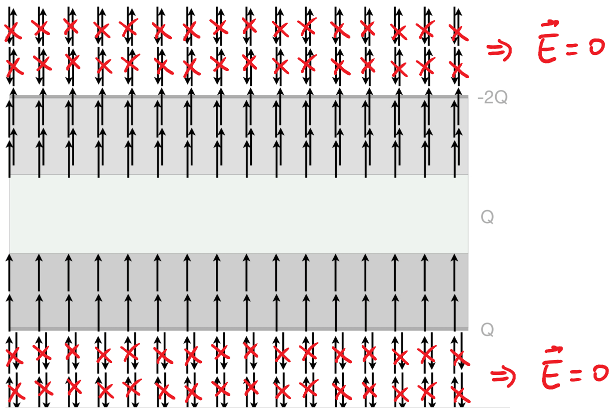
Pauta Aux. 4

P1) a) Para obtener los vectores desplazamiento y campo eléctrico, en esta configuración, se debe ser estratégico, ya que $\vec{D}$ es distinto para ambos dieléctricos. Luego, la superficie encerrada debe encerrar sólo 1 de ellos. Considerando esto, primero calculamos $\vec{D}_1$, i.e. el vector desplazamiento para el dieléctrico de constante ε_1. Para ello, usamos la ley de Gauss para medios materiales. Antes de ello, es necesario notar 2 cosas:

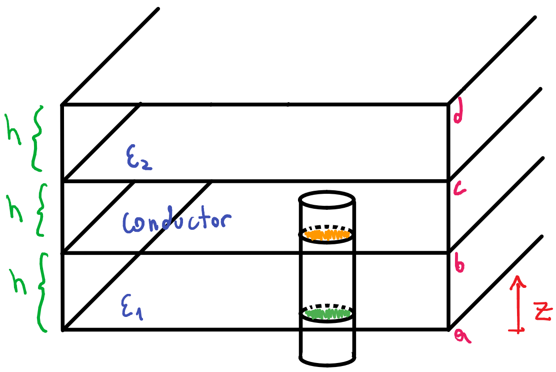
- El campo eléctrico fuera de las placas es cero: esto dada la superposición de los campos eléctricos de la placa $-2Q$ y el conjunto del conductor y la placa $+Q$ (revisar ilustraciones en material docente).



- Las densidades de carga en las placas a y d son directas: ya que su carga es Q y $-2Q$ respectivamente, y el área de c/u es a^2, se tiene que

$$\boxed{\sigma_a = \frac{Q}{a^2} \quad ; \quad \sigma_d = \frac{-2Q}{a^2}}$$

Sin embargo, podemos aprovechar que $\vec{E}=0$ fuera de las placas, junto con que $\vec{E}(h<z<2h)=0$ (dentro del conductor) para obtener σ_b y σ_c, las que son densidades de carga libre. Usando un cilindro gaussiano de altura $z>h$ tal que encierre la superficie inferior del conductor y la del medio ε_1 (como se ve en la figura). Así



$$Q_{enc} = \sigma_b \cdot A + \sigma_a \cdot A = (\sigma_b + \sigma_a)A = (\sigma_b + \sigma_a)\pi r^2$$

Mientras que

0, $\vec{E}=0$ fuera de las placas

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\cancel{\iint \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{\text{tapa inf}} + \underbrace{\cancel{\iint \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{\text{tapa sup}} + \underbrace{\iint \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\text{manto}}$$

0, $\vec{E}=0$ dentro del conductor

Dentro del conductor, ya que $a \gg 3h$, se pueden despreciar los efectos de borde y asumir el bloque como infinito. En ese caso, $\vec{E} = E(z)\hat{k}$ por simetría. Luego, como para el manto $d\vec{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho}$

$$\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{\text{manto}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

