Pauta Aux. 4

P1) c) Para calcular el potencial, a diferencia del campo que se hace "de adentro hacia afuera", lo haremos "de afuera hacia adentro". Así, primero calculamos el potencial para un punto arbitrario $\vec{r} = r\hat{r}$, tq $r > R_2$. Así

$$V(r>R_2) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad / \vec{E}(r'>R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\hat{r}\,;\ d\vec{l} = dr'\hat{r}$$

$$= -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\hat{r}\cdot dr'\hat{r}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr'}{r'^2} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r'}\right]_{\infty}^{r}$$

$$\Leftrightarrow V(r>R_2) = \cancel{+}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cancel{+}\frac{1}{r} + \cancel{\frac{1}{\infty}}^{0}\right] \Leftrightarrow \boxed{V(r>R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Luego, calculamos el potencial para un punto $\vec{r} = r\hat{r}$, pero ahora con $R_1 < r < R_2$ (dentro de la zona cargada). Así

$$V(R_1<r<R_2) = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{-\int_{\infty}^{R_2}\vec{E}(r'>R_2)\cdot dr'\hat{r}}_{(1)} \underbrace{-\int_{R_2}^{r}\vec{E}(R_1<r'<R_2)\cdot dr'\hat{r}}_{(2)}$$

Separamos en 2 integrales, pues el campo eléctrico es una función por partes.

$$(1):\quad -\int_{\infty}^{R_2}\vec{E}(r'>R_2)\cdot dr'\hat{r} = -\int_{\infty}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\hat{r}\cdot dr'\hat{r}$$

Corresponde a la integral usada para calcular $V(r>R_2)$, solo que con límite superior R_2 en lugar de r. Luego,

$$-\int_{\infty}^{R_2}\vec{E}(r'>R_2)\cdot dr'\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

(2): $$-\int_{R_2}^{r} \vec{E}(R_1<r'<R_2)\cdot dr'\hat{r} = -\int_{R_2}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r'^4-R_1^4}{r'^2(R_2^4-R_1^4)}\hat{r}\cdot dr'\hat{r}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\int_{R_2}^{r}\frac{r'^4-R_1^4}{r'^2}dr'$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\int_{R_2}^{r} r'^2dr' - R_1^4\int_{R_2}^{r}\frac{dr'}{r'^2}\right] = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\left[\frac{r'^3}{3}\right]_{R_2}^{r} + R_1^4\left[\frac{1}{r'}\right]_{R_2}^{r}\right]$$

$$\Leftrightarrow -\int_{R_2}^{r}\vec{E}(R_1<r'<R_2)\cdot dr'\hat{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\frac{r^3-R_2^3}{3} + R_1^4\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

De esta manera, el potencial obtenido es

$$V(R_1<r<R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\frac{r^3-R_2^3}{3} + R_1^4\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(R_1<r<R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} + \frac{R_2^3-r^3}{3(R_2^4-R_1^4)} + \frac{R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{r}\right)\right]}$$

Finalmente, para obtener el potencial en $\vec{r}=r\hat{r}$ tq' $r<R_1$, se realiza un procedimiento análogo, separando la integral en 3 partes (las 3 que definen a $\vec{E}$).

$$V(r<R_1) = -\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{-\int_{\infty}^{R_2}\vec{E}(r'>R_2)\cdot dr'\hat{r}}_{(3)} \underbrace{-\int_{R_2}^{R_1}\vec{E}(R_1<r'<R_2)\cdot dr'\hat{r}}_{(4)} \underbrace{-\int_{R_1}^{r}\vec{E}(r'<R_1)\cdot dr'\hat{r}}_{(5)}$$

Notar que la integral (3) es idéntica a la integral (1) ya calculada. Además, la integral (4) es idéntica a la integral (2), solo que con límite superior R_1 en lugar de r. Así

$$-\int_{R_2}^{R_1}\vec{E}(R_1<r'<R_2)\cdot dr'\hat{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^4-R_1^4)}\left[\frac{R_1^3-R_2^3}{3} + R_1^4\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

Finalmente, dado que

$$\vec{E}(r<R_1) = 0 \Rightarrow -\int_{R_1}^{r} \vec{E}(r'<R_1)\cdot d\vec{r}' = 0$$

