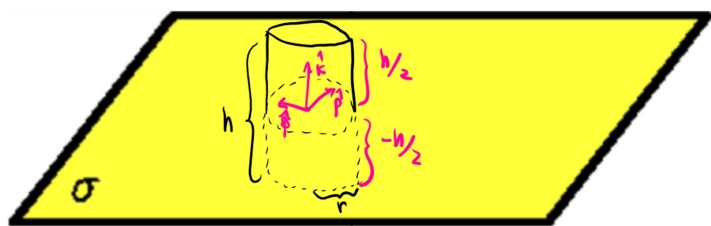


Paralel. Aux. 10

P1) a) Notemos que el campo del plano infinito con el origen de radio R se puede obtener, por superposición, mediante

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{plano}} - \underbrace{\vec{E}_{\text{disco}}}_{\text{disco de radio } R}.$$

\vec{E}_{plano} lo calculamos mediante ley de Gauss, ya que al tratarse de un plano infinito, se tiene simetría tal que $\vec{E} = E(z) \hat{k}$. Para ello, escogemos una región de radio r arbitrario del plano, mediante un cilindro de altura h , tal como se muestra en la figura



Luego, como la densidad σ es uniforme, la carga encerrada por el cilindro se obtiene como

$$Q_{\text{enc}} = \sigma \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad Q_{\text{enc}} = \sigma \pi r^2$$

Luego, el flujo de campo eléctrico a través del cilindro se obtiene como

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{\text{tapa sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{(1)} + \underbrace{\iint_{\text{tapa inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{(2)} + \underbrace{\iint_{\text{Manto}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{(3)}$$

(1): la tapa superior se parametriza como

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + \frac{h}{2} \hat{k}; \quad \rho \in [0, r], \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\iint_{\text{tapa sup}} \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \int_0^{2\pi} \int_0^r E(z) \hat{k} \cdot \rho d\rho d\phi \hat{k} = E(z) \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho d\rho d\phi = E(z) \pi r^2$$

(2): la tapa inferior se parametriza como

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} - \frac{h}{2} \hat{k}; \quad \rho \in [0, r], \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

Sin embargo, antes de calcular el flujo por esta tapa, se debe tener en cuenta que esta superficie se orienta en $-\hat{k}$, por lo que

$$d\vec{S} = \rho d\rho d\phi (-\hat{k}) = -\rho d\rho d\phi \hat{k}$$

Además, por simetría, en $z < 0$ (bajo el plano), se tiene que

$$\vec{E} = E(z) (-\hat{k}) = -E(z)\hat{k}$$

Así, sustituyendo en la integral

$$\Rightarrow \oint_{\text{tapa inf}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^R -E(z)\hat{k} \cdot \hat{k} \rho d\rho d\phi = -E(z) \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\phi = -E(z) \pi R^2$$

(3): En el manto, $d\vec{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho}$, por lo que

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(z)\hat{k} \cdot \rho d\phi dz \hat{\rho} = 0 \Rightarrow \oint_{\text{manto}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad / \quad \hat{k} \cdot \hat{\rho} = 0$$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$, se obtiene que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(z)\pi R^2 + E(z)\pi R^2 = 2E(z)\pi R^2$$

Finalmente, reemplazando esto último en la ley de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (\Rightarrow) \quad 2E\pi R^2 = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{\text{plano}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}, & z \geq 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}, & z < 0 \end{cases}$$

\vec{E}_{disco} En este caso no existe simetría, por lo que no se puede ocupar ley de Gauss. Así, calculamos el campo por definición. La parametrización del disco es la siguiente

$$\vec{r}' = \rho \hat{\rho} \quad ; \quad \rho \in [0, R], \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

Luego, $\vec{r} = z\hat{k}$, z arbitrario sobre el disco. Así, con $d\vec{r} = \rho d\phi d\vec{r}'$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\vec{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z\hat{k} - \rho\hat{\rho}}{\underbrace{\|z\hat{k} - \rho\hat{\rho}\|^3}_{=(z^2 + \rho^2)^{3/2}}} \sigma \rho d\rho d\phi \quad / \quad \hat{\rho} = \cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z\hat{k}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi}_{(*)} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho \cos\phi \hat{x}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi}_{(**)} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho \sin\phi \hat{y}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi}_{(***)} \right]$$