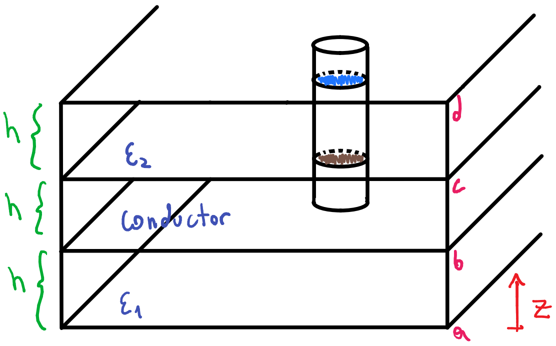
Así, concluimos que

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{enc} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_b + \sigma_a)\pi r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_b = -\sigma_a$$

Obs: $\sigma_{a,d}$ corresponden a cargas libres, pues es carga "agregada" a las placas, y $\sigma_{b,c}$ también al ser carga que fluye en el conductor

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\sigma_b = -\frac{Q}{a^2}}$$

Mediante un ejercicio análogo, se obtiene σ_c (me saltaré varios pasos, pero son análogos a lo hecho antes, por lo que aconsejo revisar esa parte en caso que no se entienda)

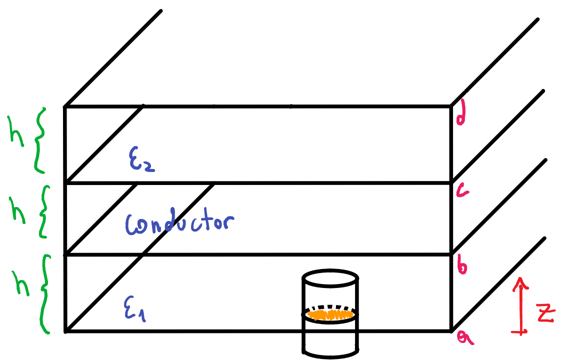


$$Q_{enc} = \pi r^2 (\sigma_d + \sigma_c)$$

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\cancel{\iint_{\text{tapa int}} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0,\ \vec{E}=0 \text{ dentro del conductor}} + \underbrace{\cancel{\iint_{\text{tapa sup}} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0,\ \vec{E}=0 \text{ fuera de las placas}} + \underbrace{\cancel{\iint_{\text{manto}} \vec{E}\cdot d\vec{S}}}_{0,\ \vec{E}\cdot d\vec{S}=0} = 0$$

$$\Rightarrow Q_{enc} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi r^2(\sigma_d + \sigma_c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_c = -\sigma_d \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sigma_c = \frac{2Q}{a^2}}$$

Teniendo en mente lo anterior, empleamos Ley de Gauss con el cilindro gaussiano de la figura, el cual es de altura $z < h$ y radio r arbitrario. Así



$$Q_{enc} = \sigma_a \cdot A = \frac{Q}{a^2}\cdot \pi r^2$$

El desplazamiento es proporcional al campo eléctrico ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$), por lo que

$$\vec{E} = E(z)\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = D(z)\hat{k}$$

Luego, con el objetivo de usar ley de Gauss para medios materiales, se tiene que

$$\oiint \vec{D}_1\cdot d\vec{S} = \iint_{\text{tapa sup}} \vec{D}_1\cdot d\vec{S} + \iint_{\text{tapa inf}} \vec{D}_1\cdot d\vec{S} + \iint_{\text{manto}} \vec{D}_1\cdot d\vec{S}$$

Recordando de auxiliares anteriores, en el caso del manto, $d\vec{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho}$ por lo que

$$\vec{D}_1\cdot d\vec{S} = D(z)\hat{k}\cdot \rho d\rho d\phi \hat{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{\text{manto}} \vec{D}_1\cdot d\vec{S} = 0$$

Por otra parte, la tapa inferior está fuera de las placas, donde el campo eléctrico es nulo, por lo que

$$\vec{E}=0 \Leftrightarrow \vec{D}_1=0 \Rightarrow \iint_{\substack{\text{tapa}\\ \text{inf}}} \vec{D}_1\cdot d\vec{S}=0$$

Así, se tiene que

$$\oiint \vec{D}_1\cdot d\vec{S} = \iint_{\substack{\text{tapa}\\ \text{sup}}} \vec{D}_1\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} D_1(z)\hat{k}\cdot \rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{k} = D_1(z)\underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho\, d\rho\, d\phi}}_{\pi r^2} = D_1(z)\pi r^2$$