De esta manera, sustituyendo (3) y (4), obtenemos que

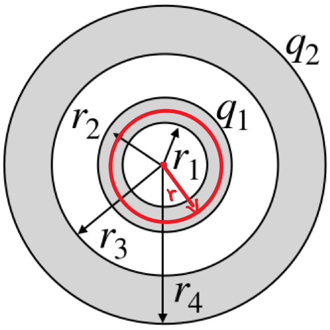
$$V(r<R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_2^4-R_1^4)}\left[\frac{R_1^3-R_2^3}{3} + R_1^4\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(r<R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} + \frac{R_2^3-R_1^3}{3(R_2^4-R_1^4)} + \frac{R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\right]}$$

Así, el potencial eléctrico en todo el espacio está dado por

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > R_2 \\[2mm] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{R_2^3-r^3}{3(R_2^4-R_1^4)} + \dfrac{R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{r}\right)\right], & R_1 < r < R_2 \\[2mm] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{R_2^3-R_1^3}{3(R_2^4-R_1^4)} + \dfrac{R_1^4}{R_2^4-R_1^4}\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}\right)\right], & r < R_1 \end{cases}$$

P2) a) Recordando que dentro de un conductor $\vec{E}=0$, y que por lo mismo $\rho=0$ dentro de todo conductor, podemos usar ley de Gauss para determinar las cargas en c/superficie. Así, considerando la esfera gaussiana de la figura, de radio r tal que $r_1<r<r_2$, se tiene que

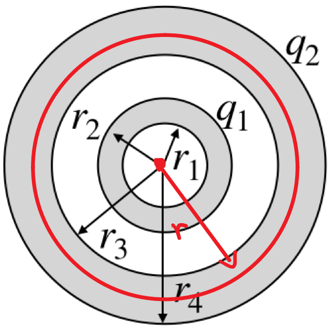


$$\cancelto{0,\ \vec{E}=0}{\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S}} = \frac{Q(r=r_1)}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{Q(r=r_1)=0}$$

Como en la superficie interior $(r=r_1)$ no hay carga, toda la carga debe estar en la superficie exterior $(r=r_2)$

$$\Rightarrow \boxed{Q(r=r_2) = q_1}$$

Luego, considerando la misma esfera, pero con $r_3<r<r_4$, nuevamente se tendrá que



$$\cancelto{0,\ \vec{E}=0}{\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S}} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{Q_{enc}=0}$$

La carga encerrada por la esfera gaussiana consta de la carga en $r=r_2$ y en $r=R_3$, tal que

$$Q_{enc} = Q(r=r_2) + Q(r=r_3) \stackrel{!}{=} 0 \qquad / Q(r=r_2) = q_1$$

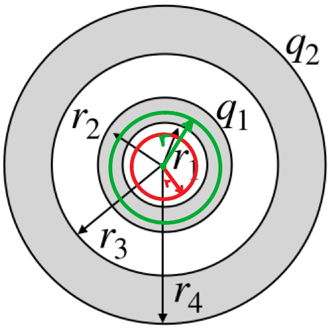
$$\Leftrightarrow \boxed{Q(r=r_3) = -q_1}$$

Finalmente, como el casquete exterior tiene carga q_2, y esta está en sus superficies, se tiene que

$$\cancelto{-q_1}{Q(r=r_3)} + Q(r=r_4) \stackrel{!}{=} q_2$$

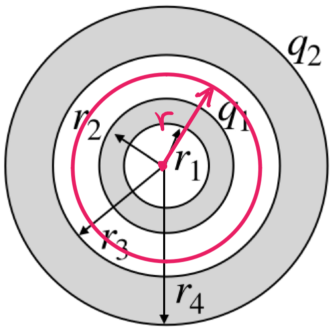
$$\Leftrightarrow \boxed{Q(r=r_4) = q_1+q_2}$$

b) Mediante la ley de Gauss, es posible determinar $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$ (simetría) en todo el espacio. Utilizando una esfera gaussiana de radio r arbitrario tq' $r < r_1$



$r < r_1$ $\qquad Q_{inc} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r<r_1) = 0}$

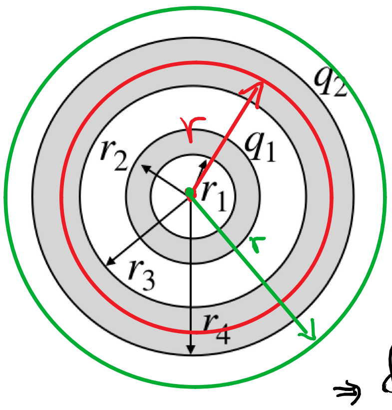
$r_1 < r < r_2$ $\qquad \boxed{\vec{E}(r_1<r<r_2) = 0}$ (dentro del conductor)



