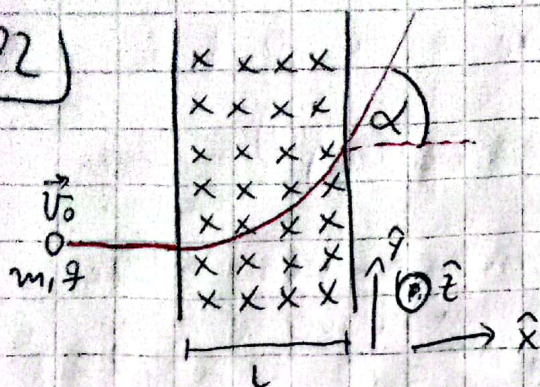
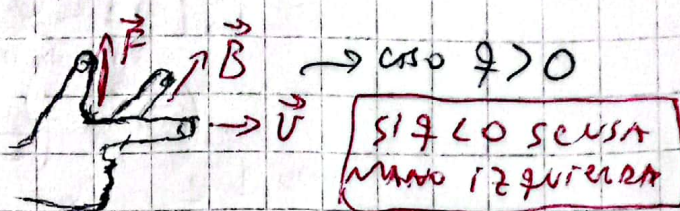


P2)



Una $q > 0$ ingresa horizontalmente a la región con un campo magnético uniforme $\vec{B} = -B_0 \hat{z}$



- 1) Una vno $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$ de la partícula que le permita atravesar completamente la región

Dado que $\vec{v}$ no es paralelo a $\vec{B} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{B} \neq 0$ por lo que según la ley de Lorentz, la partícula experimentará una fuerza perpendicular a la trayectoria de la carga. Para encontrar la forma de esta trayectoria, es necesario obtener la ecuación diferencial que modela a la trayectoria de la carga y resolverla según las condiciones de borde.

Según la 2^a ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ con $\vec{F}$ fuerza neta sobre la carga

Assumiendo una velocidad genérica para el péndulo en que la carga se encuentra en interior de la zona, $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y}$

$$\Rightarrow \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = q(\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y}) \times -B_0 \hat{z} = -q\dot{x}B_0(\hat{x} \times \hat{z}) - q\dot{y}B_0(\hat{y} \times \hat{z})$$

$$= q\dot{x}B_0 \hat{y} - q\dot{y}B_0 \hat{x}$$

y Dado que la aceleración de la carga es en direcciones $\hat{x}$ e $\hat{y}$

$$\Rightarrow m(\ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y}) = qB_0 \dot{x} \hat{y} - qB_0 \dot{y} \hat{x}$$

2 ecuaciones (1) $\ddot{x} = -\frac{qB_0}{m} \dot{y}$; (2) $\ddot{y} = \frac{qB_0}{m} \dot{x}$

Sistema ecuaciones diferenciales acopladas.

Se deriva (1) $\ddot{\dot{x}} = -\frac{qB_0}{m} \ddot{y}$ y según (2)

$$\Rightarrow \ddot{\dot{x}} = -\frac{qB_0}{m} \left(\frac{qB_0}{m} \dot{x} \right) = -\left(\frac{qB_0}{m} \right)^2 \dot{x} \Rightarrow \text{usando } v_x = \dot{x} \rightarrow \ddot{v}_x = \ddot{\dot{x}}$$

$$\Rightarrow \ddot{v}_x + \left(\frac{qB_0}{m} \right)^2 v_x = 0 \quad (3)$$

observamos que (3) corresponde a un M.A.S.

$$\Rightarrow U_x(t) = A \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + B \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \quad (4) \text{ propuesta solución}$$

Donde A y B son constantes de integración que se obtienen de las condiciones de borde.

y dado que $U_x = \dot{x}$

$$\dot{x} = U_x = \left(-A \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + B \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\right) \cdot \frac{qB_0}{m}$$

$$\text{y de (1)} \quad \ddot{x} = -\frac{qB_0}{m} \dot{y} \Rightarrow \dot{y} = -\frac{m}{qB_0} \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = U_y(t) = -\frac{m}{qB_0} \cdot \frac{qB_0}{m} \left(-A \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + B \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\right)$$

$$U_y(t) = A \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) - B \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \quad (5)$$

