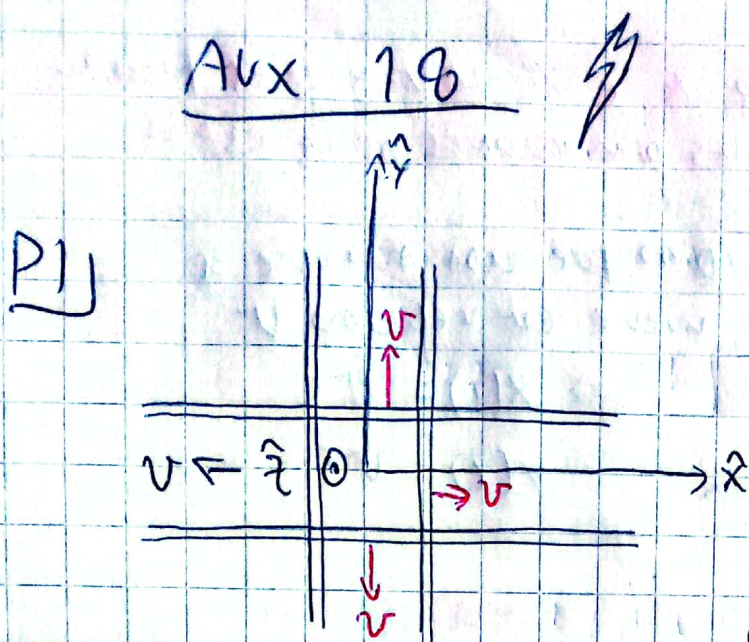




4 hilos conductores
infinitos rectos, paralelos
a los ejes x y y los cuales
parten desde el origen
con velocidades constante v

Esta alambre presenta
una "densidad resistiva"

ρ (Ω/m) y existe un campo magnético
en dirección $\hat{z}$ alternante.

$$\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \hat{z}$$

$\rightarrow$ cte

¿Cuál es la corriente inducida en el circuito eléctrico
en el tiempo?

Nos podemos imaginar que estos hilos según
como están dispuestos, forman siempre un
circuito cerrado cuadrado, lo que vendría a ser
una "espira cuadrada" de área variable en el
tiempo.

Por otro lado, existe este campo magnético externo
el cual también es variable por lo que podemos esperar
que se induzca una $\mathcal{E}$ en la espira cuadrada dado
por la ley de Faraday-Lenz

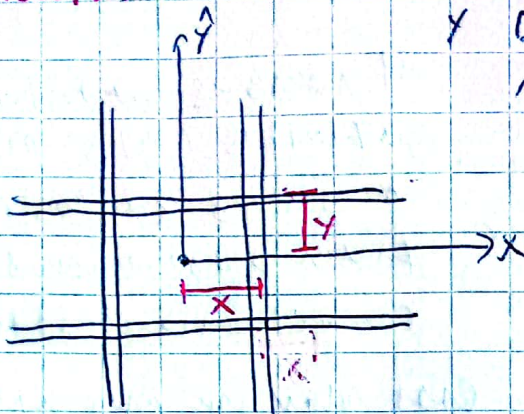
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{con } \Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Flujo magnético

con $d\vec{s}$ el área infinitesimal de la sección
de la espira cuadrada,

$$d\vec{s} = dx dy \hat{z} \quad \text{y } x \in (-x, x), y \in (-y, y)$$

pero notamos que tanto x e y varían en el tiempo.
ya que x e y son las dimensiones de la espiral
cuadrada



y como que esta armadura se
mueve con velocidad v

$$\Rightarrow x(t) = vt$$

$$y(t) = vt$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_{-x}^x \int_{-y}^y B_0 \cos(\omega t) \hat{z} \cdot \hat{z} dx dy = B_0 \cos(\omega t) \int_{-x}^x \int_{-y}^y dx dy$$

$$= B_0 \cos(\omega t) (2x)(2y) = 4B_0 xy \cos(\omega t)$$

$$= 4B_0 (vt)^2 \cos(\omega t)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 8B_0 v^2 t \cos(\omega t) - 4B_0 (vt)^2 \sin(\omega t) \omega$$

$$= 4B_0 v^2 t (2 \cos(\omega t) - t \omega \sin(\omega t))$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 4B_0 v^2 t (t \omega \sin(\omega t) - 2 \cos(\omega t))$$

$$\Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} \text{ Ley de Ohm}$$

$R \rightarrow l?$

notamos que esta armadura de la "espiral cuadrada"
posee la "densidad resistiva" r

