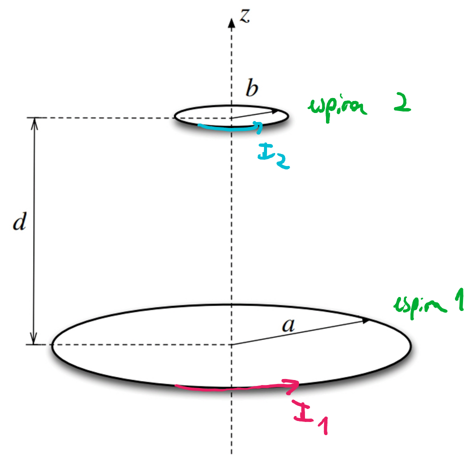
Auxiliar 20

P1) Para obtener el coeficiente de inductancia mútua, interesa conocer cuánto es el flujo magnético enlazado en una de las espiras, debido al campo generado por la corriente que circula en la otra de las espiras. Así

$$M = \frac{\Phi_{1\to 2}}{I_1} = \frac{\Phi_{2\to 1}}{I_2}$$

flujo enlazado en la espira 2 debido a corriente en la espira 1.

flujo enlazado en la espira 1 debido a corriente en la espira 2.



Así, podemos calcular M a partir de cualquiera de las corrientes. Sin embargo, si pensamos en calcular $\vec{B}_2$ (campo generado por I_2), luego calcular $\Phi_{2\to 1}$ será muy complejo por la integral que se debe resolver. Sin embargo, resulta más cómodo calcular $\vec{B}_1$, y como $b \ll a$, este es prácticamente constante por lo que calcular $\Phi_{1\to 2}$ es directo. Así, calculando el campo mediante B-S:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I_1\, d\vec{l}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = d\hat{z} \;;\; \vec{r}' = a\hat{r}', \\ d\vec{l}' = a\,d\theta'\,\hat{\theta}', \quad \theta' \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I_1\, a\, d\theta'\, \hat{\theta}' \times (d\hat{z} - a\hat{r}')}{\|d\hat{z} - a\hat{r}'\|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I_1 a d\, d\theta'\, \overbrace{(\hat{\theta}' \times \hat{z})}^{\hat{r}'} - I_1 a^2\, d\theta'\, \overbrace{(\hat{\theta}' \times \hat{r}')}^{-\hat{z}}}{(d^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\cancel{\int_0^{2\pi} \frac{I a d\, \hat{r}'}{(d^2+a^2)^{3/2}}\, d\theta'}^{\,0} + \int_0^{2\pi} \frac{I a^2\, \hat{z}}{(d^2+a^2)^{3/2}}\, d\theta'\right] \Bigg/ \int_0^{2\pi} \hat{r}'\, d\theta' = 0$$

$$= \frac{\mu_0}{\cancel{4\pi}_{\,2}}\, \frac{I_1 a^2\, \hat{z}}{(d^2+a^2)^{3/2}} \cancel{\int_0^{2\pi} d\theta'}^{\,2\pi} \iff \boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(d^2+a^2)^{3/2}}\, \hat{z}}$$

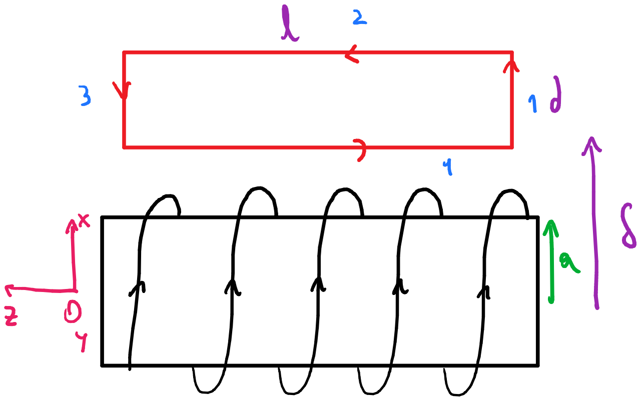
Tal como se dijo al comienzo, como b<<a, podemos asumir que el campo es cte en la espira e igual al valor en el eje (calculado anteriormente). Así

$$\Phi_{1\to 2} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \underset{\vec{B}_1 = \text{cte}}{=} B_1 \underbrace{\iint dS}_{A_2} = B_1 A_2 \Leftrightarrow \boxed{\Phi_{1\to 2} = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(d^2+a^2)^{3/2}} \cdot \pi b^2}$$

