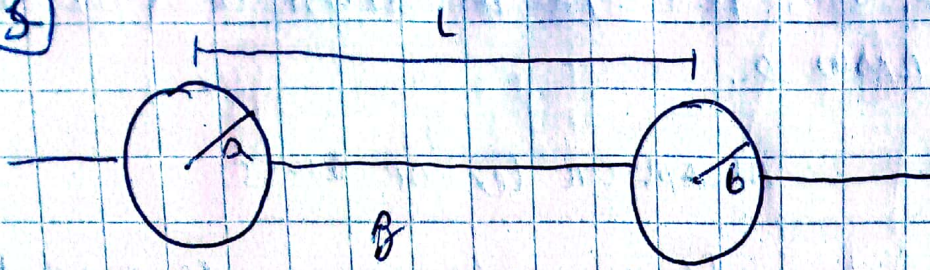


P3)



Circuito puesto a tierra de 2 esferas conductores de radios a y b y la distancia entre ellos de largo L . con $L \gg a, b$. la red de las esferas está conectado a tierra con una conductancia g

Se asume una carga $+Q$ en la esfera de la izquierda y carga $-Q$ en la esfera de la derecha. Ambas distribuidas uniformemente en la superficie de las esferas.

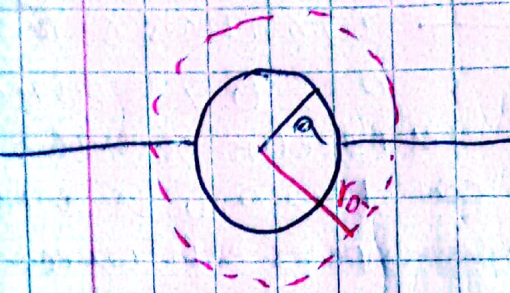
Si asumimos 2 puntos de referencia, cada uno ubicado en los centros de estas esferas. Se definen coordenadas esféricas para cada una $(\hat{r}_a, \hat{\theta}_a, \hat{\phi}_a)$ y $(\hat{r}_b, \hat{\theta}_b, \hat{\phi}_b)$

La estrategia es la siguiente:

- 1) A partir de las cargas $\pm Q$, determinar el campo eléctrico que ambas esferas generan a su alrededor considerando la diferencia de los medios ambiente.
- 2) Usar principio de superposición y definir un único origen o sistema de referencia
- 3) Calcular ΔV entre ambas conductores a partir de $\vec{E}_{\text{total}}$
- 4) Con $\vec{E}_{\text{total}}$ conocido, obtener $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ donde $\sigma \neq 0$ y con $\vec{J}$ se calcula la corriente que va de una esfera a la otra.
- 5) Usar ley de ohm $\frac{V}{I} = R$.

1) usando sup. Gaussiana esférica centrada en el centro de la esfera radio a .

Al aplicar ley de Gauss.

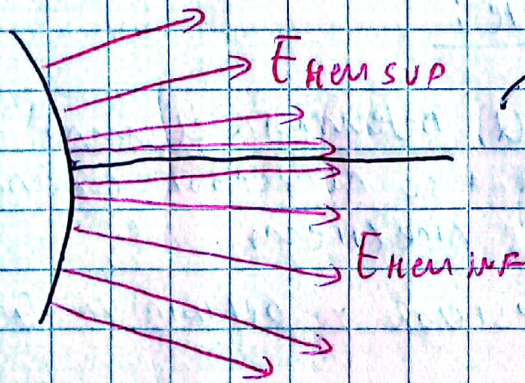


$$\oint \vec{E}_a \cdot d\vec{s} = \frac{+Q}{\epsilon_0} \quad \text{se supone que } \vec{E} = E(r_a) \hat{r}$$

$$\Rightarrow \iint_{\text{sup}} \vec{E}_{\text{hem sup}} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{inf}} \vec{E}_{\text{hem inf}} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{se supone en 2 hemisferios}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} E(r_a) r_a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} E(r_a) r_a^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ &= 2\pi r_a^2 E(r_a)_{\text{hem sup}} + 2\pi r_a^2 E(r_a)_{\text{hem inf}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