$\Rightarrow$ la resistencia por armadura sera $r \cdot (\text{longitud de la armadura})$

$$\Rightarrow R_{\text{armadura}} = r \cdot 2x = r \cdot 2vt \Rightarrow R_{\text{total}} = 4 \cdot R_{\text{armadura}}$$

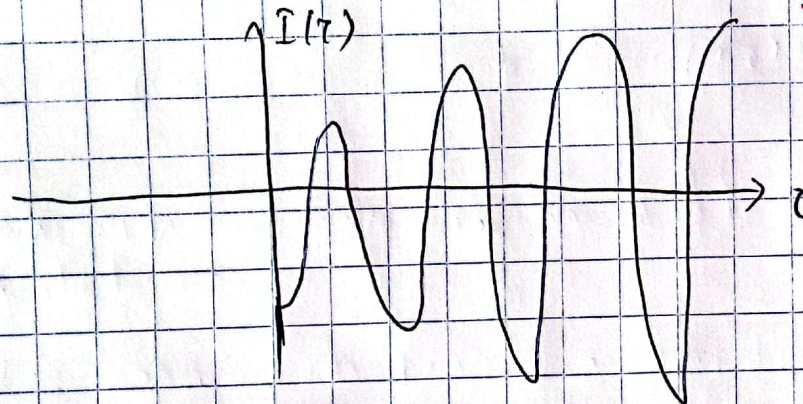
$$\Rightarrow R_{\text{tot}} = 8rVz$$

$$\Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{tot}}} = \frac{qB_0 V^2 z (\tau \omega \sin(\omega \tau) - 2 \cos(\omega \tau))}{8rVz}$$

$$I = \frac{B_0 V}{2r} (\tau \omega \sin(\omega \tau) - 2 \cos(\omega \tau))$$

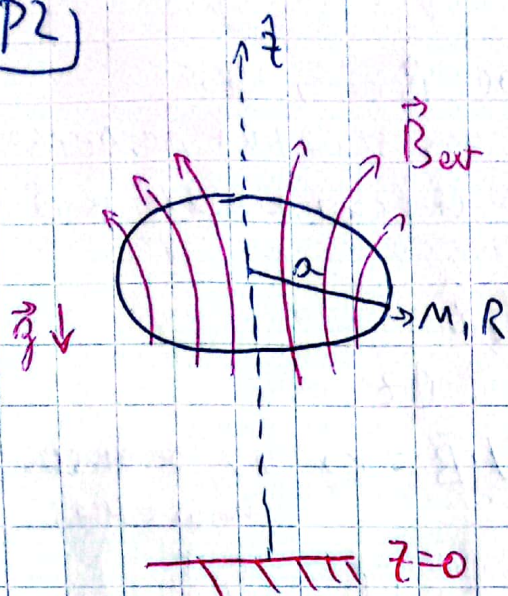
Corriente oscilante dada por efecto de
campo magnético variable.

Notm que según el tiempo, este será
positiva o negativa.



→ aumenta en
magnitud debido
al factor
 $\tau \omega \sin(\omega \tau)$
y es debido al
aumento progresivo
del área del
circular.

P2)



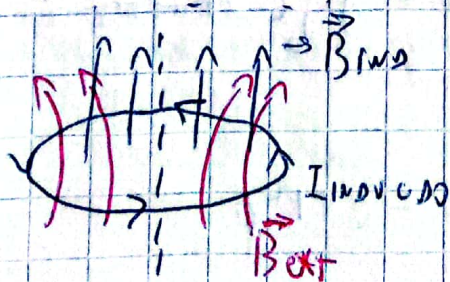
Se fija un origen en $z=0$
USANDO COORDENADAS CILÍNDRICAS

Espin circular de radio a ,
masa M , resistencia R
se deja caer desde $z=0$
por efecto de la gravedad
y existe además un campo
magnético externo simétrico
con respecto al eje $\hat{z}$ y cuya
componente en $\hat{z}$ es $B_z = Cz$
con C conocido.

a) Dado que la ley de FARADAY-LENZ dice que

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\iint \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{S}_{espin} \right) \text{ con } d\vec{S}_{espin} = dS \hat{z}$$