Ahora se pueden aplicar las condiciones iniciales a (4) y (5)

$$\vec{U} = U_x(t) \hat{x} + U_y(t) \hat{y}$$

$$\Rightarrow U_x(0) = U_0$$

$$\vec{U}(t=0) = U_x(0) \hat{x} + U_y(0) \hat{y} = U_0 \hat{x} \quad U_y(0) = 0$$

$$\Rightarrow \text{de (4)} \quad U_x(0) = U_0 = A$$

$$\text{de (5)} \quad U_y(0) = 0 = -B$$

$$\Rightarrow U_x(t) = U_0 \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right), \quad U_y(t) = U_0 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)$$

Ahora se busca resolver la ecuación de la trayectoria en el tiempo, para esto, se asume que el ion se ubica justo en el punto de entrada de la celda.

$$\Rightarrow \vec{r}(t=0) = x(0) \hat{x} + y(0) \hat{y} = 0 \hat{x} + 0 \hat{y}$$

$$x(\tau) = \int_0^{\tau} v_x(\tau') d\tau' = v_0 \int_0^{\tau} \cos\left(\frac{qB_0}{m}\tau'\right) d\tau'$$

$$x(\tau) = v_0 \frac{\sin\left(\frac{qB_0}{m}\tau\right)}{\left(\frac{qB_0}{m}\right)} \Big|_0^{\tau} = \frac{mv_0}{qB_0} \sin\left(\frac{qB_0}{m}\tau\right) - 0$$

$$y(\tau) = \int_0^{\tau} v_y(\tau') d\tau' = v_0 \int_0^{\tau} \sin\left(\frac{qB_0}{m}\tau'\right) d\tau'$$

$$y(\tau) = \frac{mv_0}{qB_0} \cos\left(\frac{qB_0}{m}\tau'\right) \Big|_0^{\tau} = \frac{mv_0}{qB_0} \left(1 - \cos\left(\frac{qB_0}{m}\tau\right)\right)$$

tenemos las soluciones para la trayectoria, entonces
tenemos toda la información para responder cualquier
DUDA SOBRE LA CARGA.

$\Rightarrow$ ¿ V_0 para que carga logre escapar de la zona?

se observa que la trayectoria será una circunferencia

dado que el radio $R^2 = x^2(t) + y^2(t)$

$$= \left(\frac{mV_0}{qB_0} \right)^2 \underbrace{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}_1$$

$$R^2 = \left(\frac{mV_0}{qB_0} \right)^2 \rightarrow \text{es constante}$$

$\Rightarrow$ si se impone que $R = L$



$$\Rightarrow L = \frac{mV_0}{qB_0} \Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{qB_0 L}{m}}$$

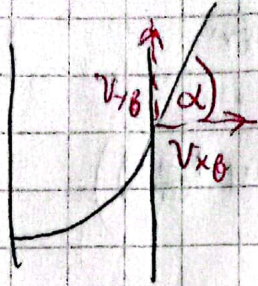
$\rightarrow$ si $V(0) < V_0$ carga no atraviesa región

si $V(0) > V_0$ carga sí atraviesa región

$\Rightarrow$ notar que V_0, B_0, L son cantidades medibles y

si se conoce $q = +1.6 \times 10^{-19} \text{ [C]}$ $\rightarrow$ se puede obtener experimentalmente el valor de la masa protón.

Si ahora nos interesa el caso en que la carga comienza en la zona, definamos a v_{x0} y v_{y0} como las velocidades en $\hat{x}$ y $\hat{y}$ cuando la carga comienza $x = L$ o más bien, en el punto final de la trayectoria.



$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}} \right)$$

$\Rightarrow$ Para v_{y0} , v_{x0} se necesita el instante T en que alcanza dicho punto

$$\Rightarrow x(T) = L = \frac{v_{0y} m}{q B_0} \sin \left(\frac{q B_0}{m} T \right) \Rightarrow T = \frac{m}{q B_0} \sin^{-1} \left(\frac{q B_0 L}{v_{0y} m} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_{x0} &= v_0 \cos \left(\frac{q B_0}{m} T \right) = v_0 \cos \left(\frac{q B_0}{m} \cdot \frac{m}{q B_0} \sin^{-1} \left(\frac{q B_0 L}{v_{0y} m} \right) \right) \\ &= v_0 \cos \left(\sin^{-1} \left(\frac{q B_0 L}{v_{0y} m} \right) \right) \end{aligned}$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \left(\frac{q B_0}{m} T \right) = v_0 \sin \left(\sin^{-1} \left(\frac{q B_0 L}{v_{0y} m} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{v_{y0}}{v_{x0}} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{v_0 \cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\tan \left(\sin^{-1} \left(\frac{q B_0 L}{v_{0y} m} \right) \right) \right)$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{q B_0 L}{v_{0y} m} \right)$$