Viendo por separado el desarrollo de cada integral

(*)):
$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z \hat{k}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi = 2\pi z \hat{k} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad / \quad U := z^2 + \rho^2 \Rightarrow dU = 2\rho d\rho$$

$$= 2\pi z \hat{k} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{\frac{dU}{2}}{U^{3/2}} = \pi z \hat{k} \frac{U^{-1/2}}{-1/2} \Big|_{z^2}^{z^2+R^2}$$

$$= -2\pi z \left[\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] \hat{k} \quad / \quad \begin{matrix} z > 0 \\ \Rightarrow \sqrt{z^2} = z \end{matrix}$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \hat{k}$$

(**):
$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho \cos\phi \hat{i}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi = \left(\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi \right) \left(\int_0^R \frac{\rho \hat{i}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho \right) = 0$$

(**):
$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho \sin\phi \hat{j}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi = \left(\int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi \right) \left(\int_0^R \frac{\rho \hat{j}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho \right) = 0$$

Así, sustituyendo el valor de γ integral

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z \hat{k}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi - \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho \cos\phi \hat{i}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi - \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho \sin\phi \hat{j}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{disco} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \hat{k}$$

Una vez desarrollado \vec{E}_{plano} y \vec{E}_{disco} , sustituyendo para el campo total

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_{plano} - \vec{E}_{disco} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \hat{k} \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2+R^2}} \hat{k}$$

Desarrollo alternativo: Podemos, en lugar de usar Gauss y superposición, simplemente calcular por definición, considerando la misma integral del disco pero en lugar de considerar $\rho \in [0, R]$, tomar $\rho \in [R, \infty)$, i.e. el plano infinito con el origen. De esta manera

$$\vec{r}' = \rho \hat{\rho} \quad ; \quad \rho \in [R, \infty) \quad ; \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

Nuevamente, $\vec{r} = z \hat{k}$, z arbitrario sobre el eje ($z > 0$). Así, el campo se calcula como sigue

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \underbrace{\frac{z \hat{k} - \rho \hat{\rho}}{\|z \hat{k} - \rho \hat{\rho}\|^3}}_{=(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \sigma \rho d\rho d\phi \quad / \quad \hat{\rho} = \cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^{2\pi} \int_R^\infty \frac{z \hat{k}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi - \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \frac{\rho \cos\phi \hat{i}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi - \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \frac{\rho \sin\phi \hat{j}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi \right]$$

Siguiendo un desarrollo análogo al hecho para la integral (*), se tendrá por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \pi z \hat{k} \left. \frac{v^{-1/2}}{-1/2} \right|_{z^2 + R^2}^\infty = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \hat{k} \left[\frac{1}{\sqrt{v}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

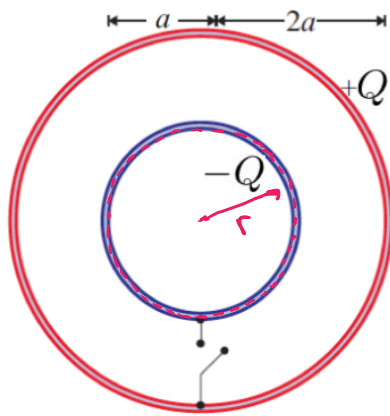
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \hat{k}}$$

b) Para calcular la fuerza entre ambos objetos, como ya conocemos el campo generado por el plano, basta usar $d\vec{F} = \vec{E} dq$, con dq un elemento de carga del alambre delgado (esto nos daría la fuerza por el plano le ejerce al alambre, y por 3ª ley de Newton, tiene la misma magnitud por la que el alambre ejerce al plano). Luego,