pero si vemos lo que ocurre en la interfaz entre medias



se observa que solo hay componentes paralelas a la interfaz es decir, $E_{\text{hem sup}}(\text{interfaz}) = E_{\text{hem inf}}(\text{interfaz})$

$$E_{\text{hem inf}}(\text{interfaz}) = E_{\text{iz}}$$

y siempre se cumple por conservación de flujo que $E_{\text{iz}} = E_{\text{ziz}} \Rightarrow E_{\text{hem sup}} = E_{\text{hem inf}}$

y dado que E_{hem} no depende de algún ángulo, sino solo de r_a , entonces se puede deducir que $E_{\text{hem sup}} = E_{\text{hem inf}}$ para todo ángulo

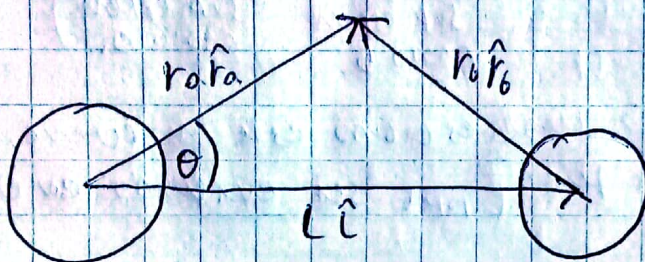
$$\Rightarrow 2\pi r_a^2 (2E(r_a)) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r_a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a^2} \hat{r}_a$$

Analógicamente, se realiza lo mismo para el campo que genera el conductor de radio b .

$$\Rightarrow \vec{E}(r_b) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b^2} \hat{r}_b$$

con r_b medida desde el centro de la esfera de radio b .

- 2) Para poder aplicar efectivamente el principio de superposición, es necesario usar un único punto de vista o referencia, es decir, debemos relacionar $r_b \hat{r}_b$ con $r_a \hat{r}_a$. Si vemos un poco de álgebra de vectores. Se define ángulo θ según la figura.



con $L\hat{L}$ un vector que define la unión de los centros de ambos esferas noting que $L\hat{L} = L\hat{r}_a (\theta=0)$

↓
vector unitario
pasante $\hat{r}_a$ en $\theta=0$, es igual a $\hat{L}$

$$\Rightarrow r_a \hat{r}_a - L\hat{L} = r_b \hat{r}_b \Rightarrow \hat{r}_b = \frac{r_a \hat{r}_a - L\hat{L}}{r_b}$$

$$\Rightarrow |r_b \hat{r}_b|^2 = |r_a \hat{r}_a - L\hat{L}|^2$$

$$= r_b^2 = r_a^2 + L^2 - 2r_a L \hat{r}_a \cdot \hat{L} \quad \text{con } \hat{r}_a \cdot \hat{L} = \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow r_b = (r_a^2 + L^2 - 2r_a L \cos(\theta))^{1/2} \rightarrow \text{se deduce también del teo. del coseno.}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_a + \vec{E}_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a^2} \hat{r}_a + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_b^2} \hat{r}_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\hat{r}_a}{r_a^2} - \frac{\hat{r}_b}{r_b^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{r}_b}{r_b^2} = \frac{1}{r_b^2} \frac{(r_a \hat{r}_a - L\hat{L})}{r_b} = \frac{r_a \hat{r}_a - L\hat{L}}{r_b^3} = \frac{r_a \hat{r}_a - L\hat{L}}{(r_a^2 + L^2 - 2r_a L \cos(\theta))^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{r_a^2} \left(\frac{\hat{r}_a - (L/r_a) \hat{L}}{(1 + (L/r_a)^2 - 2(L/r_a) \cos(\theta))^{3/2}} \right)$$

Campo eléctrico en el medio, depende de θ y r_a

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{ext}}(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\hat{r} - \frac{(L/r)\hat{r}}{\left(1 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 - \frac{2L}{r} \cos(\theta)\right)^{3/2}} \right)$$

3) Cálculo de ΔV entre sus extremos.

$$\Delta V = - \int_{\text{sup. esfera } -Q}^{\text{sup. esfera } +Q} \vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell}$$

Se debe integrar sobre una trayectoria recta que une a ambos conductores, visto desde el sistema de referencia r, θ, ϕ .

