática

P1. A partir de las ecuaciones de Maxwell en el vacío obtenga las ecuaciones de onda para los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. **Identifique cual es la velocidad de la onda**, calcule la relación de dispersión y compruebe que las ondas planas monocromáticas son solución y dibújelas.

P2. Se estudia la transmisión de ondas electromagnéticas planas y monocromáticas (una única frecuencia) incidiendo normalmente sobre una placa neutra con conductividad σ ($\vec{J} = \sigma\vec{E}$), y coincidente con el plano xy.

La ecuación de continuidad para la densidad de energía electromagnética es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J}_l \cdot \vec{E} \tag{1}$$

En que $u = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$ y $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

a) Integrando en un volumen finito dentro del espacio, de una interpretación física para cada uno de los términos de la ecuación (1).

b) Muestre, a partir de las ecuaciones de Maxwell, que la ecuación que describe la propagación de ondas en el medio conductor es:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

Con $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sim 299{,}792{,}458$ m/s

c) Considerando una onda incidente plana con frecuencia ω de la forma $\vec{E} = \hat{x}E_0 e^{j(kz-\omega t)}$ con E_0 un valor real.

1) Demuestre que la relación de dispersión en el conductor, es decir, la relación entre ω y k es:

$$\omega(k) = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \left(1 + j\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}\right) \tag{3}$$

2) Calcule el campo magnético en el conductor.

3) Calcule el promedio temporal dle flujo de energía en función de z. Interprete.

Resumen y formulario

Ecuaciones de Maxwell

Debido a la imcompatibilidad de lo propuesto por Ampere con la ecuación de continuidad en el caso no estático, es necesario corregirla de la siguiente forma que propone Maxwell.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_\Omega \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_\Omega \vec{D} \cdot d\vec{s} \tag{4}$$

Estas son las versiones diferenciales e integrales de la ecuación corregida de Ampere. Γ es el borde de una superficie Ω. En particular, se define la **corriente de desplazamiento** como:

$$I_d = \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{D} \cdot d\vec{s} \tag{5}$$

La cual nace de la variación temporal del vector desplazamiento, es decir, en el caso electrostático o estacionario, esta corriente no existe. Esta corriente busca explicar porque dentro de un circuito cerrado con capacitancias de placas paralelas, logrababa haber corrientes a pesar de que entre las placas, el material es un dieléctrico y no debería haber corrientes en el sentido de cargas en movimiento y lo que aporta Maxwell, inspirándose en la ley de Faraday, es que en realidad existe otro tipo de corriente la cual logra "atravesar" el medio dieléctrico conectando ambas placas que depende de la variación temporal del flujo de campo eléctrico al interior del condensador. Mirar siguiente video O.O https://www.youtube.com/watch?v=0fURXJGlOc0.

De este modo, se definen las **Ecuaciones de Maxwell** en un medio vacío con densidades de carga:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{7}$$

Teorema de Poyting

El toerema se define:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{8}$$

Por otro lado, la energía electromagnetica por unidad de volumen estada dada por:

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) \tag{9}$$

El teorema de Poyting indica que:

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E} \tag{10}$$

En su versión integral:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint u_{em}dV + \iint \vec{S}\cdot d\vec{A} = -\iiint \vec{J}\cdot\vec{E}dv \tag{11}$$

Equivalentemente $\frac{\partial U_{em}}{\partial t} + \Phi_s = -P$ Esta ecuación constituye un balance de energía electromagnética U_{em} ya que relaciona la variación de la energía electromagnética con el flujo de vector de Poynting Φ_s y con las fuentes que provocan esta energía dado por el término $\vec{J}\cdot\vec{E}$.

Ondas planas

Un caso particular de estudio son las ondas planas y monocromáticas. EL campo eléctrico perteneciente a este tipo de ondas es de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right) = E_0\hat{n}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right) \tag{12}$$

Donde $\vec{k}$ es conocido como el **vector de onda** el cual indica la dirección de propagación de la onda, está en unidades de $[l^{-1}]$ y es inversamente proporcional a la **longitud de onda** $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$. $\hat{n}$ es el vector unitario que indica la dirección del campo eléctrico (también se le denomina vector de polarización de la onda) y ω su frecuencia. En su forma compleja, se reescribe como:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_o e^{j(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{13}$$

Otras observaciones y definiciones:

- La **velocidad de fase** de la onda es $v = \omega/k$, donde en el caso particular del vacío se tiene que $\omega/k = c$ velocidad de la luz!.
- La frecuencia angular de la onda es $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ donde T es el periodo de la onda y f es la frecuencia de la onda.
- En el caso de **polarización lineal** $\hat{n}$ es constante en el tiempo. En otras polarizaciones como las circulares y elípticas, el vector $\hat{n} = \hat{n}(\vec{r},t)$ depende de la posición y el tiempo.

De las ecuaciones de Maxwell se deduce que tanto $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{k}$ son perpendiculares entre si. Y la relación entre el campo magnético y eléctrico viene dado por el vector de onda como:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega} \tag{14}$$

Otro video que ilustra mejor la forma de las ondas planas monocromáticas:

- https://www.youtube.com/watch?v=cKKM9boWqZs
- https://www.youtube.com/watch?v=W1cTpqM9DaU&t=7s

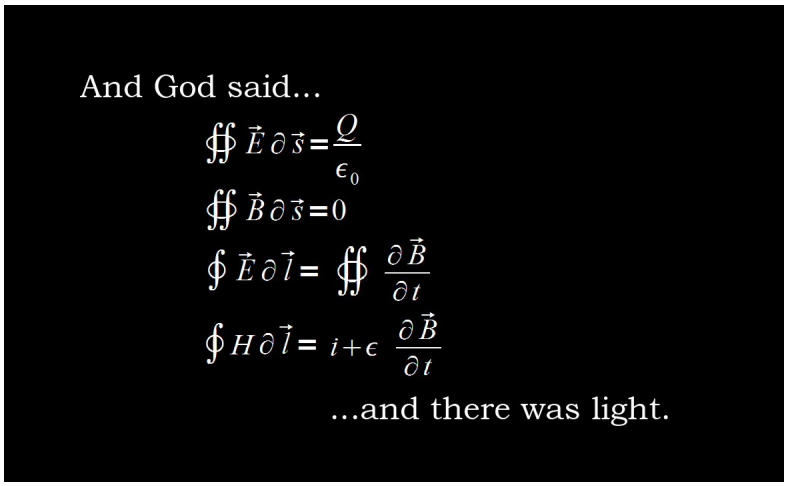


Figura 1: Otro meme ñoñoo