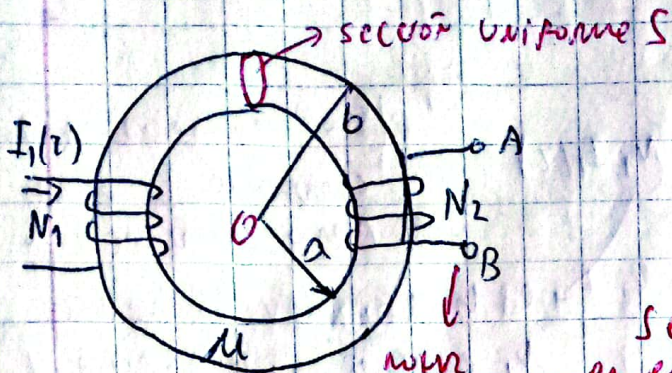


(Aux 19)



mu que existe
dentro no hay corriente.

$\vec{B}$ y $\vec{H}$ se consideran constantes y concéntricos al interior del anillo.

Se fija un sistema de referencia en el centro O con coordenadas polares.

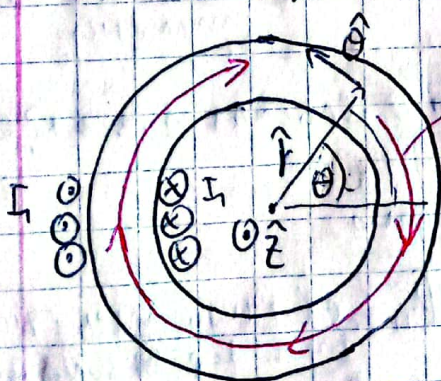
a) ¿ $\vec{H}$ y $\vec{B}$ en el medio o al interior de la sección del toroide?

Por ley de Ampere $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{encerrada}$

Se parte de esta ecuación aprovechando que se está en un medio homogéneo con permeabilidad $\mu \neq \mu_0$ la del vacío.

Interesa calcular $\vec{H}$ solo en interior del anillo homogéneo como fue visto de este, se considera el campo $\vec{H} = 0$ $\begin{cases} \vec{H}(r < a) = 0 \\ \vec{H}(r > b) = 0 \end{cases}$

Se cumple ley $\vec{B} = \mu \vec{H}$ y tomando un sistema de referencia cilíndrico con origen el centro del toroide y con coordenadas (r, θ, z)



$\vec{B}, \vec{H} \Rightarrow$ con esta apropiación, se puede inferir la dirección de $\vec{B}$ y $\vec{H}$ según la regla de la mano derecha

$$\Rightarrow \vec{B} = B(-\hat{\theta}), \quad \vec{H} = -H(\hat{\theta})$$

Van en sentido contrario.

de $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$, $d\vec{l} = r d\theta \hat{\theta}$ (la parametrización de la trayectoria del campo)

$\theta \in (\pi, -\pi)$ $\rightarrow$ esto es solo para comodín el camino de integración con la dirección de $\vec{H}$

$$\rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} H(r) (-\hat{\theta}) \cdot \hat{\theta} r d\theta = -H(r) r \theta \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi r H(r)$$

por otro lado, $I_{oc} =$

$$(-N_1 I_1 / r)$$

el "-" es debido a que
la corriente I_1 entra
al punto en consideración -

es la contribución de las
 N_1 espiras de la bobina 1.

$$\rightarrow H(r) = \frac{-N_1 I_1(r)}{2\pi r}$$

$\Rightarrow$ Como para evaluar el meso del interior del toroide

$$\Rightarrow r_{meso} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \vec{H}(r_{meso}) = \frac{-N_1 I_1(r)}{\pi(a+b)} \hat{\theta}$$

Ahora para calcular la magnetización, usamos

la fórmula

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\mu \vec{H}) - \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{M}(r_{meso}) = \left(\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0} \right) \frac{N_1 I_1(r)}{\pi(a+b)} \hat{\theta}$$

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

susceptibilidad
magnética

b) ¿La inductancia propia para la primera y segunda bobina?