Sustituyendo en la ley de Gauss, obtenemos que

$$\oiint \vec{D}_1\cdot d\vec{S} = Q_{enc} \Leftrightarrow D_1(z)\cancel{\pi r^2} = \frac{Q}{a^2}\cancel{\pi r^2} \Leftrightarrow \boxed{\vec{D}_1 = \frac{Q}{a^2}\hat{k}}$$

Como $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, y en este material $\varepsilon=\varepsilon_1$

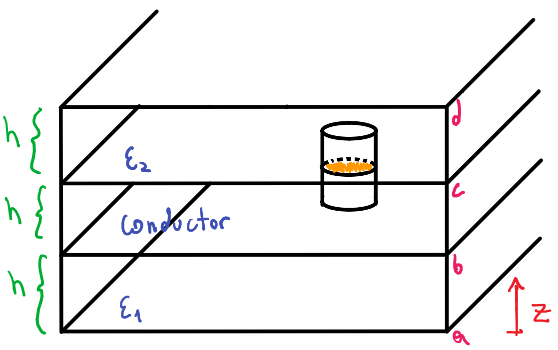
$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \frac{Q}{\varepsilon_1 a^2}\hat{k}}$$

Como además $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, se tiene que

$$\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0\vec{E}_1 = \frac{Q}{a^2}\hat{k} - \varepsilon_0\frac{Q}{\varepsilon_1 a^2}\hat{k} \Leftrightarrow \boxed{\vec{P}_1 = \frac{Q}{a^2}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat{k}}$$

A continuación, calculamos $\vec{D}_2$, $\vec{E}_2$ y $\vec{P}_2$, mediante un procedimiento análogo. Así, se elige nuevamente un cilindro gaussiano de altura $z<h$, centrado en $z=2h$, y radio r arbitrario. Así, se tiene que en este caso

$$Q_{enc} = \sigma_c\cdot\pi r^2 = \frac{2Q}{a^2}\pi r^2$$



$$\oiint \vec{D}_2\cdot d\vec{S} = \iint_{\substack{\text{tapa}\\ \text{sup}}} \vec{D}_2\cdot d\vec{S} + \underbrace{\cancel{\iint_{\substack{\text{tapa}\\ \text{inf}}} \vec{D}_2\cdot d\vec{S}}}_{0,\ \vec{D}_2=0 \text{ dentro del conductor}} + \underbrace{\cancel{\iint_{\text{manto}} \vec{D}_2\cdot d\vec{S}}}_{0,\ \vec{D}_2\cdot d\vec{S}=0}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{r} D_2(z)\hat{k}\cdot \rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{k} = D_2(z)\underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho\, d\rho\, d\phi}}_{\pi r^2}$$

$$= D_2(z)\pi r^2$$

Así, sustituyendo en la ley de Gauss, se obtiene que

$$\oiint \vec{D}_2\cdot d\vec{S} = Q_{enc} \Leftrightarrow D_2(z)\cancel{\pi r^2} = \frac{2Q}{a^2}\cancel{\pi r^2} \Leftrightarrow \boxed{\vec{D}_2 = \frac{2Q}{a^2}\hat{k}}$$

Tal como antes, usando que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, despejamos el campo eléctrico y el vector polarización. Como $\epsilon = \epsilon_2$, entonces

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{2Q}{a^2 \epsilon_2}\hat{k} \qquad ; \qquad \vec{P}_2 = \frac{2Q}{a^2}\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right)\hat{k}}$$

Con los resultados obtenidos, es posible obtener el potencial entre las placas

$$V_{ad} = V_a - V_d = -\int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad / \; d\vec{l} = dz\,\hat{k}$$

$$= -\underbrace{\int_{3h}^{2h} \vec{E}(2h<z<3h) \cdot dz\hat{k}}_{\text{Campo dentro del dieléctrico 2}} - \underbrace{\int_{2h}^{h} \vec{E}(h<z<2h) \cdot dz\hat{k}}_{\text{Campo dentro del conductor}} - \underbrace{\int_{h}^{0} \vec{E}(0<z<h) \cdot dz\hat{k}}_{\text{Campo dentro del dieléctrico 1}}$$