La fem producida en la espin provoca una corriente
en un sentido tal que el campo magnético que
esta provoca ($\vec{B}_{inducido}$) será opuesto al cambio de
 $\vec{B}_{ext}$, por lo que desde el punto de vista de la espin
ayudando, este vea que $\vec{B}_{ext}$ a pesar de siempre estar
atravesándolo en sentido $+\hat{z}$, su módulo irá disminuyendo
debido a la combinación $B_z = Cz$ dado que la espin
va cayendo con un z cada vez menor $\Rightarrow |\Phi(t)|$ será
también cada vez menor. (el área de la espin es constante)
por lo que según la ley de Lenz, el campo magnético inducido
por la corriente inducida deberá ser en un sentido a favor
del flujo magnético, es decir, $\vec{B}_{ind}$ apunta en el mismo
sentido que $\vec{B}_{ext}$, por lo tanto, según
regla de la mano derecha, el sentido
de la corriente que provoca a este $\vec{B}_{ind}$
será en sentido antihorario. $+\hat{\phi}$



b) No se conoce la forma exacta de $\vec{B}_{ext}$, pero
 dado que se le describe con una simetría respecto
 del eje $\hat{z}$, es de esperar que la componente en θ
 sea nula $\rightarrow \vec{B}_{ext} = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$

no se
 espera que
 exista un B_θ
 dada la
 simetría
 respecto
 a $\hat{z}$

y siempre se cumple que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ley de Gauss magnética.

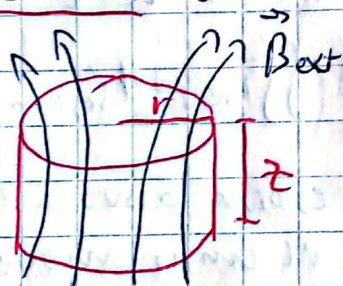
$$\Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \iiint_V 0 dV = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

teo.
 divergencia

$\rightarrow$ superficie
 cerrada

Se escoge una superficie
 gaussiana cilíndrica de radio r y
 altura z .

Se usa sistema
 de referencia con origen
 en centro cara inferior



$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0$$

con ϕ_1 : flujo de $\vec{B}$ en cara
 superior

ϕ_2 : flujo de $\vec{B}$ en cara
 inferior

ϕ_3 : flujo de $\vec{B}$ en manto
 cilíndrico

$$\phi_1 = \int_0^r \int_0^{2\pi} (B_z(r, z=z) \hat{z} + B_r(r, z) \hat{r}) \cdot \hat{r} d\theta dr' \hat{z}$$

campo magnético
 cara superior

$d\vec{S}$
 cara superior

$$\phi_1 = \int_0^r \int_0^{2\pi} C z r' d\theta dr' = C z 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^r = C z r^2 \pi$$

$\hat{r} \cdot \hat{z} = 0$
 $\perp$

$$\phi_2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} (B_z(r, z=0) \hat{z} + B_r(r, 0) \hat{r}) \cdot \hat{r} d\theta dr' \hat{z} = \int_0^r \int_0^{2\pi} C \cdot 0 r' d\theta dr' \hat{z} \cdot \hat{z} = 0$$

campo magnético
 cara inferior

$d\vec{S}$ cara
 inferior

$$\Rightarrow \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0 \Rightarrow \phi_3 = -(\phi_1 + \phi_2) = -C \pi r^2 z$$

$$\gamma \phi_3 = \int_0^z \int_0^{2\pi} (\underbrace{B_z(r, z') \hat{z} + B_r(r, z') \hat{r}}_{\substack{\text{campo magnético} \\ \text{sobre un elemento cilíndrico}}}) \cdot \underbrace{r d\theta dz' \hat{r}}_{\substack{d\vec{S} \text{ un elemento} \\ \text{cilíndrico}}} = \int_0^z \int_0^{2\pi} B_r(r, z') r d\theta dz'$$

$$= -C\pi r^2 z = 2\pi r \int_0^z B_r(r, z') dz'$$

$$-\frac{1}{2}Crz \Rightarrow B_r(r, z) = -\frac{C}{2}r$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{ext}}(r, z) = -\frac{C}{2}r \hat{r} + Cz \hat{z} \rightarrow \text{forma completa del campo magnético externo.}$$

c)

La corriente inducida se puede calcular como $I = \frac{V}{R}$ Ley de Ohm donde V es la fem inducida e

$$\Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left(\iint \vec{B}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S}_{\text{espm}} \right)$$

NO se toma el dato que solo interesa la corriente y su variación temporal.

