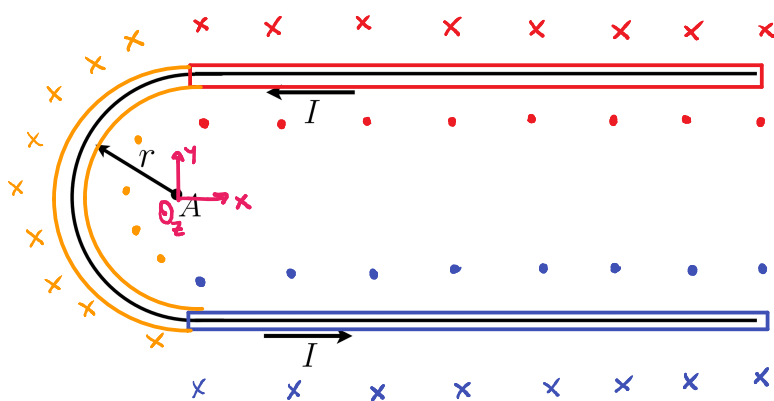


Auxiliar 14

P1 Dado que el campo magnético cumple el principio de superposición, es posible calcular el campo en A como la superposición del campo generado por el cable superior, el cable circular y el cable inferior.



$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_{\text{sup}} + \vec{B}_{\text{circ}} + \vec{B}_{\text{inf}}$$

Antes de comenzar el problema, es bueno anticipar la dirección del campo magnético, en virtud de la circulación de la corriente. Siguiendo la regla de la mano derecha, en la figura se indica la dirección de este, recordando que x representa que entra, y • que sale.

Así, en el punto A todos los campos salen del plano, por lo que el campo neta tiene la dirección de $\hat{k}$, según el SR elegido. De igual manera, es importante notar que, por simetría

$$\vec{B}_{\text{sup}}(\vec{r}=A) = \vec{B}_{\text{inf}}(\vec{r}=A)$$

Es decir, el cable de arriba produce el mismo campo en A que el cable de abajo. Esto es ya que el punto A es equidistante de ambos, y si bien en el cable de abajo la corriente circula en sentido opuesto, es por esto mismo que el campo $\vec{B}_{\text{inf}} = B_{\text{inf}}\hat{k}$, por lo que no se anula $\vec{B}_{\text{sup}}$. Luego

$$\vec{B} = 2\vec{B}_{\text{cable}} + \vec{B}_{\text{circ.}}$$

Y basta calcular el campo de sólo 1 de los cables. En particular, calcularemos el del cable de arriba, que se parametriza como

$$\vec{r}' = x\hat{x} + r\hat{y} \quad ; \quad x \in [0, \infty)^* \quad (\text{Cable muy largo se aproxima } \infty)$$

Como se quiere el campo en A, donde está el origen, $\vec{r}=0$. El elemento de línea, dada la parametrización del cable, es

$$d\vec{l} = dx\hat{x}$$

De esta manera, sustituyendo en la ley de Biot-Savart, se tendrá que

*: Ojo! uno puede pensar que como la corriente viene desde $x=\infty$ hasta $x=0$, entonces $d\vec{l} = -dx\hat{x}$. Eso es válido, pero teniendo ojo con el orden de los límites de la integral, por ejemplo, notar que para $x \in [0, \infty]$ y no $x \in [\infty, 0]$ como suele ser. Volveré a esto más adelante.

$$\vec{B}_{\text{cable}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{I dx \hat{x} \times (0 - (x\hat{x} + r\hat{y}))}{\|0 - (x\hat{x} + r\hat{y})\|^3} \quad / (I dx \hat{x}) \times (-x\hat{x}) = 0$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{I dx \cdot (-r) (\hat{x} \times \hat{y})}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I r}{4\pi} \hat{k} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \quad / \text{CV: } x = r \tan \theta \Rightarrow dx = r \sec^2 \theta d\theta$$

$$= -\frac{\mu_0 I r}{4\pi} \hat{k} \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=0} \frac{r \sec^2 \theta d\theta}{(r^2 \tan^2 \theta + r^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 I r}{4\pi} \hat{k} \int_{\pi/2}^0 \frac{\cancel{r} \sec^2 \theta}{r^3 (\underbrace{\tan^2 \theta + 1}_{=\sec^2 \theta})^{3/2}} d\theta$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \hat{k} \int_{\pi/2}^0 \frac{\cancel{\sec^2 \theta}}{\cancel{\sec^2 \theta}} d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \hat{k} \int_{\pi/2}^0 d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{cable}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \hat{k} \int_{\pi/2}^0 \cos \theta d\theta \quad \text{Sen } \theta - \text{Sen } \frac{\pi}{2} = -1 \quad \Rightarrow \vec{B}_{\text{cable}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \hat{k}$$

