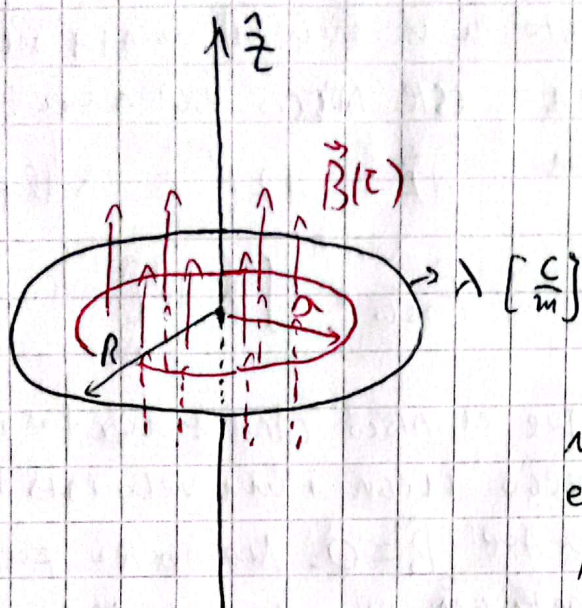


AUX 22

P11



Disco de material aislante
de radio R cuyo borde
posee una densidad lineal
de carga λ . Disco con
momento de inercia I

En un universo más pequeño
de radio a existe un campo
magnético uniforme en el
espacio pero dependiente del tiempo
 $\vec{B} = B_0(t) \hat{e}_z$

En $t=0$, el campo magnético comienza a disminuir su
magnitud hasta que luego de un instante breve, desaparece

¿Qué ocurre con el disco mientras $\vec{B} \rightarrow 0$?

Podemos pensar que existe un flujo magnético neto
sobre el disco de radio R , sea Φ .

Dado que $\vec{B}$ varía en el tiempo, entonces $\Phi = \Phi(t)$

$\Rightarrow$ LA ecuación de la fem $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$, existirá una fem!

Y si existiera fem, esta va asociado a un campo
eléctrico inducido según la ley de FARADAY en forma
integral.

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{E}$ cuya trayectoria de integración
corresponde a un camino cerrado
que sigue el sentido de una posible
corriente inducida.

esto se ve mejor a partir de $\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$

el operador $\nabla \times$ indica que $\vec{E}$ es perpendicular a $\vec{B}$

Recordar que el origen de las corrientes inducidas es por los campos eléctricos inducidos debido a la variación de $\vec{B}(t) \rightarrow$ lo que dice la ley Faraday y como existe una densidad de carga lineal λ en el borde, este sufrirá el efecto de este $\vec{E}$ generado

y al igual que lo visto en la primera unidad del curso sobre ley de Coulomb, este disco experimentará una fuerza dada por $d\vec{F} = dq \vec{E} = \lambda dl \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{disco}} = \int \lambda dl \vec{E}$$

$\Rightarrow$ Es de esperar que el disco gire aumentando su velocidad para luego llegar a una velocidad terminal desde el instante en que $\vec{B} = 0$. No existen fuerzas restauradoras que detengan el giro del disco.

$$\Rightarrow \Phi = \iint_{\text{area efectiva}} \vec{B}(r) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^a B(r) \hat{z} \cdot \hat{z} r dr d\theta$$

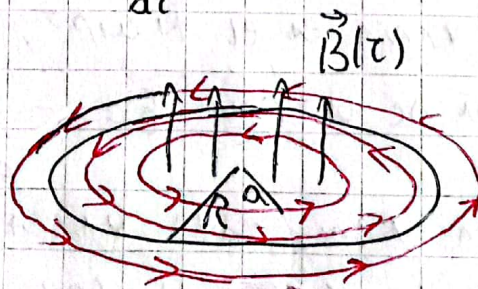
r se integra hasta a ya que para $r > a$ $\vec{B}(r > a) = 0$

$$= \pi a^2 B(z)$$

usando sist. de coordenadas cilíndrico.

$$\Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{d}{dt} \Phi(z) = - \pi a^2 \frac{d(B(z))}{dt}$$

y para $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$



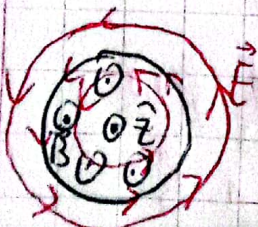
por ley de inducción, se dice debido que el sentido de la "corriente inducida" es antihorario oponiéndose a la disminución del flujo magnético.