$r_2 < r < r_3$ $\qquad Q_{inc} = q_1 \;;\; \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\cdot r^2 \cancel{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\theta\, d\phi}^{\,4\pi}$

$= 4\pi r^2 E(r)$

$$\Rightarrow \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{inc}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(r_2<r<r_3) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$



$r_3 < r < r_4$ $\qquad \boxed{\vec{E}(r_3<r<r_4) = 0}$ (dentro del conductor)

$r > r_4$ $\qquad Q_{inc} = q_1 + q_2 \;;\; \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\cdot r^2 \cancel{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\theta\, d\phi}^{\,4\pi} = 4\pi r^2 E(r)$

$$\Rightarrow \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{inc}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_1+q_2}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E}(r>r_4) = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

Una vez calculado el campo en c/zona del espacio, calculamos el potencial en c/u de estas zonas (de afuera hacia adentro).

$r > r_4$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad / \; d\vec{l} = dr\,\hat{r}$$

$$= -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(r'>r_4)\cdot dr'\,\hat{r} = -\int_{\infty}^{r} \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,\hat{r}\cdot dr'\,\hat{r} = +\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cancel{\int_{\infty}^{r}\frac{dr'}{r'^2}}^{\,+\frac{1}{r}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(r>r_4) = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

$r_3 < r < r_4$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad / d\vec{l} = dr'\hat{r}$$

$$= \underbrace{-\int_{\infty}^{r_4} \vec{E}(r'>r_4)\cdot dr'\hat{r}}_{= \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_4}\text{, integral calculada antes}} - \cancel{\int_{r_4}^{r} \vec{E}(r_3<r'<r_4)\cdot dr'\hat{r}}^{0,\ \vec{E}(r_3<r<r_4)=0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(r_3<r<r_4) = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_4}}$$

$r_2 < r < r_3$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad / d\vec{l} = dr'\hat{r}$$

$$= \underbrace{-\int_{\infty}^{r_4} \vec{E}(r'>r_4)\cdot dr'\hat{r}}_{= \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_4}\text{, integral calculada antes}} - \cancel{\int_{r_4}^{r_3} \vec{E}(r_3<r'<r_4)\cdot dr'\hat{r}}^{0,\ \vec{E}(r_3<r<r_4)=0} - \int_{r_3}^{r} \vec{E}(r_2<r'<r_3)\cdot dr'$$

$$= \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_4} - \int_{r_3}^{r} \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\hat{r}\cdot dr'\hat{r} = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_4} \cancel{-} \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cancel{\int_{r_3}^{r}\frac{dr'}{r'^2}}^{+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)}$$

$$= \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_4} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(r_2<r<r_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_3}\right)+\frac{q_2}{r_4}\right]}$$

$r < r_2$

Como $\vec{E}(r<r_1)=0 \wedge \vec{E}(r_1<r<r_2)=0 \Rightarrow \vec{E}(r<r_2)=0$, lo que simplifica mucho el desarrollo. Así

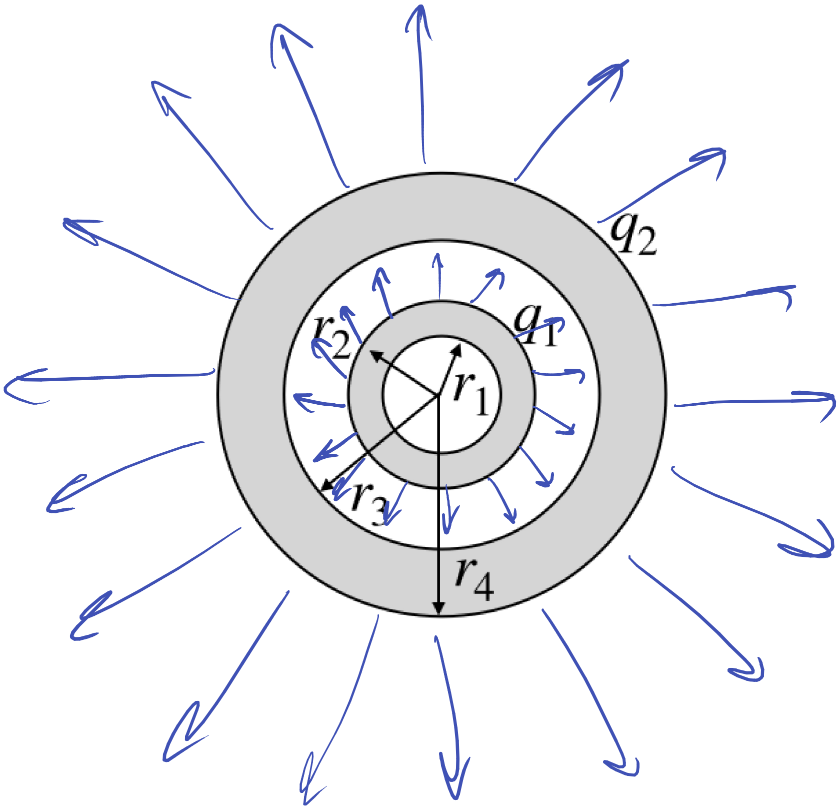
$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad / d\vec{l} = dr'\hat{r}$$