$$d\vec{\ell} = dr \hat{r} \text{ con } \hat{r}(\theta=0) = \hat{r}$$

$$r \in (L-b, a) \rightarrow \text{desde el menor al mayor potencial}$$

sup. esfera radio b

sup. esfera radio a

$\Rightarrow$ hacer como esta trayectoria, o sea a que $\vec{E}_{\text{ext}}$ sea evaluado en $\theta=0$

$$\Rightarrow \Delta V = - \int_{L-b}^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\hat{r} - \frac{(L/r)\hat{r}}{\left(1 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 - \frac{2L}{r}\right)^{3/2}} \right) \cdot dr \hat{r}$$

$\rightarrow$ no hay que evaluar de $\theta=0$

$$= - \int_{L-b}^a \frac{Q dr \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{1 - (1 - L/r)}{\left(1 - L/r\right)^{3/2}} \right) = - \int_{L-b}^a \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{1}{(1 - L/r)^2} \right)$$

$$\Delta V = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{L-b}^a \frac{dr}{r^2} - \int_{L-b}^a \frac{dr}{(r-L)^2} \right) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \Big|_{L-b}^a + \frac{1}{(r-L)} \Big|_{L-b}^a \right)$$

$$= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{L-b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a-L} - \frac{1}{(L-b-L)} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{L-b} + \frac{1}{La} \right)$$

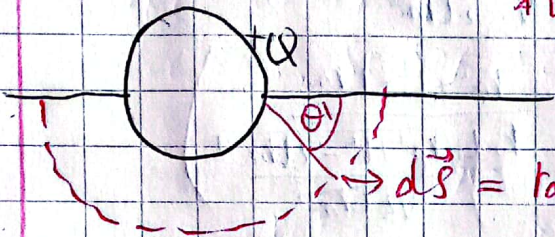
4) Cálculo de $\vec{J}$

$$\vec{J} = g \vec{E}_{int} = g \vec{E}(r_a, \theta \in \text{Hemisferio inferior})$$

ya que en el hemisferio superior $g=0$

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

y $d\vec{s}$ parametriza el hemisferio sur de un cascarón esférico de radio r_a centrado en el centro de la esfera radio a .
 → Solo el hemisferio sur dado que solo allí existe carga (carga no nula g)



usando coordenadas esféricas.

$$d\vec{s} = r_a^2 \sin(\theta') d\theta' d\phi' \hat{r}_a \text{ con } \theta' \in (0, \pi), \phi' \in (0, 2\pi)$$

notar que $\theta' = \pi - \theta \rightarrow d\theta' = -d\theta$
 $\theta'(0) = 0, \theta'(\pi) = -\pi$

solo en
nuestro

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{gQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a^2} - \frac{(1 - (L/r_a) \hat{r} \cdot \hat{r}_a)}{r_a^2 \left(1 + \left(\frac{L}{r_a}\right)^2 - \frac{2L}{r_a} \cos(\theta) \right)^{3/2}} \right) \sin(-\theta) (-d\theta) d\phi' r_a^2 \\ &= \frac{gQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_a^2}{r_a^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta d\phi' - r_a^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(r_a - L \cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta d\phi'}{(r_a^2 + L^2 - 2Lr_a \cos(\theta))^{3/2}} \right) \\ &= \frac{gQ}{4\pi\epsilon_0} \left(2\pi r_a^2 - r_a^2 \pi \left(\int_0^\pi \frac{r_a \sin(\theta) d\theta}{(r_a^2 + L^2 - 2Lr_a \cos(\theta))^{3/2}} - \int_0^\pi \frac{L \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta}{(r_a^2 + L^2 - 2Lr_a \cos(\theta))^{3/2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Sea $x = \cos(\theta) \rightarrow dx = -\sin(\theta) d\theta \rightarrow x(\theta = \pi) = \cos(\pi) = -1, x(\theta = 0) = 1$

tenemos integrales

$$\int_1^{-1} \frac{-r_a dx}{(r_a^2 + L^2 - 2Lr_a x)^{3/2}} \quad \times \quad \int_1^{-1} \frac{-Lx dx}{(r_a^2 + L^2 - 2Lr_a x)^{3/2}}$$