$\Rightarrow$ El sentido del $\vec{E}(r)$ también es antihorario y puede azarar a todo el espacio.

$$d\vec{l} = r d\theta \hat{\theta}, \theta \in (0, 2\pi)$$

$$\vec{E} = E(r, z) \hat{\theta}$$

visto desde arriba



~~El sentido del E(r) también es antihorario y puede azarar a todo el espacio.~~

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} E(r, z) r d\theta \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = 2\pi r E(r, z) = \epsilon = -\pi a^2 \frac{dB(z)}{dz}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r, z) = \frac{-\pi a^2}{2\pi r} \frac{dB(z)}{dz} \hat{\theta}$$

nota que dependencia en el tiempo de $E(r, z)$ depende solo de $\frac{dB(z)}{dz}$.

$\Rightarrow$ Este campo eléctrico lo va perturbar el borde del disco con densidad de carga λ

y por ley de Coulomb $|\vec{F}_{disc}| = \int \lambda d\ell |\vec{E}(r, z)| \rightarrow$ tiene que ser evaluado donde existe la carga, es decir, en $r=R$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{disc}| = \int_0^{2\pi} \lambda R \left(-\frac{a^2}{2R} \frac{dB(z)}{dz} \right) d\theta$$

$$\vec{F}_{disc} = -\frac{\lambda R a^2}{2R} \frac{dB(z)}{dz} 2\pi \hat{\theta} = -\lambda \pi a^2 \frac{dB(z)}{dz} \hat{\theta}$$

$\rightarrow$ se agrega después

$\rightarrow$ la fuerza posee la misma dirección del campo eléctrico.

¿pero y la velocidad angular?

de mecánica clásica podemos recordar que las ecuaciones de movimiento de los objetos se pueden modelar mediante

2ª Ley de Newton $\sum \vec{F}_i = m \vec{a}$ y $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_i \rightarrow$ entonces

por la forma del campo

eléctrico, es de esperar que el movimiento del disco sea solo en una dirección, por lo que el vector velocidad angular se puede escribir como $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$

y $\vec{L} = I \vec{\omega} \rightarrow$ definición

$$\Rightarrow \vec{L} = I \omega \hat{z}$$

$\rightarrow$ Es el momento de inercia del anillo

momento angular total

$\rightarrow$ Ahora pensemos en el sentido de $\vec{\omega}$



Por otro lado, solo existe un torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{torco}} \rightarrow \text{LA FUERZA APLICADA}$$

posición de objeto
que se le aplica la
fuerza

$$\Rightarrow \vec{r} = R \hat{r}$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= R \hat{r} \times -\lambda \pi \alpha^2 \frac{d}{dt} B(t) \hat{\theta} \\ &= -\lambda \pi \alpha^2 R \frac{d}{dt} B(t) (\hat{r} \times \hat{\theta}) \end{aligned}$$

$$\vec{\tau} = -\lambda \pi \alpha^2 R \frac{d}{dt} B(t) \hat{z}$$

$\Rightarrow$ la ecuación de movimiento queda:

$$I \frac{d\omega}{dt} \hat{z} = -\lambda \pi \alpha^2 R \frac{d}{dt} B(t) \hat{z} \quad / \int dt$$

$$I \int \frac{d\omega}{dt} dt = -\lambda \pi \alpha^2 R \int \frac{d}{dt} B(t) dt$$

$$\omega = -\frac{\lambda \pi \alpha^2 R}{I} B(t) + k \rightarrow \text{cte de integración}$$

notar que en $t=0$, $B(t) = B_0$ y $\omega(t=0) = 0$ ya que el disco aun no se mueve

$$\Rightarrow I \omega(t=0) = 0 = -\lambda \pi \alpha^2 R B_0 + k \rightarrow k = \frac{\lambda \pi \alpha^2 R B_0}{I}$$

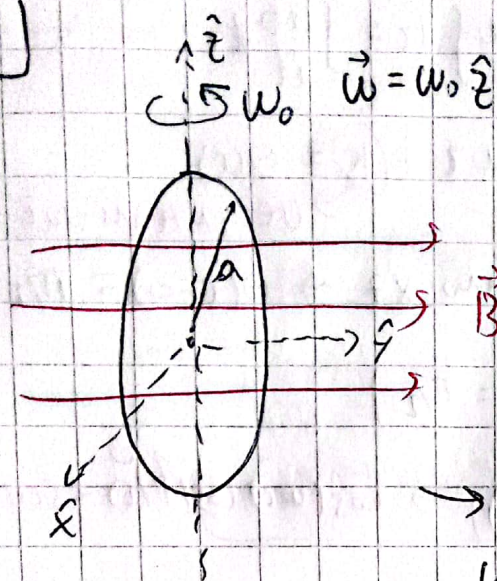
$$\Rightarrow \omega(t) = \frac{\lambda \pi \alpha^2 R}{I} (B_0 - B(t)) \quad \text{velocidad angular}$$