Puesto que $\vec{E}(h<z<2h) = 0$, es inmediato que

$$\int_{2h}^{h} \vec{E}(h<z<2h) \cdot dz\hat{k} = 0$$

Luego, el resto de integrales

$$\int_{3h}^{2h} \vec{E}(2h<z<3h) \cdot dz\hat{k} = \int_{3h}^{2h} \vec{E}_2 \cdot dz\hat{k} = \int_{3h}^{2h} \frac{2Q}{\epsilon_2 a^2}\hat{k} \cdot dz\,\hat{k} = \frac{2Q}{\epsilon_2 a^2}\int_{3h}^{2h} dz = -\frac{2Qh}{\epsilon_2 a^2}$$

$$\int_{h}^{0} \vec{E}(0<z<h) \cdot dz\hat{k} = \int_{h}^{0} \vec{E}_1 \cdot dz\hat{k} = \int_{h}^{0} \frac{Q}{\epsilon_1 a^2}\hat{k} \cdot dz\,\hat{k} = \frac{Q}{\epsilon_1 a^2}\int_{h}^{0} dz = -\frac{Qh}{\epsilon_1 a^2}$$

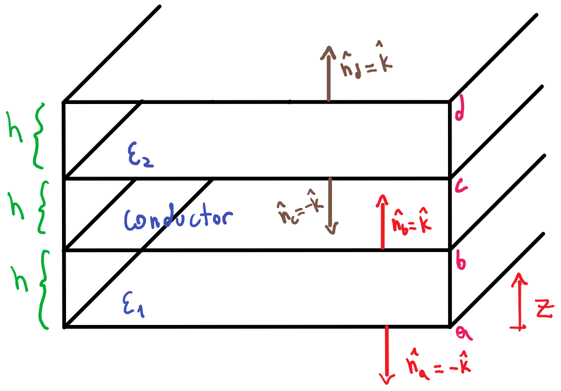
Sustituyendo, obtenemos que

$$V_{ad} = -\left(-\frac{Qh}{\epsilon_1 a^2}\right) - 0 - \left(-\frac{2Qh}{\epsilon_2 a^2}\right) \Leftrightarrow \boxed{V_{ad} = \frac{Qh}{a^2}\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{2}{\epsilon_2}\right)}$$

b) Con el vector polarización, calculamos las densidades de carga ligada en el volumen de los dieléctricos, tal que

$$\left.\begin{aligned} \rho_{b_1} &= -\nabla \cdot \vec{P}_1 \\ \rho_{b_2} &= -\nabla \cdot \vec{P}_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \rho_{b_1} = \rho_{b_2} = 0 \qquad \rightarrow \vec{P}_1, \vec{P}_2 = \text{ctes}, \text{ su divergencia es nula.}$$

Luego, las densidades superficiales las vemos por $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$, con $\hat{n}$ el vector normal exterior a la superficie donde queremos calcular la densidad de carga. Así



$$\sigma_{b_a} = \hat P_1 \cdot \hat n_a = \frac{Q}{a^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat k \cdot -\hat k \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{b_a} = -\frac{Q}{a^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)}$$

$$\sigma_{b_b} = \hat P_1 \cdot \hat n_b = \frac{Q}{a^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat k \cdot \hat k \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{b_b} = \frac{Q}{a^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)}$$

$$\sigma_{b_c} = \hat P_2 \cdot \hat n_c = \frac{2Q}{a^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\hat k \cdot -\hat k \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{b_c} = -\frac{2Q}{a^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)}$$

$$\sigma_{b_d} = \hat P_2 \cdot \hat n_d = \frac{2Q}{a^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\hat k \cdot \hat k \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{b_d} = \frac{2Q}{a^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)}$$

Las cargas libres ya fueron calculadas, según la observación hecha en parte a).

c) Para calcular C_{ab} y C_{cd}, es necesario calcular, de igual manera, V_{ab} y V_{cd}. Luego

$$V_{ab} = -\int_b^a \vec E \cdot d\vec l = -\int_h^0 \vec E_1 \cdot dz\hat k = \frac{Qh}{\varepsilon_1 a^2}$$