Flujo del $\vec{B}_{\text{ext}}$ sobre la espm.

$$d\vec{S}_{\text{espm}} = r d\theta dr \hat{z} \rightarrow \theta \in (0, 2\pi), r \in (0, a)$$

$$\vec{B}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S}_{\text{espm}} = \left(-\frac{Cr}{2} \hat{r} + Cz \hat{z} \right) \cdot r d\theta dr \hat{z} = Cz r d\theta dr \hat{z} \cdot \hat{z}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} \int_0^a \int_0^{2\pi} Cz r d\theta dr = -\frac{1}{R} C \frac{d}{dt} (z \pi a^2) = -\frac{C\pi a^2}{R} \frac{d}{dt}(z)$$

$$I = -\frac{C\pi a^2}{R} \frac{dz}{dt} \rightarrow \text{velocidad de la espm.}$$

d) La fuerza sobre la espm durante su descenso se puede obtener mediante Ley de Lorentz.

$$\vec{F}_{\text{mag}} = \int I |d\vec{\ell}| \times \vec{B}_{\text{ext}} \quad \text{con } d\vec{\ell} \text{ la parametrización de la trayectoria o de la corriente}$$

$\vec{B}_{\text{ext}}$ en $r=a$ o en

$d\vec{\ell} = a d\theta \hat{\theta}$; $\theta \in (0, 2\pi)$ sentido antihorario.
 $\rightarrow$ según sentido parte a)

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \vec{F} &= \int_0^{2\pi} |I| a d\theta \hat{\theta} \times \left(-\frac{c}{2} \alpha \hat{r} + c z \hat{z} \right) \\
 &= |I| \int_0^{2\pi} a d\theta \left(-\frac{c}{2} \alpha \hat{\theta} \times \hat{r} + c z \hat{\theta} \times \hat{z} \right) \\
 &= |I| \left(\int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2 c}{2} \hat{z} d\theta + \int_0^{2\pi} c \alpha z \hat{r} d\theta \right) \\
 &= |I| \left(\frac{c \alpha^2}{2} \hat{z} 2\pi + c \alpha z \int_0^{2\pi} d\theta (\cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) \hat{y}) \right)
 \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{\text{net}} = \pi \alpha^2 c |I| \hat{z}$$

Hay una fuerza
en sentido $+\hat{z}$ contrario
al peso

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta &= 0 \\
 \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta &= 0
 \end{aligned}$$

e) La ecuación de movimiento de la espira durante su caída es.

$$m \ddot{z} = -mg + \pi \alpha^2 c |I|$$

$$\text{de c) } I = -\frac{c \pi a^2}{R} \dot{z}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = -g + \frac{\pi \alpha^2 c}{m} \frac{c \pi a^2}{R} \dot{z}$$

$$\ddot{z} - \left(\frac{\pi \alpha^2 c}{m R} \right)^2 \dot{z} + g = 0$$

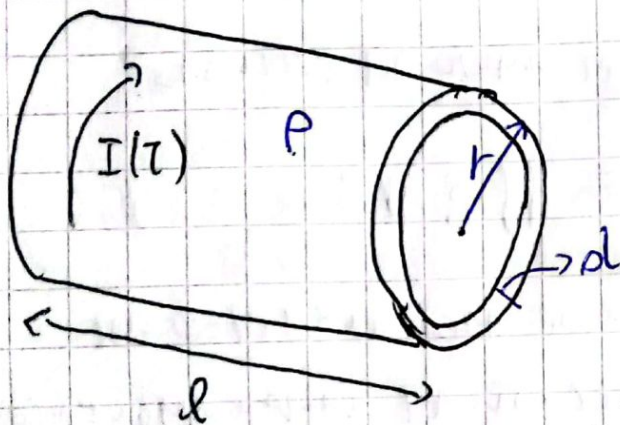
$$\Rightarrow \dot{z}_t = \frac{g R m}{(\pi \alpha^2 c)^2}$$

Resultado interesante, solo
por efecto de inducción, la
espira alcanza una velocidad constante

Es análogo al caso de un imán permanente dentro
por el interior de un tubo conductor por el cual no hay de
forma acelerada (VER VIDEO EN UN VIDEO)!!

AUXILIAR 10

P1)



HAY UNA CORRIENTE NETA $I(t)$ DEPENDIENTE DEL TIEMPO LA CUAL CIRCULA EN SENTIDO AZIMUTAL AL EJE DEL CILINDRO, ES DECIR, ALREDEDOR DE ESTE

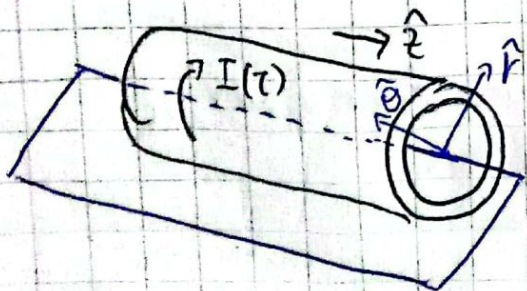
SE ASUME l LO SUFICIENTEMENTE LARGO TAL QUE SE PUESE ASUMIR QUE SOLO HABRÁ CAMPO MAGNÉTICO AL INTERIOR DEL CILINDRO.