Entonces si para un instante posterior $B(t) = 0$

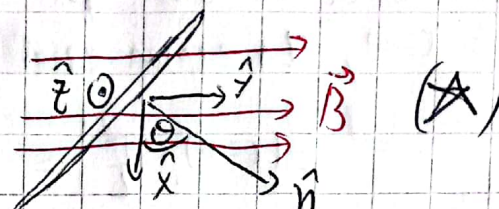
$$\Rightarrow \omega_{\text{final}} = \frac{\lambda \pi \alpha^2 R B_0}{I}$$

6) Se observa que ω_{final} no depende de la rotación en que se da $B(t)$.

P2)



Visto desde ANSA



Se da el supuesto de que en $t=0$, la espina está con $\theta = \pi/2$, es decir, de frente respecto de $\vec{B}$.

a) La fem inducida es directamente $\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\Phi(t)$

con $\Phi(t) = \iint_{\text{area efectiva de incidencia}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

pero en este caso $\vec{B}$ es constante en el tiempo y $d\vec{S}$ también es constante, entonces es la dirección de $d\vec{S}$ lo que varía con el tiempo.

Definiendo el sistema de referencia de la figura (*)

se observa que $d\vec{S} = dS \hat{n} = (dS)(\cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) \hat{y})$
 $r dr d\theta$, $r \in (0, a)$, $\theta \in (0, 2\pi)$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a B_0 r dr d\theta \hat{y} \cdot (\cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) \hat{y})$$

$$= B_0 \pi a^2 \sin(\theta(t))$$

es el ángulo θ el que varía en el tiempo.

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d}{dt} (B_0 \pi a^2 \sin(\theta(t))) = -B_0 \pi a^2 \cos(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt}$$

y $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$ la velocidad angular de giro de la espina.

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -B_0 \pi a^2 \omega \cos(\theta(t))$$

$$\dot{\theta} = \omega(t)? \quad \omega = \frac{d\theta}{dz} \bigg/ \int dz \rightarrow \omega \int dz = \int \frac{d\theta}{dz} dz$$

$$\Rightarrow \omega z + (K) = \theta(z)$$

De la condición inicial en $\rightarrow$

$\rightarrow z=0$, la espira está sobre plano $xz \rightarrow \theta(z=0) = \pi/2$

$$\Rightarrow \theta(z=0) = \frac{\pi}{2} = 0 + K \rightarrow (K = \pi/2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -B_0 \pi a^2 \omega (\cos(\omega z + \pi/2)) \rightarrow \cos(\omega z) \cos(\pi/2) - \sin(\omega z) \sin(\pi/2)$$

$$\mathcal{E} = +B_0 \pi a^2 \omega \sin(\omega z)$$

b) La corriente inducida en la espira es I y debe ser la misma que pasa por la resistencia de la espira y por la autoinducción que le genera



$\rightarrow$ equivalente circuito.

$\Rightarrow$ planteamos ley de Kirchhoff

$$\mathcal{E} = IR + L \frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{B_0 \pi a^2 \omega \sin(\omega z)}{L}$$

Ecuación diferencial primer orden no homogénea

La solución se divide en una solución homogénea I_h y otra particular $I_p \rightarrow I(z) = I_h(z) + I_p(z)$

$$I_h(z) \text{ satisface } \frac{d}{dt} I_h + \frac{R}{L} I_h = 0$$

$$I_p(z) \text{ satisface } \frac{d}{dt} I_p + \frac{R}{L} I_p = \frac{B_0 \pi a^2 \omega \sin(\omega z)}{L}$$

para I_h

$$\frac{dI_h}{dz} = -\frac{R}{L} I_h \quad \int \frac{dI_h}{I_h} = -\frac{R}{L} \int dz$$

$$\Rightarrow \ln(I_h) = -\frac{R}{L} z + \text{cte de integración}$$

$$\Rightarrow I_h(z) = e^k e^{-\frac{R}{L} z} \rightarrow \text{sea } A = e^k \text{ cte}$$

$$I_h(z) = A e^{-\frac{R}{L} z}$$

para I_p

Se propone $I_p = C_1 \cos(\omega z) + C_2 \sin(\omega z)$ $\rightarrow$ se la llama particular porque la parte no homogénea de la ecuación
Sustituyendo. C_1, C_2 constantes desconocidas.