$$dq = \lambda dz, \quad z \in [a, a+l].$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\vec{F} = dq \vec{E} &\Rightarrow \vec{F} = \int \vec{E} dq = \int_a^{a+l} \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} \hat{k} \lambda dz = \frac{\sigma \lambda}{2\epsilon_0} \hat{k} \int_a^{a+l} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} dz \quad / \quad \begin{aligned} v &:= z^2 + R^2 \\ \Rightarrow dv &= 2z dz \end{aligned} \\ &= \frac{\sigma \lambda}{2\epsilon_0} \hat{k} \int_{a^2 + R^2}^{(a+l)^2 + R^2} \frac{dv}{2\sqrt{v}} \\ &= \frac{\sigma \lambda}{4\epsilon_0} \hat{k} \int_{a^2 + R^2}^{(a+l)^2 + R^2} v^{-1/2} dv = \frac{\sigma \lambda}{4\epsilon_0} \hat{k} \left. \frac{v^{1/2}}{1/2} \right|_{a^2 + R^2}^{(a+l)^2 + R^2} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{\sigma \lambda}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{(a+l)^2 + R^2} - \sqrt{a^2 + R^2} \right] \hat{k}} \end{aligned}$$

P2) a) Dado que se trata de dos conductores, en ambos casos la carga se encuentra homogéneamente distribuida. Luego, existe simetría y es posible ocupar ley de Gauss, primero para la superficie interior:



$a < r < 2a + \delta$ En la superficie Gaussiana de la figura, al estar dentro de un conductor, encontramos que

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Por otra parte, la superficie encierra la carga en la superficie interior, i.e. $Q(r=a)$. Así

$$Q_{enc} = Q(r=a) \quad (1)$$

Sustituyendo en la ley de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow 0 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{enc} = 0 \quad (1)$$

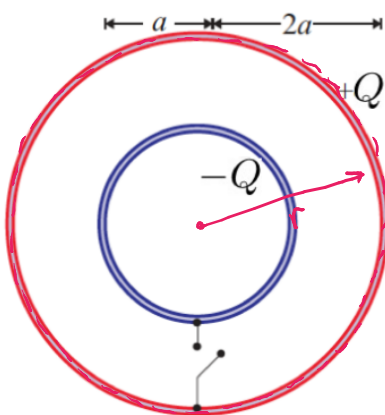
$$\Leftrightarrow Q(r=a) = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma(r=a) = 0}$$

Recordar que $\sigma = \frac{Q}{A}$

Por otra parte, la carga neta del conductor es $-Q$, i.e. la suma de las cargas interiores y exteriores deben sumar $-Q$, tal que

$$\cancel{Q(r=a)} + Q(r=2a+\delta) \stackrel{!}{=} -Q \Leftrightarrow \boxed{Q(r=2a+\delta) = -Q}$$

Se sigue un procedimiento análogo para el conductor exterior.



$2a < r < 2a + \delta$ Dado que estamos dentro de un conductor,

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{Ley de}} Q_{enc} = 0$$

En este caso, ahora se encierra toda la carga $-Q$ contenida en el conductor interior, además de la carga contenida en la cara interior del conductor externo ($Q(r=2a)$). Así,

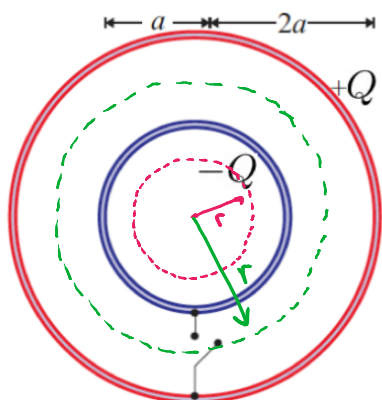
$$\Rightarrow Q_{enc} = -Q + Q(r=2a) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \boxed{Q(r=2a) = Q}$$

En este caso, la carga neta en el conductor externo es Q de manera que (análogo al conductor interno):

$$Q(r=2a) + Q(r=2a+\delta) \stackrel{!}{=} Q \Rightarrow \cancel{Q} + Q(r=2a+\delta) = \cancel{Q}$$

$$\Rightarrow Q(r=2a+\delta) = 0$$

b) Tal como se hizo para encontrar las cargas en las superficies, usamos ley de Gauss estudiando $r < a$, $a < r < 2a$, $r > 2a$:



$r < a$ Es directo. ver por

$$Q_{enc} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$$

$a < r < 2a$ En este caso

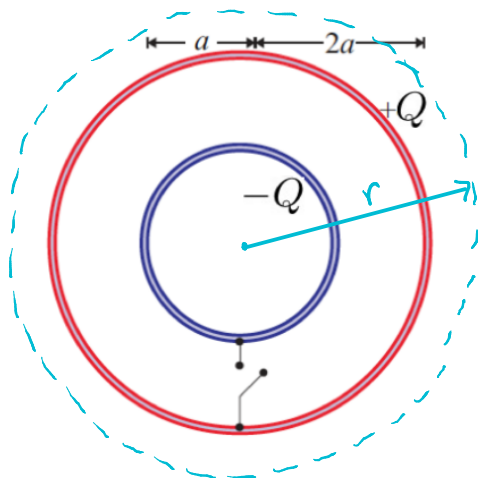
$$Q_{enc} = -Q$$

Por otro lado $A = 4\pi r^2$ superficie de una esfera

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint E(r) \hat{r} \cdot d\vec{S} \hat{r} = E(r) \oint dS = E(r) \cdot A = 4\pi r^2 E(r)$$

Sustituyendo en la ley de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{-Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

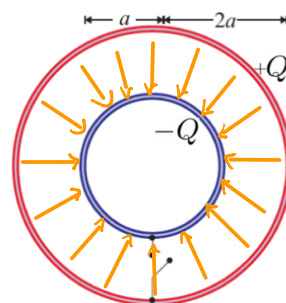


$r > 2a$ Se observa que al encerrar ambos conductores

$$Q_{enc} = -Q + Q = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$$

De esta manera

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & , r < a \\ \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & , a < r < 2a \\ 0 & , r > 2a \end{cases}$$

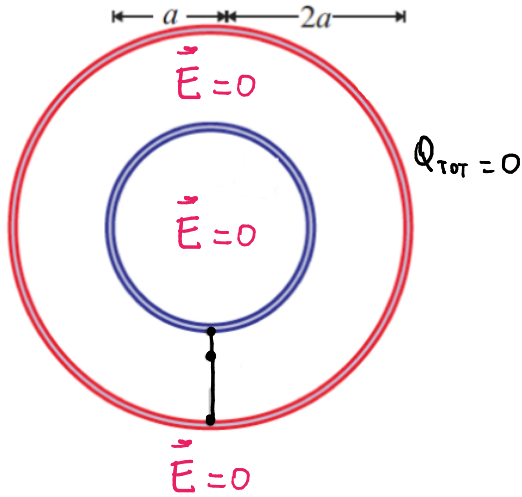


→ Líneas de campo!!

c) De igual manera que el auxiliar Y , al conectar los conductores las cargas presentes en estos se reordenan hasta alcanzar el equilibrio electrostático.

En este caso, la carga del conductor interior fluirá hacia el exterior, de manera que la carga total del sistema se acumulará en la cara exterior del conductor externo.

$$\Rightarrow Q_{TOT} = -Q + Q \Leftrightarrow Q_{TOT} = 0$$



Como ahora la carga neta en el conductor es 0, en cualquier circunstancia se tendrá que

$$\Rightarrow Q_{enc} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0, \forall r$$

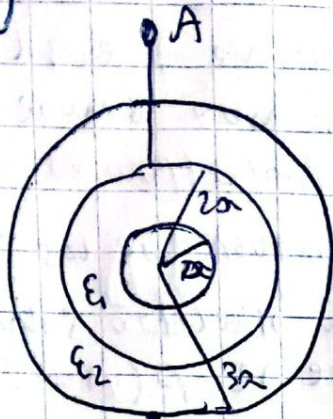
P3)

CADA CONDENSADOR CONSTA DE 2 PLACAS CILINDRICAS CONDUCTORAS DE RADIOS a Y $3a$. EN SUS INTERIORES SE ENCUENTRAN MEDIOS DIELECTRICOS.