De manera que, finalmente, el coeficiente buscado se puede calcular mediante:

$$M = \frac{\Phi_{1\to 2}}{I_1} = \frac{\dfrac{\mu_0 \cancel{I_1} a^2}{2(d^2+a^2)^{3/2}} \cdot \pi b^2}{\cancel{I_1}} \Leftrightarrow \boxed{M = \frac{\mu_0 \pi b^2 a^2}{2(d^2+a^2)^{3/2}}}$$

P2 a) Dado que la bobina es de largo L, y tiene N vueltas, las vueltas por unidades de largo son N/L. Luego, para determinar la inductancia propia L, debemos darnos una corriente I arbitraria en la bobina, y ver el flujo que esta enlaza. Sea esta corriente I, la cual genera un campo $\vec{B}$ al interior de la bobina, por simetría y RMD $\vec{B} = B\hat{k}$. De esta manera, considerando un loop de Ampère de lados l y d (arbitrarios), ubicado a una distancia δ cualquiera, por ley de Ampère se obtiene que



$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad / I_{enc} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

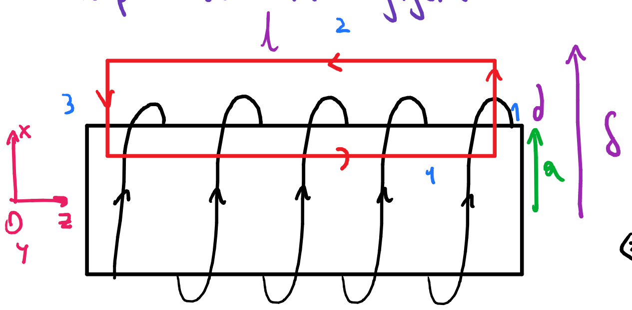
$$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{\int_{\delta}^{\delta+d} B(x)\hat{k}\cdot dx\hat{x}}}_{0} + \int_{l}^{0} B(\delta+d)\,\hat{k}\cdot dz\,\hat{k} + \underbrace{\cancel{\int_{\delta+d}^{\delta} B(x)\hat{k}\cdot dx\hat{x}}}_{0} + \int_{0}^{l} B(\delta)\,\hat{k}\cdot dz\,\hat{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow B(\delta+d)\int_{l}^{0} dz + B(\delta)\int_{0}^{l} dz = 0 \Leftrightarrow -B(\delta+d)\cancel{l} + B(\delta)\cancel{l} = 0 \Leftrightarrow \boxed{B(d+\delta) = B(\delta)}$$

Como d y δ son arbitrarios, podemos escoger un $\delta \approx a$ (loop cercano a la bobina) y $d \to \infty$ (loop infinitamente ancho). Dado que la igualdad se mantiene, implica que el campo muy cerca de la bobina es igual al campo infinitamente lejos de esta. Como el campo infinitamente lejos de la bobina debe ser nulo, se concluye que muy cerca de esta también. Luego, el campo es nulo en todo punto fuera de la bobina.

$$\Rightarrow \vec{B}(\rho > a) = 0$$

Por otro lado, el campo dentro de la bobina se obtiene considerando el loop de la figura



$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad / I_{enc} = \underbrace{\frac{N}{L}}_{\text{vueltas por unidad de largo}} l\, I$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_1 \vec{B}\cdot d\vec{l}}_{B\hat{k}\cdot dx\hat{x} = 0} + \underbrace{\int_2 \vec{B}\cdot d\vec{l}}_{\vec{B} = 0} + \underbrace{\int_3 \vec{B}\cdot d\vec{l}}_{B\hat{k}\cdot dx\hat{x} = 0} + \int_4 \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

$$\Leftrightarrow \int_0^l B\hat{k}\cdot dz\hat{k} = \mu_0 \frac{N}{L} l I \Leftrightarrow B \underbrace{\cancel{\int_0^l dz}}_{l} = \mu_0 \frac{N}{L} l I \Leftrightarrow B\cancel{l} = \mu_0 \frac{N}{L} \cancel{l} I$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\rho<a) = \mu_0 \frac{N}{L} I \hat{k}}$$