Estas inductancias propias se definen como

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1}, \quad L_2 = \frac{\Phi_{22}}{I_2}$$

con Φ_{11} : el flujo magnético
total que alguna

corriente I_1 sobre la

bobina 1 genera sobre esta

$$\times \Phi_{11} = N_1 \phi_{11} \quad \text{se considera el} \\ \text{aporte de las } N_1 \\ \text{espiras.}$$

Φ_{22} : es análogo de Φ_{11} pero
con alguna corriente I_2
sobre bobina 2.

$$\Phi_{22} = N_2 \phi_{22} \quad (11)$$

Φ_{11} es el flujo magnético sobre solo una de las espiras de la bobina 1. (Φ_{22} es análogo para una sola espira de la bobina 2).

$$\Phi_{11} = \iint_{\text{sección transversal bobina 1}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = |\vec{B}| \cdot S \quad \text{donde } \vec{B} \text{ (interior material) es de } \mu \text{ y } S \text{ es la sección total transversal.}$$

$$\Rightarrow \Phi_{11} = \mu |\vec{H}| S = \frac{\mu N_1 I_1 S}{\pi(a+b)}$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} = \frac{\mu N_1^2 S}{\pi(a+b)} > 0 \quad L \text{ es una cantidad escalar positiva que depende de la geometría}$$

$$= \frac{\Phi_{11}}{I_1}$$

Para Φ_{22} , imaginemos que ahora existe alguna corriente I_2 independiente de I_1 que circula en la bobina 2, este genera un campo magnético al interior del toroide al igual que el visto en parte a) pero considerando N_2 espiras, en lugar de N_1 .

$$\Rightarrow \Phi_{22} = \frac{\mu N_2 I_2 S}{\pi(a+b)} \quad (\text{análogo a } \Phi_{11})$$

$$\Rightarrow L_2 = \frac{N_2 \Phi_{22}}{I_2} = \frac{\mu N_2^2 S}{\pi(a+b)} > 0$$

¿Cuál es la inductancia mutua?

Este se define como $M = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$

Φ_{21} : flujo magnético que una corriente I_2 en la bobina 2 genera sobre la bobina 1.

$$\Rightarrow \Phi_{12} = N_2 \Phi_{12} \quad (\text{flujo mutuo total en la bobina 2})$$

Φ_{12} : flujo magnético que una corriente I_1 en la bobina 1 genera sobre la bobina 2.

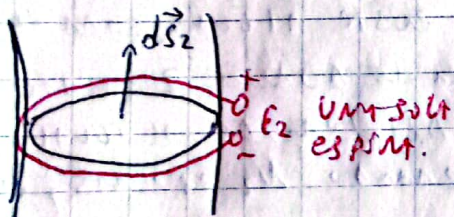
Con Φ_{12} el flujo que campo genera por I_1 , crea sobre una sola espira de la bobina 2.

$\Rightarrow \Phi_{12} = \iint_{\text{segunda bobina}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}| \cdot S = \mu |\vec{H}| \cdot S$
 $= \frac{\mu N_1 I_1 S}{\pi(a+b)}$

Campo generado por corriente I_1

$\Rightarrow \Phi_{12} = N_2 \Phi_{12} = \frac{\mu N_1 N_2 I_1 S}{\pi(a+b)} \Rightarrow M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{\pi(a+b)}$

- c) ¿La fem total inducida entre los puntos A y B del segundo Bobinado? $\rightarrow$ Notar que solo puede haber corriente inducida en la segunda bobina.
- La fem total es positiva $\Rightarrow \mathcal{E}_{AB} = N_2 \mathcal{E}_2$ donde $\mathcal{E}_2$ es la fem inducida en una sola espira del segundo Bobinado.



$\mathcal{E}_2$ se calcula a partir de la Ley de Faraday - Lenz:

$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_2}{dt}$

con Φ_2 el flujo total magnético sobre una espira de la bobina 2, es decir, consideramos el aporte de la corriente $I_1(t)$ a partir de Φ_{12} y de la corriente I_{ind} en la bobina 2. Flujo que I_{ind} genera sobre bobina 2

$\Rightarrow \mathcal{E}_2 = - \frac{d}{dt} (\Phi_{12} + \Phi_{ind}) = - \frac{d}{dt} \Phi_{12} - \frac{d}{dt} \Phi_{ind} = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu N_1 I_1(t) S}{\pi(a+b)} + \frac{\mu N_2 I_{ind} S}{\pi(a+b)} \right)$

$\mathcal{E}_{AB} = N_2 \mathcal{E}_2 = - M \frac{dI_1(t)}{dt} - L_2 \frac{dI_{ind}}{dt}$

Si se desprecian efectos de autoinducción se desprecia el segundo término.

Para determinar I_{ind} en la bobina 2, se descarta

el término $I_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{R_2}$ con R_2 la resistencia de la bobina 2, $\mathcal{E}_{12}$ la fem inducida debido a Φ_{12} sobre una espira de la bobina 2.