Luego, para el cable circular, este se parametriza mediante

$$\vec{r} = r \hat{\rho}, \quad \phi \in [\pi/2, 3\pi/2] \Rightarrow d\vec{\ell} = r d\phi \hat{\phi}$$

Nuevamente, $\vec{r}' = 0$. Sustituyendo en la ley de Biot-Savart, se tiene que

$$\vec{B}_{\text{circ}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{I r d\phi \hat{\phi} \times (0 - r \hat{\rho})}{\|0 - r \hat{\rho}\|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{-I r^2 d\phi (\hat{\phi} \times \hat{\rho})}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \hat{k} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\phi$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{circ}} = \frac{\mu_0 I}{4r} \hat{k}$$

Así, el campo magnético total en A se obtiene como

$$\vec{B} = 2\vec{B}_{\text{inh}} + \vec{B}_{\text{irr}} = 2 \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \hat{k} + \frac{\mu_0 I}{4r} \hat{k} \Leftrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \hat{k}}$$

P2) a) La densidad superficial σ en rotación genera una corriente superficial $\vec{K}$, tal que

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}$$

Como gira con $\omega = \text{cte}$, expresando en cilíndricas se tiene que

$$\vec{v} = \omega \rho \hat{\phi} \Rightarrow \vec{K} = \sigma \omega \rho \hat{\phi}$$

De igual manera, necesitamos parametrizar el disco, pues es por este que la corriente $\vec{K}$ circula. Así, el disco se parametriza como

$$\vec{r}' = \rho \hat{\rho} \quad ; \quad \rho \in [0, R] \quad , \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

estas determinan la integral $\Rightarrow dS = \rho d\rho d\phi$

Y, como se quiere el campo en un punto arbitrario sobre el eje de giro (es decir, el eje z), $\vec{r} = z \hat{k}$. Sustituyendo en ley de Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dS = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma \omega \rho \hat{\phi} \times (z \hat{k} - \rho \hat{\rho})}{\|z \hat{k} - \rho \hat{\rho}\|^3} \rho d\rho d\phi$$

$$\Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho z (\hat{\phi} \times \hat{k})}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi - \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho^2 (\hat{\phi} \times \hat{\rho})}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi \right]$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \left[z \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho \hat{\phi}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho^3 \hat{k}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi \right]$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \left[z \left(\int_0^{2\pi} \hat{\phi} d\phi \right) \left(\int_0^R \frac{\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \right) + \hat{k} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^R \frac{\rho^3}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \right) \right]$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega \hat{k}}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot \int_{\rho=0}^{\rho=R} \frac{\rho^3}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \quad / \quad \underline{\text{Cv:}} \quad \rho = z \tan \theta \Rightarrow d\rho = z \sec^2 \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \hat{k} \int_{\theta=0}^{\theta=\arctan(\frac{R}{z})} \frac{z^3 \tan^3 \theta}{(z^2 + z^2 \tan^2 \theta)^{3/2}} \cdot z \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \hat{k} \int_0^{\arctan(\frac{R}{z})} \frac{\cancel{z^3} \tan^3 \theta}{\cancel{z^3} (1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} z \sec^2 \theta d\theta$$

$\sec^2 \theta$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \hat{k} \int_0^{\arctan(\frac{R}{z})} \frac{\tan^3 \theta}{\sec \theta} d\theta = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \hat{k} \int_0^{\arctan(\frac{R}{z})} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$\sin^3 \theta = \sin \theta \sin^2 \theta = \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \hat{k} \int_0^{\arctan(\frac{R}{z})} \frac{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \hat{k} \left(\underbrace{\int_0^{\arctan(\frac{R}{z})} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta}_{(+)} - \underbrace{\int_0^{\arctan(\frac{R}{z})} \sin \theta d\theta}_{(+)} \right)$$

(V): $v = \cos \theta \Rightarrow dv = -\sin \theta d\theta$

(+):

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\arctan(\frac{R}{z})} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_{v=1}^{v=\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}} \frac{-dv}{v^2} = \frac{1}{v} \Big|_1^{\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}} = \frac{\sqrt{R^2+z^2}}{z} - 1$$

(+):

$$\int_0^{\arctan(\frac{R}{z})} \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{\arctan(\frac{R}{z})} = 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Así, se tiene que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \hat{k} \left[\frac{\sqrt{R^2+z^2}}{z} - 1 - \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \right] = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \left(\frac{\sqrt{R^2+z^2}}{z} + \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2 \right) \hat{k}$$

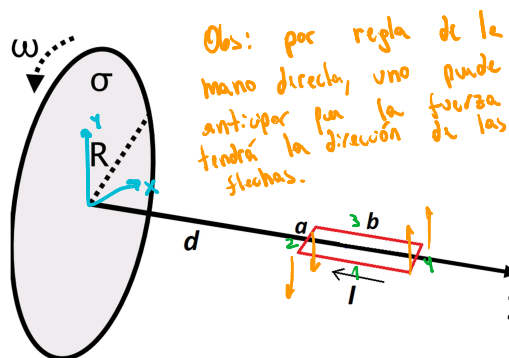
$$\Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\frac{R^2 + z^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2z \right) \hat{k}$$

b) Una vez calculado el campo, podemos calcular la fuerza sobre la espira, usando que

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = \oint I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

(currada pues la espira es un camino cerrado).