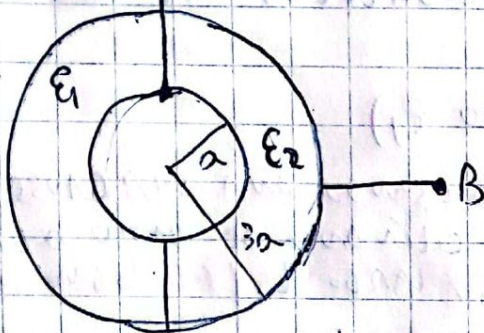
¿CAPACITANCIA entre A y B?

AL IGUAL QUE LA PREGUNTA 1 DEL ANEXO 6, SE EMPLEA EL METODO DE SEPARAR AMBOS CILINDROS Y CALCULAR SUS PROPIAS CAPACITANCIAS DE MODO QUE

CONDENSADOR 1



CONDENSADOR 2



SE IDENTIFICA QUE LA CONEXION ES EN SERIE

SE DEFINE NODO G COMO EL CONDUCTOR QUE CONECTA A AMBOS CONDENSADORES

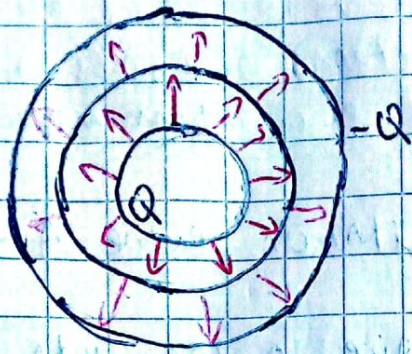
Como se reconoce que son 2 CAPACITANCIAS en serie, LA CAPACITANCIA equivalente sera:

$$C_{eq} = C_{AB} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

CONDENSADOR 1

SE DEFINE UN SISTEMA DE REFERENCIA CENTRADO EN EL EJE DEL CILINDRO OBTENIENDO COORDENADAS CILINDRICAS (ρ, θ, z)

NO IMAGINAMOS QUE SE USABA UNA CARGA Q DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE SOBRE EL CONDUCTOR DE RADIO a Y OTRA $-Q$ DISTRIBUIDA UNIFORME SOBRE CONDUCTOR RADIO $3a$



Se desprecian efectos de borde
dado que se asume que el largo
del cilindro es muy grande
respecto a su radio (pero no infinito)

Así, se puede intuir que los campos
eléctricos tendrán dirección solamente
radial y dependiente de ρ (variable radial)

Se utiliza ley de Gauss generalizada al trabajar
con medios dieléctricos:

Para $a < \rho < 2a$ (medio ϵ_1)

$$\Rightarrow \oint \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} = Q_{\text{enc libre}} \rightarrow \text{usando una superficie gaussiana cilíndrica de radio } \rho < 2a \text{ y largo } L \text{ (solo lo que encierra a } Q)$$

$$= 2\pi \rho L D_1(\rho) = Q \Rightarrow D_1(\rho) = \frac{Q}{2\pi \rho L} \hat{\rho}$$

Manteniendo cilindro
radio ρ

Para $2a < \rho < 3a$ (medio ϵ_2)

Se usa también una superficie gaussiana de radio $2a < \rho < 3a$
y de largo L

$$\Rightarrow \oint \vec{D}_2 \cdot d\vec{s} = Q_{\text{enc libre}}$$

$$= 2\pi \rho L D_2(\rho) = Q$$

$$\Rightarrow D_2(\rho) = \frac{Q}{2\pi \rho L} \hat{\rho}$$

\rightarrow solamente se alcanza a
encerrar Q como carga
libre

$\Rightarrow \textcircled{00}$ se observa que $\vec{D}_1(\rho) = \vec{D}_2(\rho)$

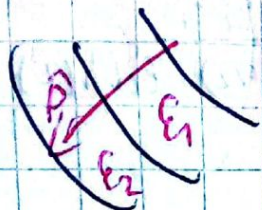
Ahora, ¿qué pasa en la interfaz a $\rho = 2a$?