Sea $\beta^2 = \frac{r_a^2 + L^2}{2Lr_a} \Rightarrow I_1 = \int_1^{-1} \frac{-dx r_a}{(2Lr_a)^{3/2} (\beta^2 - x)^{3/2}}, I_2 = \frac{-L}{(2Lr_a)^{3/2}} \int_1^{-1} \frac{x dx}{(\beta^2 - x)^{3/2}}$

y según wolfram alpha

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{-L}{(2Lra)^{3/2}} \int_1^{-1} \frac{x dx}{(\beta-x)^{3/2}} = \frac{-L}{(2Lra)^{3/2}} \left(\frac{2(2\beta-x)}{\sqrt{\beta-x}} \right) \Big|_1^{-1} \\
 &= \frac{-L}{(2Lra)^{3/2}} \left(\frac{2(2\beta+1)}{\sqrt{\beta+1}} - \frac{2(2\beta-1)}{\sqrt{\beta-1}} \right) \\
 &= \frac{2L}{(2L)^{3/2} ra^{3/2}} \left(\frac{2 \left(\frac{ra^2+l^2}{2Lra} \right) + 1}{\sqrt{\frac{ra^2+l^2}{2Lra} + 1}} - \frac{2 \left(\frac{ra^2+l^2}{2Lra} \right) - 1}{\sqrt{\frac{ra^2+l^2}{2Lra} - 1}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2L} ra^{3/2}} \left(\frac{ra^2+l^2+Lra}{raL \sqrt{ra^2+l^2+2Lra}} - \frac{ra^2+l^2-Lra}{raL \sqrt{ra^2+l^2-2Lra}} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2Lra}}{\sqrt{2Lra} ra^2} \left(\frac{ra^2+l^2+Lra}{\sqrt{ra^2+l^2+2Lra}} - \frac{ra^2+l^2-Lra}{\sqrt{ra^2+l^2-2Lra}} \right) \\
 &= \frac{1}{ra^2 L} \left(\frac{ra^2+l^2+Lra}{|ra+l|} - \frac{ra^2+l^2-Lra}{|l-ra|} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{-ra}{(2Lra)^{3/2}} \int_1^{-1} \frac{dx}{(\beta-x)^{3/2}} = \frac{-ra}{(2Lra)^{3/2}} \left(\frac{2}{\sqrt{\beta-x}} \right) \Big|_1^{-1} = \frac{2ra}{(2Lra)^{3/2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta-1}} - \frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2ra} L^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{2raL}}{\sqrt{ra^2+l^2-2raL}} - \frac{\sqrt{2raL}}{\sqrt{ra^2+l^2+2raL}} \right) \\
 &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{|l-ra|} - \frac{1}{|l+ra|} \right)
 \end{aligned}$$

⇒ SUMANDO

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= \frac{1}{L} \left(\frac{1}{|l-ra|} - \frac{1}{|l+ra|} \right) + \frac{1}{ra^2 L} \left(\frac{ra^2+l^2+Lra}{|ra+l|} - \frac{ra^2+l^2-Lra}{|l-ra|} \right) \\
 &= \frac{1}{ra^2 L} \left(\frac{ra^2}{|l-ra|} - \frac{ra^2}{|l+ra|} + \frac{ra^2+l^2+Lra}{|ra+l|} - \frac{(ra^2+l^2-Lra)}{|l-ra|} \right) = \frac{1}{ra^2 L} \left(\frac{2ra-l^2}{|l-ra|} + \frac{l^2+Lra}{|l+ra|} \right) \\
 &= \frac{1}{ra^2} \left(\frac{l+ra}{|l+ra|} - \frac{l-ra}{|l-ra|} \right) = \frac{1}{ra^2} (1-1) = 0 \quad \text{si } L > ra
 \end{aligned}$$

2.2)

$$\Rightarrow I = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(2\pi - \pi \left(\frac{1}{\epsilon_0^2} (1-1) \right) \right) = \frac{qQ}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{(l-b)} + \frac{1}{(l-a)} \right)}{\frac{qQ}{2\epsilon_0}} = \frac{1}{2\pi q} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{(l-b)} + \frac{1}{(l-a)} \right)$$

Depende solo de constantes.