Al ser una espira rectangular, la integral la dividimos en 4 tramos, según los 4 lados de la espira. A priori, según los ejes elegidos, para los lados en el plano cambia de expresión de acuerdo a lo calculado en a), que era el campo calculado para un punto en el eje z. Sin embargo, como $a \ll R$, podemos asumir que estamos muy cerca del eje z, por lo que la expresión para el campo no cambia.



Así, calculando la integral

$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B} = \int_1 I d\vec{l} \times \vec{B} + \int_2 I d\vec{l} \times \vec{B} + \int_3 I d\vec{l} \times \vec{B} + \int_4 I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Luego, vemos 4 integral por separado.

1) En este caso, el camino se parametriza mediante

$$\vec{r} = -\frac{a}{2}\hat{x} + z\hat{k}, \quad z \in [d, d+b] \Rightarrow d\vec{l} = dz\hat{k}$$

Pero como $\vec{B} = B\hat{k}$,

$$d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \int_1 I d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \quad / \quad \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

2) La parametrización acá es

$$\vec{r} = x\hat{x} + d\hat{k}, \quad x \in [-a/2, a/2] \Rightarrow d\vec{l} = dx\hat{x}$$

De manera que

Usamos $\vec{B}(z=d)$

$$\int_2 I d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{-a/2}^{a/2} I dx \hat{x} \times \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\frac{R^2 + d^2}{\sqrt{R^2 + d^2}} - 2d \right) \hat{k} = -\frac{\mu_0 \sigma \omega I}{2} \left(\frac{R^2 + d^2}{\sqrt{R^2 + d^2}} - 2d \right) \hat{j} \int_{-a/2}^{a/2} dx$$

$\hat{x} \times \hat{k} = -\hat{j}$

$$\Rightarrow \int_2 I d\vec{l} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0 \sigma \omega I a}{2} \left(\frac{R^2 + d^2}{\sqrt{R^2 + d^2}} - 2d \right) \hat{j}$$

3) Similar a lo que ocurre en 1, la parametrización es la siguiente

$$\vec{r} = \frac{a}{2}\hat{x} + z\hat{k}, \quad z \in [d, d+b] \Rightarrow d\vec{l} = dz\hat{k} \Rightarrow d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \quad / \quad \vec{B} = B\hat{k} \wedge \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\Rightarrow \int_3 I d\vec{l} \times \vec{B} = 0$$

4) Similar a 2, únicamente por sobre $z=d+b$, y por la corriente fluye en sentido opuesto, por lo que

$$\vec{r} = x\hat{i} + (d+b)\hat{k}, \quad x \in [a/2, -a/2] \Rightarrow d\vec{l} = dx\hat{i}$$

De manera que

$$\int_4 I d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{a/2}^{-a/2} I dx \hat{i} \times \overbrace{\frac{\mu_0 \sigma w}{2} \left(\frac{R^2 + 2(d+b)^2}{\sqrt{R^2 + (d+b)^2}} - 2(d+b) \right) \hat{k}}^{\text{Usamos } \vec{B}(z=d+a)} = - \frac{\mu_0 \sigma w I}{2} \left(\frac{R^2 + 2(d+b)^2}{\sqrt{R^2 + (d+b)^2}} - 2(d+b) \right) \hat{j} \int_{a/2}^{-a/2} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_4 I d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma w I a}{2} \left(\frac{R^2 + 2(d+b)^2}{\sqrt{R^2 + (d+b)^2}} - 2(d+b) \right) \hat{j}$$

De esta manera, la fuerza sobre la espira es

$$\vec{F} = \int_2 I d\vec{l} \times \vec{B} + \int_4 I d\vec{l} \times \vec{B} = - \frac{\mu_0 \sigma w I a}{2} \left(\frac{R^2 + 2d^2}{\sqrt{R^2 + d^2}} - 2d \right) \hat{j} + \frac{\mu_0 \sigma w I a}{2} \left(\frac{R^2 + 2(d+b)^2}{\sqrt{R^2 + (d+b)^2}} - 2(d+b) \right) \hat{j}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F} = \frac{\mu_0 \sigma w a I}{2} \left(\frac{R^2 + 2(d+b)^2}{\sqrt{R^2 + (d+b)^2}} - \frac{R^2 + 2d^2}{\sqrt{R^2 + d^2}} - 2b \right) \hat{j}$$