FI2002-2 Electromagnetismo
Profesor: Claudio Arenas
Auxiliares: Álvaro Flores & Tomás Vatel
Ayudante: Vicente Torelli

Auxiliar #7: Dieléctricos (y más Condensadores)

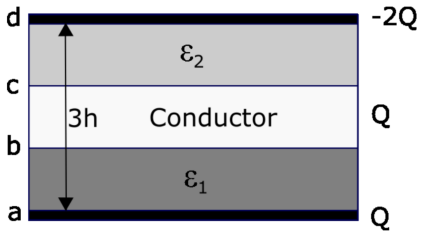
22 de septiembre de 2023

P1. Se tienen dos placas cuadradas de $a \times a$, separadas por una distancia $3h$ (con $3h \ll a$). El conductor inferior posee una carga Q, mientras que el superior una carga $-2Q$. El espacio entre las placas contiene un material dieléctrico de constante ε_1 hasta la altura h. Luego, entre h y $2h$ hay un material con carga neta Q. Finalmente, entre las alturas $2h$ y $3h$ hay un material dieléctrico de constante dieléctrica ε_2, con $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.

a) Calcule los campos eléctricos y vectores desplazamiento, y el potencial entre las placas.

b) Calcule las densidades superficiales de carga libre y de polarización.

c) Encuentre las capacitancias C_{ab}, C_{cd} y C_{ad}. Comente respecto de esta última.



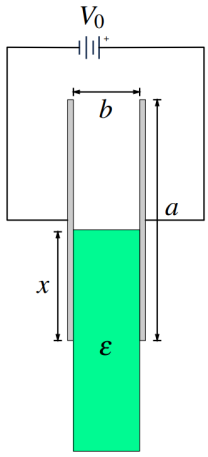
P2. Un dispositivo de uso frecuente en muchos artefactos eléctricos de uso diario son los condensadores variables. Este tipo de condensador posee una geometría que es fácil de modificar mecánicamente, con lo cual se puede ajustar su capacidad a gusto. Existen muchos diseños de este tipo de dispositivos. Un ejemplo simple e idealizado es el que se muestra en la figura, el cual consiste en dos placas paralelas cuadradas de lado a y separadas una distancia b, entre las cuales se introduce parcialmente un dieléctrico de permitividad ε, el cual penetra una distancia x de uno de los bordes del condensador. Suponga que dispone de una batería que da un voltaje V_0, y se desea almacenar una carga Q^* en el condensador. Para ajustarlo, calcule:

a) La capacidad del condensador para un x dado, despreciando los efectos de borde (i.e. $b \ll a, x$).

b) La penetración x del dieléctrico de manera que el condensador tenga una carga Q^* (dado el voltaje de la batería V_0).

c) La fuerza que siente el condensador en esa posición.

d) El rango de carga Q^* que puede ser almacenado en el condensador.



Resumen:

- **Conductores:** Permiten fácilmente la conducción de electricidad, pues los electrones fluyen libremente por el material. La principal característica de estos es que **el campo eléctrico es nulo dentro de ellos**. Como consecuencia de esto, **la carga se acumula únicamente en sus superficies**, denominada carga libre; además, **el campo siempre es perpendicular a la superficie del conductor**.
- **Dieléctricos:** Comúnmente conocidos como aislantes, dado que no tienen electrones libres, no conducen electricidad. Las moléculas que las conforman, en presencia de un campo eléctrico, se alinean, dando lugar a propiedades eléctricas interesantes.
  - Carga ligada: El alineamiento antes mencionado del material causa el **alineamiento de los dipolos** (moléculas) que conforman el material, dando origen así a una **polarización neta** $\vec{P}$. Esto causa que **en el material aparezcan cargas ligadas**, que se calculan mediante

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \qquad \rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} \tag{1}$$

  - Desplazamiento eléctrico: El **efecto neto del campo eléctrico que siente el material, junto a su polarización**, se puede capturar adecuadamente mediante el vector desplazamiento $\vec{D}$, que se calcula como

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{2}$$

    En materiales homogéneos (lineales), se cumple que $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ y entonces:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{3}$$

    donde $\varepsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ corresponde a la **constante dieléctrica del material**. Esto modifica la Ley de Gauss, tal que esta ahora es

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}} \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \tag{4}$$

- **Condensadores:** Son arreglos de conductores separados por un dieléctrico, los cuales tienen la capacidad de almacenar carga. El **potencial es proporcional a la carga almacenada**, y a la constante de proporcionalidad se le llama **capacitancia** C [F], de manera que

$$C = \frac{Q}{V} \tag{5}$$

  El valor de C no depende del voltaje ni de la carga, sino que **depende puramente de la geometría del arreglo de los conductores**. Como los condensadores almacenan carga, se dicen que **almacenan energía en forma de campo eléctrico**. La energía W que almacenan se puede obtener mediante

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \iiint \vec{E} \cdot \vec{D} dV \tag{6}$$