$$-\omega C_1 \sin(\omega z) + \omega C_2 \cos(\omega z) + \frac{R}{L} (C_1 \cos(\omega z) + C_2 \sin(\omega z)) = \frac{B_0 \pi a^2 \omega}{L} \sin(\omega z)$$

$$\rightarrow \sin(\omega z) \left(\frac{R}{L} C_2 - \omega C_1 \right) + \cos(\omega z) \left(\omega C_2 + \frac{R}{L} C_1 \right) = \frac{B_0 \pi a^2 \omega}{L} \sin(\omega z)$$

$$\downarrow \quad C_1 = -\frac{\omega C_2 L}{R}$$

$$\rightarrow \frac{R}{L} C_2 - \omega \left(-\frac{\omega C_2 L}{R} \right) = \frac{R}{L} C_2 + \frac{\omega^2 L}{R} C_2 = C_2 \left(\frac{R}{L} + \frac{\omega^2 L}{R} \right) = \frac{B_0 \pi a^2 \omega}{L}$$

$$\rightarrow C_2 = \left(\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{RL} \right)^{-1} \frac{B_0 \pi a^2 \omega}{L} = \frac{B_0 \pi a^2 \omega RL}{(R^2 + \omega^2 L^2)L} = \frac{\omega R B_0 \pi a^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

$$\Rightarrow I_p(z) = \frac{\omega R B_0 \pi a^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)} \cos(\omega z) + \left(\frac{\omega R B_0 \pi a^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \sin(\omega z)$$

$$I_p(z) = \frac{B_0 \pi a^2 \omega}{(R^2 + \omega^2 L^2)} (R \sin(\omega z) - L \omega \cos(\omega z))$$

$$\Rightarrow I(z) = A e^{-\frac{R}{L} z} + \frac{B_0 \pi a^2 \omega}{(R^2 + \omega^2 L^2)} (R \sin(\omega z) - L \omega \cos(\omega z)) //$$

es la constante inicial en general y se obtiene de las condiciones iniciales pero aquí no lo dan :)

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \frac{B_0 \pi a^2 \omega}{(R^2 + \omega^2 L^2)} (R \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \omega L) \rightarrow \text{CONVERGE ESTACIONARIA.}$$

c)

El torque se calcula como el de un momento magnético frente a un campo magnético externo.

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \rightarrow \text{momento magnético. DEFINICIÓN DE TORQUE MAGNÉTICO.}$$

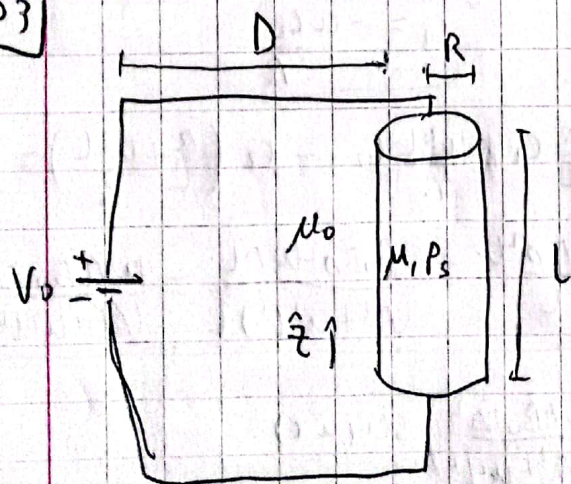
$$\vec{m} = I(t) (\oint \vec{dl}) \times \vec{n} \rightarrow \text{área espiral vector unitario espiral}$$

$$\vec{\tau} = I(t) \pi a^2 B_0 (\vec{n} \times \vec{z}) = I(t) \pi a^2 B_0 (\cos(\omega t) \vec{x} + \sin(\omega t) \vec{y}) \times \vec{z}$$

$$\vec{\tau} = I(t) \pi a^2 B_0 \cos(\omega t) (\vec{x} \times \vec{z}) = I(t) \pi a^2 B_0 \cos(\omega t) \vec{y}$$

↓
con $I(t)$ obtenido de parte b)

P3)

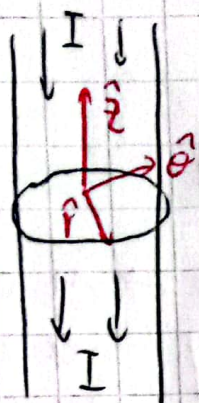


$$\mu(r) = \mu_0 (1 + r/R) \quad r \text{ de coordenadas cilíndricas.}$$

$D \gg L \gg R$
 ↓
 Fuente V_0 muy lejos de cilindro
 cilindro muy largo respecto a su radio

a) Interesa obtener campos $\vec{H}$ y $\vec{B}$ en todo el espacio pero cerca del conductor.