3) Si se asume una velocidad pequeña para la carga en las 3 direcciones $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$

En la ley de Lorentz $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = +q B_0 (v_x \hat{y} - v_y \hat{x})$

$\rightarrow$ desaparece la componente en $\hat{z}$

$$\Rightarrow m \ddot{z} = 0 \rightarrow \dot{z} = C \text{ de } \rightarrow z = C\tau + \overset{\text{de } \text{integrar}}{(k)}$$

$$\times \quad v_z(0) = \dot{z}(0) = v_0 \Rightarrow \dot{z}(0) = C = v_0$$

$$\Rightarrow z(\tau) = v_0 \tau + k \quad \times \text{ si se asume que la carga parte desde el origen } z(\tau=0) = 0$$

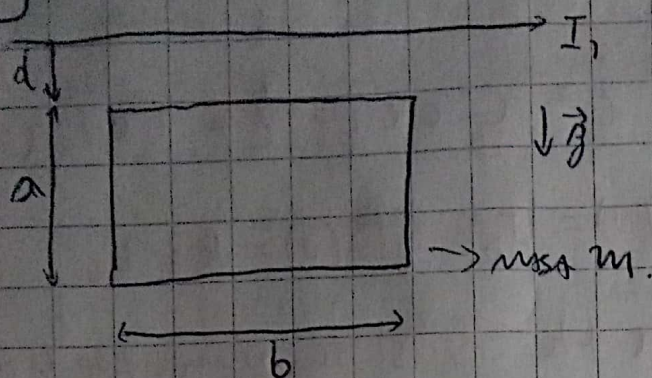
$$\Rightarrow k = 0$$

$$\times \quad z(\tau) = v_0 \tau$$

$\Rightarrow$ Si carga lo que sale de la zona de influencia del campo a un instante T (calculo de z)

$$\Rightarrow z(T) = v_0 \text{ sen}^{-1} \left(\frac{q B_0 L}{m v_0} \right) \frac{m}{q B_0} \quad //$$

B3)



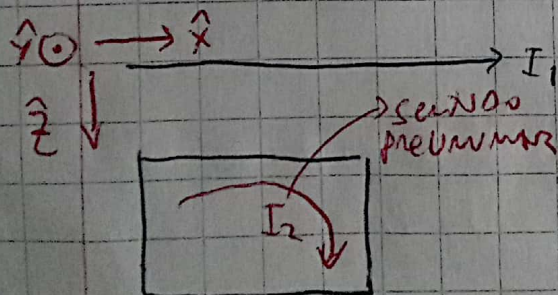
¿Cúán debe ser la corriente I_2 que debe circular por la espira para que esta permanezca en reposo en la posición señalada?

Se intuye que I_1 produce un campo magnético a su alrededor el cual induce sobre toda la espira una fuerza y si se asume una corriente I_2 en esta, cada una de las partes experimentará una fuerza según sea la dirección de la corriente I_2

Dado que $\vec{F} = \oint |I| d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}$ → $\vec{B}_{ext}$ es el campo que I_1 genera
↓ según I_2 → $d\vec{l}$ parametriza la trayectoria de la corriente I_2

$$\Rightarrow \vec{F}_{mag} = \int_{(1)} + \int_{(2)} + \int_{(3)} + \int_{(4)}$$

Si nos declinamos un sistema de referencia ubicado en el cable que porta I_1 como se muestra en la figura.

