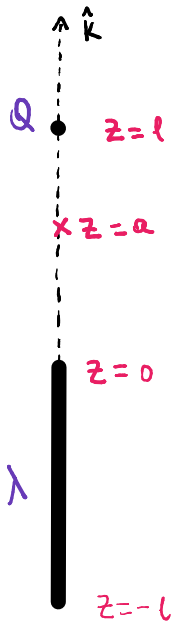


Pauta Auxiliar 1

P1



El campo eléctrico en todo el espacio, por superposición, corresponde a la suma de los campos generados por la barra y la partícula puntual.

$$\vec{E} = \vec{E}_{part} + \vec{E}_{barrn}$$

Calculando % por Separado

$\vec{E}_{\text{part}}$ | $\vec{r}' = l \hat{k}$; $\vec{r} = a \hat{k} \rightarrow$ donde podremos calcular el campo eléctrico

↓
donde está la carga que genera el campo

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{part}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\hat{k} - l\hat{k}}{\|a\hat{k} - l\hat{k}\|^3} Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{k}}{\|(a-l)\hat{k}\|^3}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}_{\text{part}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a-l)^2} \hat{k}$$

/ $\|(a-l)\hat{k}\|^3 = -(a-l)^3$

↓
añadimos el
Signo - pues
 $a < l \Rightarrow a-l < 0$

$\vec{E}_{\text{barra}}$ $\vec{r}' = z' \hat{k}$; $\vec{r} = a \hat{k}$; $dq = \lambda dl$, $dl = dz'$, $z' \in [-l, 0]$

parametrización de $\downarrow$ dónde podremos
dónde está la carga $\downarrow$ calcular el campo

distribución $\downarrow$
lineal de carga

la barra vive en el eje
z escribimos su parametrización

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{barr}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^0 \frac{q\hat{k} - z'\hat{k}}{\|q\hat{k} - z'\hat{k}\|^3} \lambda dz' \quad / \quad \|q\hat{k} - z'\hat{k}\|^3 = (q - z')^3$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{barren}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{k} \int_{-l}^0 \frac{a-z'}{(a-z')^2} dz' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{k} \int_{-l}^0 \frac{dz'}{(a-z')^2} \quad / \quad v = a-z' \Rightarrow dv = -dz'$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{barr}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{k} \int_{a+l}^a \frac{dv}{v^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \hat{k} \left[-\frac{1}{v} \right]_{a+l}^a = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{beam}} = \frac{\lambda I}{4\pi \epsilon_0 a (a+t)} \hat{k}$$

Así, el campo total en $z=a$ es

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{barra}} + \vec{E}_{\text{pnt}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda l}{a(a+l)} - \frac{Q}{(a-l)^2} \right) \hat{k}$$

Luego, para calcular la fuerza que Q le ejerce a la barra, puesto que se trata de una distribución continua de carga, usamos que

$$d\vec{F} = \vec{E} dq \Rightarrow \vec{F} = \int \vec{E} dq, \quad \vec{E} = \vec{E}_{\text{pnt}} \rightarrow \text{No usamos } \vec{E}_{\text{barra}} \text{ pues la barra no siente su propio campo!!}$$

Seguimos la misma parametrización que antes, de manera que

$$dq = \lambda dl, \quad dl = dz', \quad z' \in [-l, 0]$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int_{-l}^0 -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(z'-l)^2} \hat{k} \lambda dz' \rightarrow \text{Notar que es la misma expresión calculada antes, pero en lugar de usar } a \text{ usamos } z', \text{ pues queremos ver el campo en toda la barra } (z' \in [-l, 0]), \text{ no solo en } z=a.$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \lambda \hat{k} \int_{-l}^0 \frac{dz'}{(z'-l)^2}$$

$$z'-l = u \Rightarrow dz' = du$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \lambda \hat{k} \int_{-2l}^{-l} \frac{du}{u^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \lambda \cdot \left(\frac{1}{-l} - \frac{1}{-2l} \right) \hat{k} = \frac{Q\lambda}{4\pi l \epsilon_0} \left(-1 + \frac{1}{2} \right) \hat{k}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F} = -\frac{Q\lambda}{8\pi l \epsilon_0} \hat{k}$$

Notar que el resultado obtenido tiene sentido, pues la carga puntual empuja a la barra cargada hacia abajo, puesto que ambos tienen carga positiva.