Definiendo un sist. de referencia con coordenadas cilíndricas.



La ley de Ampere para nervos infinitos.

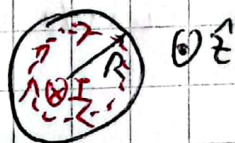
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

Se reconocen 2 regiones, $r < R$ y $r > R$

Se espera que la corriente circule en dirección $\hat{z}$ y sea por $-\hat{z} \rightarrow$ el campo magnético debe ser en sentido horario.

$r < R$

Visto desde un punto de vista transversal



$$\Rightarrow \vec{H}(r < R) = H(r)(-\hat{\theta}), \quad d\vec{l} = r d\theta \hat{\theta}, \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H(r) r d\theta (-\hat{\theta} \cdot \hat{\theta}) = -\frac{r}{R} I$$

$$= 2\pi r H(r) = -\frac{r}{R} I \Rightarrow \vec{H}(r < R) = -\frac{I}{2\pi R} \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r < R) = \mu(r) \vec{H}(r < R)$$

$$\vec{B}(r < R) = \mu_0 \left(1 + \frac{\chi}{R}\right) \frac{I}{2\pi R} \hat{\theta}$$

para $r > R$



$$\text{también } \vec{H}(r > R) = H(r > R)(-\hat{\theta}), \quad d\vec{l} = r d\theta \hat{\theta}, \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

$$\oint \vec{H}(r > R) \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H(r > R) r d\theta (-\hat{\theta} \cdot \hat{\theta})$$

$$= 2\pi r H(r > R) = -I$$

$$\Rightarrow \vec{H}(r > R) = -\frac{I}{2\pi r} \hat{\theta}, \quad \vec{B}(r > R) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$

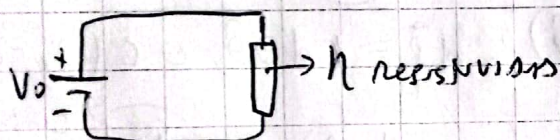
b) la magnetización $\vec{M}$

de la ecuación $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ en VL R

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H} = \vec{H} \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)$$

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \underbrace{\vec{H}(\text{VL R})}_{\text{campo en b)}} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi R} \hat{\theta} \rightarrow \vec{M} \text{ solo existe en el medio magnético, en el vacío no.}$$

¿pero cuánto vale I?



resistencia $R = \eta \frac{L}{\pi R^2}$

$$R = \eta \frac{L}{\pi R^2}$$

$\Rightarrow$ por ley de Ohm

$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0 \pi R^2}{\eta L} \quad \text{cte}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0} \right) \frac{V_0 \pi R^2}{\eta L} \cdot \frac{1}{2\pi R} \hat{\theta} = \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0} \right) \frac{V_0 R}{2\eta L} \hat{\theta}$$

c) Densidades de corrientes de magnetización.

$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$$

Densidad superficial de corriente de magnetización

$\hat{n}$ es el vector normal a la interfaz medio-vacío. $\Rightarrow \hat{n} = \hat{r}$



$$\vec{K}_M = |\vec{M}| (\hat{\theta} \times \hat{r}) = |\vec{M}| (-\hat{z}) \text{ mismo sentido que } I \text{ corriente que existe solo en } r=R.$$

$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$

Rotacional em coord. cilíndricas

$\vec{M}$ no depende de z .

$$\vec{J}_M = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_r & rM_\theta & M_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[\left(0 - \frac{\partial}{\partial z} (rM_\theta) \right) \hat{r} + \dots + r(0 - 0) \hat{\theta} + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial r} (rM_\theta) - 0 \right) \hat{z} \right]$$

$\vec{M} = M \hat{\theta}$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rM_\theta) \hat{z}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_M &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(1 - \frac{\mu(r)}{\mu_0} \right) \frac{V_0 R}{2hL} \right) \hat{z} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\mu_0 - \mu_0 \left(1 + \frac{r}{R} \right) \right) \frac{V_0 R}{2hL} \right) \hat{z} \\
 &= \hat{z} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_0 - r \mu_0 - \frac{\mu_0 r^2}{R} \right) \frac{V_0 R}{2hL} \right) = -\frac{V_0 R \mu_0}{2hL R} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) \hat{z} \\
 \vec{J}_M &= -\frac{V_0 R \mu_0}{2hL R} 2r \hat{z} = -\frac{V_0 \mu_0}{hL} \hat{z}
 \end{aligned}$$

$$I = \int J \cdot d\vec{A}$$