A continuación, a partir del campo $\vec{B}$ que genera la bobina, calculamos el flujo que esta enlaza:

sección circular de la bobina

$$\Phi = N \iint \vec{B}\cdot d\vec{S} \underset{B=\text{cte}}{=} N B \underbrace{\cancel{\iint dS}}_{A} = N\cdot B\cdot A \Rightarrow \Phi = N \cdot \frac{\mu_0 N I}{L}\cdot \pi a^2$$

$$\Leftrightarrow \Phi = \frac{N^2 \mu_0 I \pi a^2}{L}$$

Así, la inductancia propia está dada por

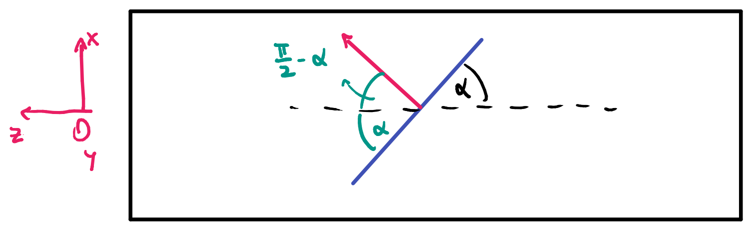
$$L = \frac{\Phi}{I} \Rightarrow L = \frac{\frac{N^2\mu_0 \cancel{I} \pi a^2}{L}}{\cancel{I}} \Leftrightarrow \boxed{L = \frac{N^2 \mu_0 \pi a^2}{L}}$$

b) En este caso, se debe evaluar el flujo de la bobina en la espira. Para ello, usamos que

$$\Phi_{1\to 2} = \iint \vec{B}_1\cdot d\vec{S} = \iint \vec{B}_1 \cdot dS\hat{n}$$

/ $\vec{B}_1$: campo generado por corriente I_1 en la bobina

donde $\hat{n}$ (la orientación de la espira se deduce como sigue)



$$\Rightarrow \hat{n} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\hat{k} + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\hat{\imath}$$

$$\Leftrightarrow \hat{n} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{k}$$

tal que, finalmente, el flujo se obtiene como sigue

$\vec{B}$ obtenido antes, con $I = I_1$

$$\Phi_{1\to 2} = \iint \vec{B}_1\cdot dS\hat{n} = \int_0^{2\pi}\int_0^{b} \overbrace{\mu_0 \frac{N}{L} I_1 \hat{k}} \cdot \rho\, d\rho\, d\phi \left(\cancel{\cos\alpha\,\hat{\imath}} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{k}\right)$$

$$= \mu_0 \frac{N}{L} I_1 \operatorname{sen}\alpha \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^{b} \rho\, d\rho\, d\phi}}_{\pi b^2} = \mu_0 \frac{N}{L} I_1 \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2$$

Notamos el subíndice $1\to 2$ pues corresponde al flujo enlazado en la espira (circuito 2) por la corriente que circula en la bobina (circuito 1)

Así, el coeficiente de inductancia mutua se obtiene mediante

$$M = \frac{\Phi_{1\to2}}{I_1} = \frac{\mu_0 \frac{N}{L} \cancel{I_1} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2}{\cancel{I_1}} \Leftrightarrow \boxed{M = \mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2}$$

c) Si en la espira circula corriente I_2, esto induce un campo magnético que es enlazado por la bobina. Calcularlo es sumamente difícil, pero a partir del coeficiente de inductancia mútua, obtener ese flujo ($\Phi_{2\to1}$) es directo, de manera que

$$M = \frac{\Phi_{1\to2}}{I_1} = \frac{\Phi_{2\to1}}{I_2} \Leftrightarrow \Phi_{2\to1} = M I_2 = \mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 I_2$$

Luego, si la corriente es de la forma $I_2 = I_0 \operatorname{sen}(wt)$,

$$\Rightarrow \Phi_{2\to1} = \mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 I_0 \operatorname{sen}(wt)$$

Así, este flujo variable en la bobina induce una fem, i.e. una diferencia de potencial en ella, que se calcula como

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 I_0 \operatorname{sen}(wt)\right] = -\mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 I_0 w \cos(wt)$$

Finalmente, dado que $-1 \leq \cos(wt) \leq 1$, la máxima diferencia de potencial se obtiene acotando $\mathcal{E}$, de manera que

$$\boxed{|\mathcal{E}_{máx}| = \mu_0 \frac{N}{L} \operatorname{sen}\alpha\, \pi b^2 I_0 w}$$