P2) a) Calculamos el campo eléctrico en coordenadas cilíndricas mediante

$\vec{r} = z\hat{k}$; $\vec{r}' = \rho'\hat{\rho}'$; $dq = \sigma_0 dS$; $dS = \rho' d\rho' d\phi'$; $\rho' \in [0, R] \rightarrow \rho'$ va desde 0 a R para formar el disco
 ↓ donde queremos calcular el campo ↓ parametrización de donde está la carga ↓ distribución superficial de carga ↓ elemento de superficie correspondiente de la parametrización ↓ $\phi' \in [0, 2\pi]$ puesto que se trata de un disco completo, ϕ' va de 0 a 2π (medio disco sería de 0 a π , por ejemplo).

Tal que, sustituyendo en la expresión para $\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z\hat{k} - \rho'\hat{\rho}'}{\|z\hat{k} - \rho'\hat{\rho}'\|^3} \sigma_0 \rho' d\rho' d\phi' \quad / \quad \|z\hat{k} - \rho'\hat{\rho}'\|^3 = (z^2 + \rho'^2)^{3/2} \quad \text{pues } \hat{k} \perp \hat{\rho}'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z\hat{k}}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \sigma_0 \rho' d\rho' d\phi'}_{(1)} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho'\hat{\rho}'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \sigma_0 \rho' d\rho' d\phi'}_{(2)} \right]$$

Resolviendo 1º integral por separado sale de la integral pues no depende de ρ' ni ϕ'

(1):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z\hat{k}}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \sigma_0 \rho' d\rho' d\phi' = \sigma_0 z\hat{k} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho' d\rho' d\phi'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

$$= \sigma_0 z\hat{k} \left(\int_0^{2\pi} d\phi' \right) \left(\int_0^R \frac{\rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \right)$$

$$= \cancel{2\pi} \sigma_0 z\hat{k} \int_{\rho'=0}^{\rho'=R} \frac{2 \cdot \rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \quad / \quad u = z^2 + \rho'^2 \Rightarrow du = 2\rho' d\rho'$$

$$= \pi \sigma_0 z\hat{k} \int_{u=z^2}^{u=z^2+R^2} \frac{du}{u^{3/2}} \quad \left. \frac{-2}{\sqrt{u}} \right|_{z^2}^{z^2+R^2}$$

$$= \pi \sigma_0 z\hat{k} \cdot -2 \left(\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right)$$

$$= 2\pi \sigma_0 z \left(\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \hat{k}$$

$$(2): \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho' \hat{\rho}'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \sigma_0 \rho' d\rho' d\phi' = \sigma_0 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \hat{\rho}' d\phi' \right)}_{(1)} \left(\int_0^R \frac{\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' \right)$$

Separamos de la manera anterior puesto que $\hat{\rho}' = \cos\phi' \hat{x} + \sin\phi' \hat{y}$, por lo que $\hat{\rho}'$ depende de ϕ' .
Desarrollando (1):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \hat{\rho}' d\phi' &= \int_0^{2\pi} \cos\phi' \hat{x} + \sin\phi' \hat{y} d\phi' = \hat{x} \int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' + \hat{y} \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' \\ &= \hat{x} (\sin(2\pi) - \sin(0)) + \hat{y} (-\cos(2\pi) + \cos(0)) \\ &= \hat{x} (0 - 0) + \hat{y} (-1 + 1) = 0 \end{aligned}$$

De esta manera, $\int_0^{2\pi} \hat{\rho}' d\phi' = 0$ (resultado que pueden usar después en controles y ejercicios). Luego,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho' \hat{\rho}'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \sigma_0 \rho' d\rho' d\phi' = \sigma_0 \left(\int_0^{2\pi} \hat{\rho}' d\phi' \right) \left(\int_0^R \frac{\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' \right) = 0$$

Así, la segunda integral resulta nula, por lo que el campo eléctrico deseado viene dado únicamente por (1), tal que finalmente

$$\vec{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[2\pi\sigma_0 z \left(\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{k} + 0 \right]$$

$$\Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{k}$$

b) Si se considera un disco de radio infinito, es equivalente a un plano infinito. De esta manera, basta tomar $R \rightarrow \infty$ en el resultado anterior tal que

$$\vec{E}_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{k} = \frac{\sigma_0 z}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|z|} \hat{k} \Leftrightarrow \vec{E}_\infty = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{k}$$

$\sqrt{z^2} = |z|$

Dependiendo de si: $z > 0$ o $z < 0$, $\frac{z}{|z|} = 1$ o $\frac{z}{|z|} = -1$, indicando así si el campo eléctrico apunta hacia arriba o hacia abajo, de manera que

$$\vec{E}_\infty = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k} & , z > 0 \\ -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{k} & , z < 0 \end{cases}$$

Aparentemente se ve reflejado en el siguiente dibujo, donde se observan las líneas de campo del plano infinito.