$$= \underbrace{-\int_{\infty}^{r_4} \vec{E}(r'>r_4)\cdot dr'\hat{r}}_{=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_4}\text{, integral calculada antes}} - \underbrace{\cancel{\int_{r_4}^{r_3} \vec{E}(r_3<r'<r_4)\cdot dr'\hat{r}}}_{0,\ \vec{E}(r_3<r<r_4)=0} - \underbrace{\int_{r_3}^{r_2} \vec{E}(r_2<r'<r_3)\cdot dr'\hat{r}}_{=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\text{, integral calculada antes}} - \underbrace{\cancel{\int_{r_3}^{r_2} \vec{E}(r'<r_2)\cdot dr'\hat{r}}}_{0,\ \vec{E}(r<r_2)=0}$$

$$= \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_4} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)$$

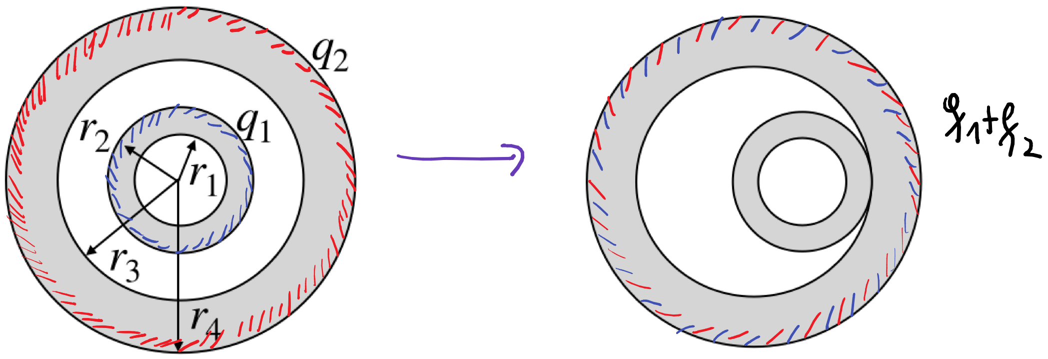
$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{V(r<r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_3}\right)+\frac{q_2}{r_4}\right]}$$

Finalmente, las líneas de campo se ven como sigue



Notar que son radiales hacia afuera $(\vec{E}=E(r)\hat{r})$, y que no hay dentro de los conductores ($\vec{E}=0$ dentro de ellos).

c) Cuando el cascarón interior entra en contacto con el exterior, al ser materiales conductores, la carga del cascarón interior fluirá libremente hasta localizarse en la superficie más exterior del cascarón. Lo descrito anteriormente se visualiza en el sgte. dibujo



En consecuencia, la carga q_1 presente en la superficie del cascarón se desplaza a la superficie del cascarón exterior. Luego, para la carga encerrada por la esfera gaussiana usada anteriormente, se cumple que

$$Q_{enc} = \begin{cases} 0, & r < r_4 \\ q_1 + q_2, & r > r_4 \end{cases}$$

d) De esta manera, existen 2 posibles valores para el campo eléctrico

$r < r_4$ $\quad Q_{enc} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(r<r_4) = 0}$

$r > r_4$ $\quad Q_{enc} = q_1 + q_2 \quad ; \quad \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\cdot 4\pi r^2$

$$\Rightarrow \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \iff E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{q_1+q_2}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r>r_4) = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

Luego, en esta nueva configuración, las líneas de campo se ven como sigue