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{12} = -\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial t} = -\frac{\mu N_1 S}{\pi(a+b)} \frac{\partial I_1}{\partial t} \Rightarrow \text{por ley de Ohm.}$$

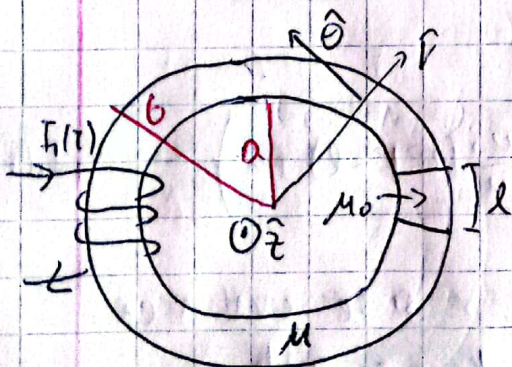
$$I_{ind} = \frac{-\mu N_1 S}{\pi(a+b) R_2} \frac{\partial I_1}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{AB} = -M \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} - L_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\mu N_1 S}{\pi(a+b)} \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} \right)$$

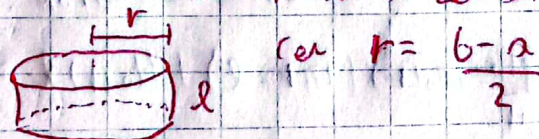
$$\mathcal{E}_{AB} = -M \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} + \frac{\mu N_1 S L_2}{\pi(a+b)} \frac{\partial^2 I_1(t)}{\partial t^2}$$

Fem total inducida sobre la bobina 2

- d) Si se reemplaza la bobina 2, por un "entrehierro" (un espacio de separación del material ferroso) con un material conductor con conductividad σ . Se busca $\vec{B}$ y $\vec{H}$

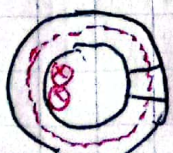


Entrehierro se aproxima con dimensiones:



Para cálculo de $\vec{H}$ al interior del toroide y usando el mismo sistema de referencia de las partes anteriores

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_0} \vec{H}_0 \cdot d\vec{l} = I_{encerrada} = N I_1(t) - \vec{E}$$



Como es sobre un loop cerrado, se separa en 2 regiones, el material ferroso y el entrehierro.
 $\rightarrow$ A que la corriente induce una

$$\int_{P_1} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{con } d\vec{\ell} = r d\theta \hat{\theta}, \quad \theta \in (2\pi -$$

y se asume que ambos campos son constantes respecto a las variables de integración

$$\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H(\text{longo del loop})$$

$$\rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{P_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_{P_0} \vec{H}_0 \cdot d\vec{\ell} = H_1(r)(2\pi r - \ell) + H_0(r)\ell = -N_1 I_1(r)$$

perimetro
total
↑
longo
exteriormente

Se observa que ocurre en la interfaz

$$\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \downarrow \mu \\ \downarrow \downarrow \downarrow \mu_0 \end{array} \downarrow (-\hat{\theta})$$

Como $\vec{B}$ y $\vec{H}$ poseen la misma dirección en la interfaz y la componente radial de $\vec{B}$ coincide con $(-\hat{\theta})$, entonces se cumple que

$B_{1n} = B_{2n}$ (lo cual es siempre verdad) y esto implica que

$\vec{B}_0 = \vec{B}_1$ es el mismo campo magnético para ambos medios.

$$\Rightarrow \mu_0 \vec{H}_0 = \mu \vec{H}_1 \Rightarrow \boxed{H_1 = \frac{\mu_0}{\mu} H_0}$$

Sustituyendo esta expresión:

$$\frac{\mu_0}{\mu} H_0(r)(2\pi r - \ell) + H_0(r)\ell = H_0 \left(\frac{\mu_0}{\mu} (2\pi r - \ell) + \ell \right) = -N_1 I_1(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_0(r) = \frac{-N_1 I_1(r)}{\left(\frac{\mu_0}{\mu} (2\pi r - \ell) + \ell \right)} \hat{\theta}}$$

y si se evalúa en $r_{med} = \frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_0(r_{med}) = \frac{-N_1 I_1(r) \mu \hat{\theta}}{\ell(\mu - \mu_0) + \mu_0 \pi(a+b)}}$$

$$\text{y } \boxed{\vec{B} = \frac{-N_1 \mu_1 \mu_0 I_1(r) \hat{\theta}}{\ell(\mu - \mu_0) + \mu_0 \pi(a+b)}}$$

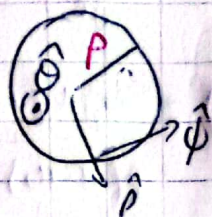
$$\boxed{\vec{H}_1(r_{med}) = \frac{-N_1 I_1(r) \mu_0 \hat{\theta}}{\ell(\mu - \mu_0) + \mu_0 \pi(a+b)}}$$

Además, hay que calcular el flujo total producido de la
 Bateria 1. (Se define un nuevo sistema de referencia del disco
 sea un elemento de superficie transversal
 con dirección $(\pm \hat{\theta})$)

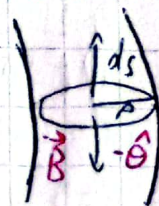
$$d\vec{s} = \rho d\rho d\phi$$

$$\rho \in (0, R)$$

$$\phi \in (0, 2\pi)$$



Sistema de referencia



El interior
del material
conductor es.