La condición de borde dice que $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{\text{libre}} |_{\rho=2a}$

D_{1n}, D_{2n} son las componentes normales de \vec{D}_1 y \vec{D}_2
en la interfaz.

pero no existe porque en $p=2a$ (no indica el enunciado que existe una carga libre allí)

$\Rightarrow D_{2n} = D_{1n}$ y justamente la dirección de \vec{D}_1 y \vec{D}_2 es \hat{p} que es normal a la interfaz



$$\Rightarrow \vec{D}_1(p) \cdot \hat{p} = D_{1n}(p)$$

$$\vec{D}_2(p) \cdot \hat{p} = D_{2n}(p)$$

\Rightarrow en $p=2a$ se debe cumplir que:

$$\frac{Q}{2\pi L(2a)} = \frac{Q}{2\pi L(2a)} \checkmark \quad \text{y} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

es lo esperado!!!

$$\Rightarrow \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1$$

$$\Rightarrow \vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E}_1(p) = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_1 p} \hat{p} \Rightarrow \vec{E}_2(p) = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_2 p} \hat{p}$$

\Rightarrow Se quiere ΔV entre conductor radio a y conductor radio $3a$ y dado que en $p=a$ está la carga $+Q$, se pide que allí está el mayor potencial y en $p=3a$ el menor potencial.

$$\Rightarrow V_a - V_{3a} = - \int_{3a}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \left\{ \int_{3a}^{2a} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{2a}^a \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} \right\}$$

con $d\vec{l} = dp \hat{p}$ para integrar una trayectoria recta $p \in (3a, a)$ (es la trayectoria más fácil de integrar)

$$\Rightarrow V_a - V_{3a} = - \left\{ \frac{Q}{2\pi L \epsilon_2} \int_{3a}^{2a} \frac{dp}{p} + \frac{Q}{2\pi L \epsilon_1} \int_{2a}^a \frac{dp}{p} \right\} = - \frac{Q}{2\pi L} \left\{ \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{2a}{3a}\right) + \frac{1}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{a}{2a}\right) \right\}$$

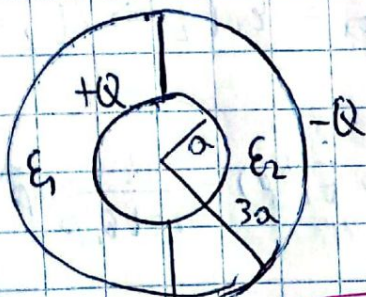
$$V_a - V_{3a} = \frac{Q}{2\pi L} \left\{ \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\epsilon_1} \ln(2) \right\} > 0$$

$$\text{y así, } C_1 = \frac{Q}{(\Delta V)} = \frac{Q}{V_a - V_{3a}} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi L} \left\{ \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\epsilon_1} \ln(2) \right\}}$$

$$C_1 = \frac{2\pi L}{\frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\epsilon_1} \ln(2)} = \frac{2\pi L \epsilon_2 \epsilon_1}{\epsilon_1 \ln(3/2) + \epsilon_2 \ln(2)} \quad \checkmark$$

Ahora con Condensador 2

Se aplica mismo método, nos damos carga $+Q$ a $p=a$ y $-Q$ en $p=3a$.



esto deriva a que se asume que Q está distribuido uniformemente sobre la placa cilíndrica conductora de radio a .

Revisamos ley de Gauss Generalizada en $a < p < 3a$

también podemos asumir que los campos tendrán dirección únicamente radial y con dependencia en p y theta θ dado que el medio dieléctrico cambia según el ángulo.

$$\Rightarrow \vec{D} = \begin{cases} D_1(p) \hat{p}, & \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \\ D_2(p) \hat{p}, & \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

\Rightarrow usando una superficie gaussiana cilíndrica de radio $a < p < 3a$ centrado en el eje del conductor y de largo L , $d\vec{s} = p d\theta dz \hat{p}$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $z \in (0, L)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} &= \int_0^L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_2(p) \hat{p} \cdot \hat{p} p d\theta dz + \int_0^L \int_{\pi/2}^{3\pi/2} D_1(p) \hat{p} \cdot \hat{p} p d\theta dz \\ &= L \left(D_2(p) p \left(\frac{\pi}{2} - -\frac{\pi}{2} \right) + D_1(p) p \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right) = L \pi p (D_2(p) + D_1(p)) \end{aligned}$$