Integrales calculadas antes para V_{ad}

$$V_{cd} = -\int_d^c \vec E \cdot d\vec l = -\int_{3h}^{2h} \vec E_2 \cdot dz\hat k = \frac{2Qh}{\varepsilon_2 a^2}$$

Luego, como la carga presente en las placas a y b es $+Q$ y $-Q$, respectivamente, se tiene que

$$C_{ab} = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}h}{\varepsilon_1 a^2}} \Leftrightarrow \boxed{C_{ab} = \frac{a^2\varepsilon_1}{h}}$$

→ Consistente con $C = \frac{A\varepsilon}{d}$, siendo A el área, d la separación y ε la permitividad.

Análogamente, la carga en las placas c y d son $+2Q$ y $-2Q$, respectivamente. Luego, C_{cd} se obtiene como

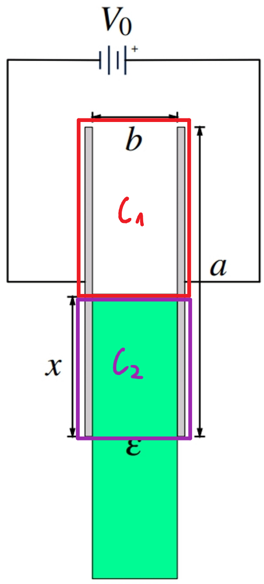
$$C_{cd} = \frac{2Q}{V_{cd}} = \frac{\cancel{2Q}}{\frac{\cancel{2Q}h}{\varepsilon_2 a^2}} \Leftrightarrow \boxed{C_{cd} = \frac{a^2 \varepsilon_2}{h}}$$

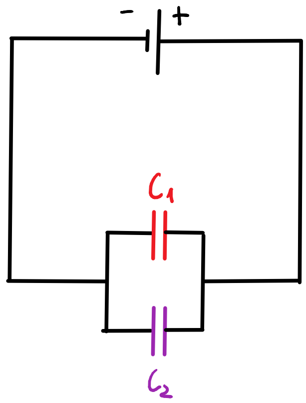
Finalmente, para el caso C_{ad}, uno primero pensaría en usar

$$\frac{1}{C_{ad}} = \frac{1}{C_{ab}} + \frac{1}{C_{cd}}$$

pues son 2 condensadores en serie, por el conductor central. Sin embargo esta ecuación es válida únicamente cuando las cargas en placas opuestas tienen igual magnitud, y signo opuesto. En este caso, en d la placa es $-2Q$, mientras que en a es $+Q$, por lo que el resultado sería incorrecto. Finalmente, se tiene que C_{ad} no puede calcularse.

P2 | a) A diferencia de la configuración presentada en P1, ahora se observa que se trata de una configuración en paralelo, por lo que



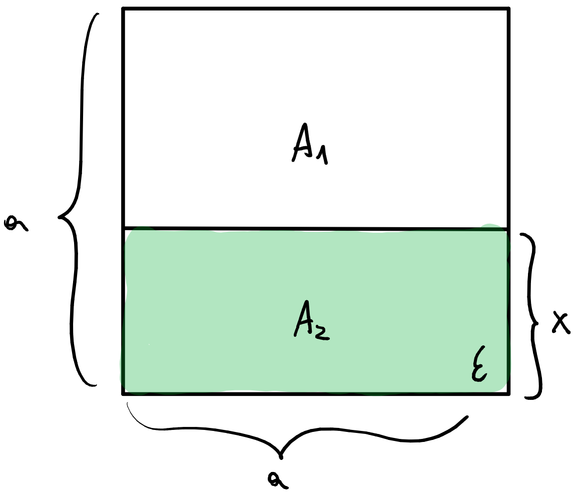


$$\Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2$$

Como se obtuvo en P1 (y según lo visto en clases), se tiene que

$$C = \frac{A\varepsilon}{d}$$

donde A es el área de las placas y d la separación entre estas. Para la primera placa, se tiene que



$$A_1 = a(a-x) \Rightarrow C_1 = \frac{a(a-x)\varepsilon_0}{b}$$

se debe restar la porción con el dieléctrico ε.