Se usa un área
de radio $\rho < \frac{(b-a)}{2}$

Flujo
Sobre
disco
radio ρ .

elemento para area

$$\Phi = N_1 \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^R - \frac{N_1^2 \mu \mu_0 I_1(r)}{2(\mu - \mu_0) + \mu_0 \pi (a+b)} \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} \rho d\rho d\phi$$

$$\Phi = - \frac{N_1^2 \mu \mu_0 I_1(r) \pi R^2}{2(\mu - \mu_0) + \mu_0 \pi (a+b)}$$

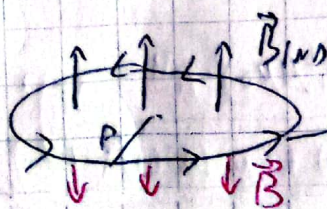
$$\Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = + \frac{N_1^2 \mu \mu_0 \pi R^2}{2(\mu - \mu_0) + \mu_0 \pi (a+b)} \frac{\partial I_1(r)}{\partial t}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$$

La integración es sobre un loop
que define una espiral
circular ubicada en el extremo

Dado que existe una fem en el material conductor
del extremo, es de esperar que haya una corriente inducida
la cual servirá como una batería.

y para que la corriente inducida en el material conductor
provoque un campo magnético inducido que se oponga al
cambio de flujo Φ proveniente de $\vec{B}$, $\Rightarrow$ la dirección de $\vec{E}$
debe ser en $\hat{\phi}$ por regla de la mano derecha.



$$\Rightarrow \vec{E} = E(\rho) \hat{\phi} \quad y \quad d\vec{l} = \rho d\phi, \quad \phi \in (0, 2\pi)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} E(\rho) \rho d\phi = 2\pi \rho E(\rho)$$

Se nos da
el valor

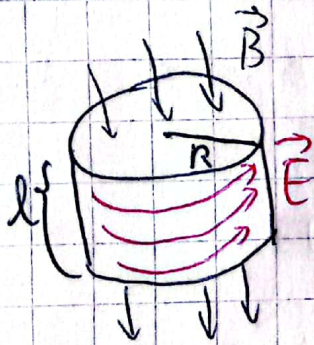
=> por ley de Lenz - Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \epsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\Rightarrow 2\pi R E(R) = \frac{N_1^2 \mu \mu_0 \pi R^2}{2(\ell(\mu - \mu_0) + \mu_0 \pi(a+b))} \frac{\partial I_1(t)}{\partial t}$$

=> El campo eléctrico inducido es:

$$\vec{E}(R) = \frac{N_1^2 \mu \mu_0 R}{2(\ell(\mu - \mu_0) + \pi \mu_0(a+b))} \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} \hat{\phi}$$



Entonces, la potencia disipada en el material conductor viene dado por:

$$\iiint \vec{j} \cdot \vec{E} \, dv = P$$

$$R = \left(\frac{b-a}{2} \right)$$

donde dv es el elemento infinitesimal de volumen del material conductor

$$dv = r \, dr \, d\phi \, d\theta, \quad r \in (0, R), \quad \phi \in (0, 2\pi), \quad \theta \in (0, \ell)$$

$$\vec{j} = g \vec{E}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = g |\vec{E}|^2$$

↓
aproximación
con el promedio

$$\Rightarrow P = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{N_1^2 \mu \mu_0}{2(\ell(\mu - \mu_0) + \pi \mu_0(a+b))} \frac{\partial I_1(t)}{\partial t} \right)^2 g r^3 \, dr \, d\phi \, d\theta$$

$$P = \frac{g \ell 2\pi (N_1^2 \mu \mu_0 \frac{\partial I_1}{\partial t})^2}{2(\ell(\mu - \mu_0) + \pi \mu_0(a+b))^2} \frac{R^4}{4} = \frac{g \ell \pi (N_1^2 \mu \mu_0)^2 R^4}{2(\ell(\mu - \mu_0) + \pi \mu_0(a+b))^2} \left(\frac{\partial I_1}{\partial t} \right)^2$$