$$\gamma \quad Q_{\text{enc}} = Q$$

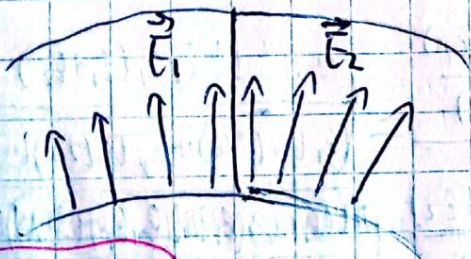
$$\Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{l} = Q$$

$$\gamma \text{ sabiendo que } \vec{D}_2(p) = \epsilon_2 \vec{E}_2(p) \text{ y } \vec{D}_1(p) = \epsilon_1 \vec{E}_1(p)$$

$$\Rightarrow \oint (\epsilon_2 \vec{E}_2(p) + \epsilon_1 \vec{E}_1(p)) = Q$$

Se evalúa condición de borde

Sea por ejemplo, en $\theta = \frac{\pi}{2}$



$E_{1z} = E_{2z}$
siempre se cumple

Se observa que la dirección de los campos eléctricos es solamente normal $\hat{\rho}$ que a su vez es paralelo a la interfaz en $\pi/2$

$$\Rightarrow \text{se cumple que } E_{1z} = E_{2z} \text{ en } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{pero } E_1(p) = E_{1z}(p) \text{ y } E_2(p) = E_{2z}(p) \text{ en } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow E_1(\theta = \pi/2) = E_2(\theta = \pi/2) \text{ pero esto ocurre para cualquier ángulo}$$

y en los medios ϵ_1 y ϵ_2 los campos también dependen solo de ρ , por lo que se deduce que $E_1(p) = E_2(p)$ para todo ángulo $\theta \Rightarrow \vec{E}$ es el mismo en ambos medios.

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(p) = \frac{Q}{\epsilon_0 \oint d\vec{l}} \hat{\rho} = \vec{E}_2(p)$$

Se calcula la diferencia de potencial entre los conductores, se deduce que V_A posee mayor potencial con carga $+Q$ y V_B con menor potencial con carga $-Q$.

$$V_a - V_{3a} = - \int_{3a}^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{car } d\vec{l} = dp \hat{p}$$

$$= - \int_{3a}^a \frac{Q}{\pi L p (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{p} \cdot \hat{p} dp = - \frac{Q}{\pi L (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \int_{3a}^a \frac{dp}{p} = \frac{Q}{\pi L (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \ln(3)$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{Q}{|V_a - V_{3a}|} = \frac{Q}{\left(\frac{Q \ln(3)}{\pi L (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \right)} = \frac{\pi L (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln(3)}$$

$$\Rightarrow C_{AB} = \frac{2\pi L \epsilon_2 \epsilon_1}{\epsilon_1 \ln(3/2) + \epsilon_2 \ln(2)} \cdot \frac{\pi L (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln(3)} = \frac{(2\pi^2 L^2 \epsilon_2 \epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2))}{(\epsilon_1 \ln(3/2) + \epsilon_2 \ln(2)) \ln(3)}$$

$$\frac{2\pi L \epsilon_2 \epsilon_1}{\epsilon_1 \ln(3/2) + \epsilon_2 \ln(2)} + \frac{\pi L (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln(3)} = \frac{(\pi L (\epsilon_1 + \epsilon_2) (\epsilon_1 \ln(3/2) + \epsilon_2 \ln(2)) + 2\pi L \epsilon_2 \epsilon_1 \ln(3))}{(\epsilon_1 \ln(3/2) + \epsilon_2 \ln(2)) \ln(3)}$$

$$C_{AB} = \frac{2\pi L \epsilon_2 \epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) (\epsilon_1 \ln(3/2) + \epsilon_2 \ln(2)) + 2\epsilon_2 \epsilon_1 \ln(3)}$$

$$C_{AB} = \frac{\pi L}{\frac{1}{2\epsilon_2 \epsilon_1} (\ln(3/2) \epsilon_1 + \ln(2) \epsilon_2) + \frac{\ln(3)}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = \frac{\pi L}{\frac{\ln(3/2)}{2\epsilon_2} + \frac{\ln(2)}{2\epsilon_1} + \frac{\ln(3)}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}$$