Pauta Auxiliar 17

En la espira se inducirá corriente, siempre y cuando en ella se induzca algún voltaje (fem). Luego, esta fem puede calcularse mediante

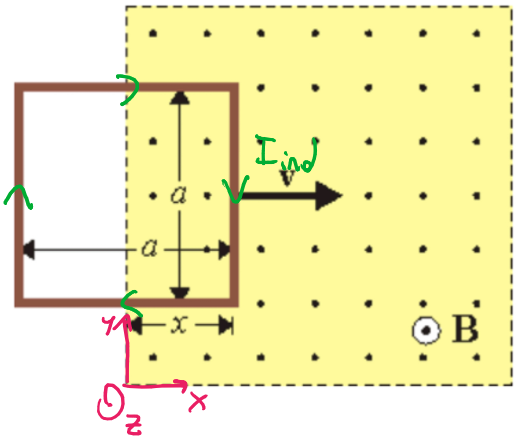
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

con Φ el flujo que se enlaza en la espira. Así, por ley de Ohm, la corriente se puede calcular mediante

$$\mathcal{E} = IR$$

Luego, debemos comenzar calculando el flujo Φ. Esto lo hacemos mediante

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



con $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, según el SR indicado. Sin embargo, ¿hacia dónde apunta $d\vec{S}$? Apuntará en la dirección dada por la regla de la mano derecha, según la corriente inducida. Ahora, ¿qué dirección tiene esta corriente? Será el sentido indicado en la figura, dada la Ley de Lenz, la que establece que la corriente se inducirá oponiéndose al cambio de flujo. Como debido al movimiento de la espira el flujo debido a $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ aumenta, la corriente buscará inducir un campo $\vec{B}_{ind} = -B_{ind}\hat{z}$, de manera de contrarrestar este aumento de flujo. Así, la corriente circula en el sentido indicado de manera de producir $\vec{B}_{ind} = -B_{ind}\hat{z}$. Luego,

$$d\vec{S} = -dS\,\hat{z} \iff d\vec{S} = -dx'dy'\,\hat{z}$$

Así, al calcular el flujo enlazado, obtenemos que

$$\Phi = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_0^a\!\!\int_0^x B_0\hat{z} \cdot -dx'dy'\,\hat{z} = -B_0 \int_0^a\!\!\int_0^x dx'dy' \iff \Phi = -B_0 a x$$

De esta manera, la fem inducida será

$$\mathcal{E} = \cancel{-}\frac{d}{dt}\left(\cancel{-}B_0 a x\right) \iff \mathcal{E} = B_0 a \dot{x} \qquad / \; \dot{x} = v$$

$$\iff \mathcal{E} = B_0 a v$$

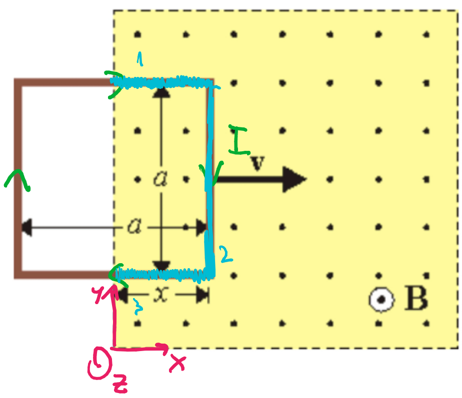
Así, por ley de Ohm

$$\varepsilon = IR \iff \boxed{I = \frac{B_0 a v}{R}}$$

b) Para obtener la fuerza que ejerce $\vec{B}$ sobre la espira, usamos la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Luego, debemos considerar la fuerza que actúa sobre c/lado de la espira



$$\Rightarrow \vec{F} = \int_1 I d\vec{l} \times \vec{B} + \int_2 I d\vec{l} \times \vec{B} + \int_3 I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= \int_0^x I dx\hat{x} \times B_0\hat{z} + \int_a^0 I dy\hat{y} \times B_0\hat{z} + \int_x^0 I dx\hat{x} \times B_0\hat{z}$$

Obs: Integramos sólo las zonas en celeste, pues son las que sienten campo magnético

$$= \int_0^x I B_0 dx \underbrace{(\hat{x}\times\hat{z})}_{-\hat{y}} + \int_a^0 I B_0 dy \underbrace{(\hat{y}\times\hat{z})}_{\hat{x}} + \int_x^0 I B_0 dx \underbrace{(\hat{x}\times\hat{z})}_{-\hat{y}}$$

$$= \cancel{-I B_0 x\hat{y}} - I B_0 a\hat{x} + \cancel{I B_0 x\hat{y}} \Rightarrow \vec{F} = -I B_0 a\hat{x}$$

Recordando que $I = \frac{B_0 a v}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\frac{B_0^2 a^2 v}{R}\hat{x}}$$

c) Usando segunda ley de Newton, se tendrá que

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -\frac{B_0^2 a^2 v}{R}\cancel{\hat{x}} = ma\cancel{\hat{x}} \quad / a = \dot{v}$$

$$\Rightarrow -\frac{B_0^2 a^2}{R} v = m\dot{v} \iff \dot{v} + \frac{B_0^2 a^2}{mR} v = 0$$

Lo que corresponde a una EDO cuya solución general es

$$v(t) = Ae^{-t/\tau}$$

con $\tau = \frac{B_0^2 a^2}{mR}$. La constante A está dada por la condición inicial

$$v(t=0) = V_0 \overset{!}{=} Ae^0 \Rightarrow A = V_0 \Rightarrow \boxed{v(t) = V_0 e^{-t/\tau}}$$