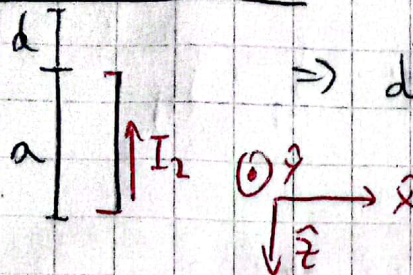


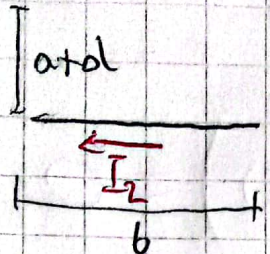
La fuerza neta sobre la espira debe ser nula

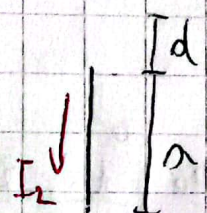
$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum \vec{F} &= \vec{F}_{peso} + \vec{F}_{mag} \\ &= mg \hat{z} + \oint |I_2| d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \end{aligned}$$

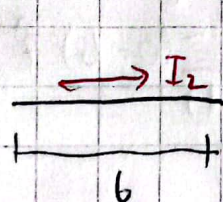
De esta ecuación se despeja I_2

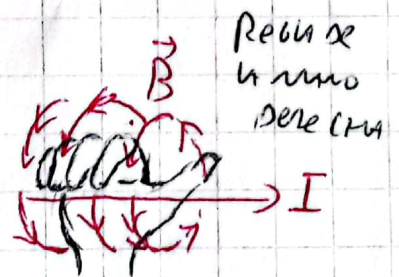
venas por tramos

(1)  $\Rightarrow d\vec{l}_1 = dz \hat{z} \quad z \in (a+d, d)$

(2)  $d\vec{l}_2 = dx \hat{x}, \quad x \in (b, 0)$
 $z = a+d$

(3)  $d\vec{l}_3 = dz \hat{z}, \quad z \in (d, a+d)$

(4)  $d\vec{l}_4 = dx \hat{x}, \quad x \in (0, b)$
 $z = d$



$\vec{B}_{ext}$? $\rightarrow$ Ley de Ampere * *

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1$ proximamente a z $\hat{z}$ $\hat{x}$ $\hat{y}$ $\hat{z}$ "TRAYECTORIA AMPERIANA" CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL EJE DEL CABLE.

 $\Rightarrow d\vec{l} = r d\theta \hat{\theta}, \quad \theta \in (0, 2\pi)$
 $\vec{B} = B(r) \hat{\theta}$

$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) r \int_0^{2\pi} d\theta \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_1$
 $\Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\theta}$

$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

se observa que en el punto xz , $\vec{r} = z\hat{z} \Rightarrow \vec{B}_{ext} = \frac{I_1 \mu_0}{2\pi z} \hat{\theta}$

$\Rightarrow$ observemos que pasa con $\int_1 + \int_3$

$$\int_{a+d}^d |I_2| dz \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi z} \hat{y} + \int_d^{a+d} |I_2| dz \hat{z} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi z} \hat{y}$$

$$= -|I_2| I_1 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left(\int_{a+d}^d \frac{dz}{z} (-\hat{x}) - \int_d^{a+d} \frac{dz}{z} (-\hat{x}) \right) = 0 \quad \text{se cancelan entre sí}$$

$$\Rightarrow \int_{(2)} = \int_b^0 |I_2| dx \hat{x} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+d)} \hat{y} = -\frac{I_2 I_1 \mu_0}{2\pi} \int_b^0 \frac{dx}{(a+d)} \hat{z}$$

Invertir el signo

$$= \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi(a+d)} (0-b) \hat{z} = +\frac{\mu_0 I_2 I_1 b}{2\pi(a+d)} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \int_{(4)} = \int_0^b I_2 dx \hat{x} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{y} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^b dx \hat{z} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi d} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \oint I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_{ext} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left(-\frac{1}{d} + \frac{1}{d+a} \right) \hat{z}$$

$$\Rightarrow 0 = mg - \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right)$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{mg 2\pi}{\mu_0 I_1 b} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right)^{-1} = \frac{2\pi mg}{\mu_0 I_1 b} \left(\frac{d(d+a)}{d+a-d} \right)$$

$$I_2 = \frac{2\pi mg d(d+a)}{\mu_0 I_1 b a}$$

$\rightarrow I_2$ va en el sentido horario efectivamente.

$\Rightarrow$ Si 2 conductes van el mismo sentido
estas sienten una fuerza atractiva

y si van en sentidos contrarios, estas sienten
una fuerza repulsiva.