Se usa ε_0 puesto que está al aire

Por otra parte, para la segunda se tiene que

$$A_1 = ax \Rightarrow C_2 = \frac{ax\varepsilon}{b}$$

→ Ahora se usa la permitividad del dieléctrico.

De esta manera

$$C_{eq} = \frac{a(a-x)\varepsilon_0}{b} + \frac{ax\varepsilon}{b} \iff \boxed{C_{eq} = \frac{a}{b}\left[(a-x)\varepsilon_0 + x\varepsilon\right]}$$

b) Queremos ahora que la carga sea Q^* cuando el condensador está a voltaje V_0. Así, tendremos que

$$C = \frac{Q}{V} \iff \frac{a}{b}\left[(a-x)\varepsilon_0 + x\varepsilon\right] = \frac{Q^*}{V_0}$$

$$\iff a\varepsilon_0 + x(\varepsilon - \varepsilon_0) = \frac{bQ^*}{aV_0}$$

$$\iff \boxed{x = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0}\left(\frac{bQ^*}{aV_0} - a\varepsilon_0\right)}$$

c) Para encontrar la fuerza, consideremos que se aplica una fuerza $\vec{F}'$ con el objetivo de sacar el dieléctrico del condensador una distancia infinitesimal dx. El trabajo dW está dado por

$$dW = F' dx$$

Sea Fe la fuerza eléctrica que siente el dieléctrico, se tiene que

$$\vec{F} = -\vec{F}' \Rightarrow dW = -F\,dx$$

Además, existe una contribución por parte de la batería, que ejerce trabajo (cambia su energía) a medida que el dieléctrico se mueve. Puesto que, en el caso general, $W = QV$, en el caso infinitesimal

$$\Rightarrow dW = V_0\,dQ$$

Así, el trabajo total en el sistema es

$$dW = -F\,dx + V_0\,dQ$$

$$\iff F = V_0\frac{dQ}{dx} - \frac{dW}{dx} \quad / \quad W = \frac{CV^2}{2}, \text{ la energía almacenada en el condensador.}$$

$$= V_0\frac{dQ}{dx} - \frac{V_0^2}{2}\frac{dC}{dx} \quad / \quad Q = CV$$

$$\iff F = V_0\frac{d}{dx}(CV_0) - \frac{V_0^2}{2}\frac{dC}{dx} = V_0^2\frac{dC}{dx} - \frac{V_0^2}{2}\frac{dC}{dx} = \frac{V_0^2}{2}\frac{dC}{dx}$$

Usando la expresión obtenida antes para la capacitancia

$$\frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{b}\left[(a-x)\,\varepsilon_0 + x\,\varepsilon\right]\right) = \frac{a}{b}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

Tal que, al sustituir

$$\Rightarrow F = \frac{V_0^2}{2}\cdot\frac{a}{b}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

→ Notar que $F>0$ i.e. hacia arriba, hacia adentro del condensador

d) Notar que $Q=Q(x)$, i.e. la carga Q^* que puede ser almacenada depende de la posición del dieléctrico dentro del condensador, dado que

$$Q(x) = C(x)\,V_0 \Leftrightarrow Q(x) = \frac{a}{b}\left[(a-x)\,\varepsilon_0 + x\,\varepsilon\right]V_0$$

Observar que el mínimo se obtiene en $x=0$ (dieléctrico fuera del condensador), donde

$$Q(x=0) = \frac{a^2\varepsilon_0}{b}V_0$$

Mientras que el máximo se obtiene en $x=a$ (dieléctrico totalmente dentro), donde

$$Q(x=a) = \frac{a^2\varepsilon}{b}V_0$$

Puesto que $\varepsilon>\varepsilon_0 \Rightarrow Q(x=a) > Q(x=0)$. Así, el intervalo para la carga Q^* que puede ser almacenada viene dado por

$$\boxed{Q^* \in \left[\frac{a^2\varepsilon_0}{b}V_0\,,\ \frac{a^2\varepsilon}{b}V_0\right]}$$