a) ¿ $\vec{B}(r, z)$? se toma un set de coordenadas cilíndricas (r', θ', z') cuyo origen se ubica en el eje del cilindro

→ según la ley AMPERE.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

→ se toma una trayectoria cerrada como la que se ilustra en la FIGURA



→ según el sistema de referencia escogido, $\vec{B}(r) = B(r, z)(-\hat{z})$ según la regla de la mano derecha

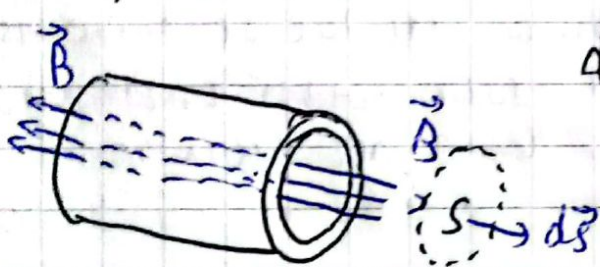
$$\rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{\ell} B(r, z) (-\hat{z}) \cdot \hat{z} dz = -B(r, z) \ell = \mu_0 I(r)$$

$$\rightarrow \vec{B}(r, z) = -\frac{\mu_0 I(r)}{\ell} \hat{z}$$

b) ¿Fem inducida sobre el manto del cilindro?

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{y} \quad \Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

con $d\vec{S}$ el elemento de área infinitesimal
transversal a la dirección del campo magnético



$$d\vec{S} = r' d\theta' dr' \hat{z}, \quad \theta' \in (0, 2\pi) \\ r' \in (0, r)$$

$$\rightarrow \Phi = \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\mu_0 I(r')}{\ell} \right) \hat{z} \cdot \hat{z} r' d\theta' dr' = -\frac{\mu_0 I(r)}{\ell} \pi r^2$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = \frac{\mu_0 \pi r^2}{\ell} \frac{\partial I(r)}{\partial t} \rightarrow \text{Fem inducida.}$$

c) ¿ $I(r)$?

Dado que el cilindro posee una resistividad, se puede encontrar la resistencia de este

$$R = \rho \frac{L}{A_{\text{manto}}} = \rho \frac{2\pi r L}{L \cdot d}$$

y por ley de Ohm $\rightarrow$ Dado que el sistema de coordenadas que se toma tiene a la corriente en sentido contrario a $\hat{\theta} \rightarrow \mathcal{E} = -I(\tau)R$

$$\mathcal{E} = -I(\tau)R = \frac{\mu_0 \pi r^2}{l} \frac{dI(\tau)}{d\tau} \rightarrow \text{E.C. Diferencial.}$$

Se propone solución $I(\tau) = A e^{\lambda \tau}$

$$\rightarrow \frac{dI(\tau)}{d\tau} = \lambda A e^{\lambda \tau} = \lambda I(\tau)$$

$$\rightarrow \left(\frac{lR}{\mu_0 \pi r^2} + \lambda \right) A e^{\lambda \tau} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{lR}{\mu_0 \pi r^2}$$

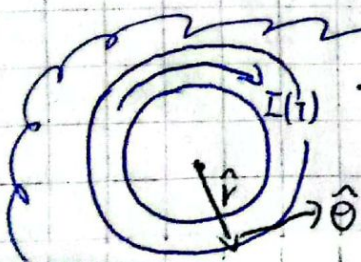
$$\rightarrow I(\tau) = A e^{-lR \tau / \mu_0 \pi r^2}$$

$$I(\tau=0) = I_0 = A \rightarrow I(\tau) = I_0 e^{-lR \tau / \mu_0 \pi r^2}$$

$$I(\tau) = I_0 \exp\left(-\frac{lR 2\pi r^2 \tau}{\mu_0 R l^2}\right) = I_0 \exp\left(-\frac{2lR \tau}{\mu_0 r}\right)$$

$\hookrightarrow$ mostrar que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau) = 0$

$\rightarrow$ toda la energía que estimula la circulación de la corriente $I(\tau)$ en el material es consumida por este



$\rightarrow$ la corriente va en un sentido contrario a $\hat{\theta}$
 $\rightarrow \vec{I}(\tau) = |\vec{I}(\tau)|(-\hat{\theta})$

$\rightarrow$ Ojo que esto depende del sistema de referencia escogido.