



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Electromagnetismo

*apuntes informales de clases
&
problemas*

Francisco BRIEVA

enero 2024

Índice general

	Prefacio	1
	Bibliografía	3
1.	Introducción	5
2.	Electrostática	11
2.1.	La carga eléctrica	11
2.1.1.	Fenomenología	11
2.1.2.	Densidades de carga	12
2.1.3.	Ley de fuerza eléctrica (Coulomb)	12
2.1.4.	Principio de superposición	13
2.1.5.	Propiedades de la fuerza electrostática	13
2.1.6.	Ejemplos	14
2.2.	El campo eléctrico	15
2.2.1.	Densidades de carga eléctrica y su campo	15
2.2.2.	Líneas de campo eléctrico	16
2.2.3.	Propiedades del campo electrostático	17
2.2.4.	Ejemplos	20
2.3.	El potencial eléctrico	21
2.3.1.	La función potencial	21
2.3.2.	Superficies equipotenciales	22
2.3.3.	Unidades	23
2.3.4.	Ejemplos	23
2.3.5.	Expansión multipolar del potencial	24
2.3.6.	Dipolo eléctrico	25
2.3.7.	Ecuación de Poisson (Laplace)	26
2.3.8.	Energía eléctrica	29
2.4.	Problemas	30
3.	Campos eléctricos en la materia	43
3.1.	Conductores	43
3.1.1.	Modelo de un conductor (ideal)	43
3.1.2.	Inducción de carga eléctrica	44
3.1.3.	Ejemplos	45
3.1.4.	Sistemas de conductores	49

3.1.5.	Energía eléctrica y fuerzas	52
3.2.	Dieléctricos	55
3.2.1.	Modelo de un dieléctrico (ideal)	55
3.2.2.	Polarización y densidades de carga	56
3.2.3.	Vector desplazamiento	57
3.2.4.	Condiciones de borde en Electrostática	59
3.2.5.	Energía eléctrica y fuerza en dieléctricos	61
3.2.6.	Ejemplos	63
3.3.	Problemas	70
4.	Corrientes eléctricas	81
4.1.	Conceptos	81
4.1.1.	Conducción eléctrica	81
4.1.2.	Caracterización	82
4.1.3.	Ecuación de continuidad	83
4.2.	Conducción en medios materiales	84
4.2.1.	Conducción metálica (ley de Ohm)	84
4.2.2.	Tiempo de relajación	85
4.2.3.	Resistencia eléctrica	87
4.2.4.	Ejemplos	88
4.2.5.	Disipación de energía en conductores	89
4.2.6.	Condiciones de borde	90
4.3.	Fuerza electromotriz (fem)	91
4.4.	Redes eléctricas	93
4.5.	Problemas	96
5.	Magnetostática	103
5.1.	La corriente eléctrica	103
5.1.1.	Ley de fuerza magnética (Ampere)	104
5.2.	El campo magnético	106
5.2.1.	Introducción	106
5.2.2.	Espiras en campo magnético	107
5.2.3.	Fuerza de Lorentz	109
5.2.4.	Ejemplos	110
5.3.	Propiedades del campo magnético	114
5.3.1.	Potencial magnético vector	116
5.4.	Expansión multipolar	119
5.5.	Aplicaciones	123
5.6.	Problemas	127
6.	Campos magnéticos en la materia	139
6.1.	Magnetización del medio material	139
6.1.1.	Fenomenología	139
6.1.2.	Vector magnetización y densidades de corriente	140
6.1.3.	Vector intensidad del campo magnético	141
6.1.4.	Condiciones de borde en Magnetostática	142

6.2.	Comportamiento de medios materiales	142
6.2.1.	Modelo empírico	142
6.2.2.	Ferromagnetismo	144
6.3.	Problemas	147
7.	Inducción electromagnética	153
7.1.	La fuerza electromotriz (fem)	153
7.1.1.	Fenómeno de inducción	153
7.1.2.	Sobre el origen de la fem	154
7.1.3.	Forma diferencial de ley de inducción	157
7.1.4.	Aplicaciones	158
7.2.	Inductancias	162
7.2.1.	Coefficientes de inducción	162
7.2.2.	Ejemplos	164
7.3.	Energía magnética, fuerzas y torques	168
7.4.	Problemas	171
8.	Ondas electromagnéticas	183
8.1.	Ecuaciones de Maxwell	183
8.1.1.	Corriente de desplazamiento	183
8.1.2.	Las ecuaciones del electromagnetismo	185
8.2.	Contenido en la descripción de Maxwell	187
8.2.1.	Relatividad especial	187
8.2.2.	Conservación de la energía electromagnética	188
8.3.	Ondas electromagnéticas	189
8.3.1.	Fenómeno de propagación	189
8.3.2.	Ondas planas monocromáticas	190
8.3.3.	Transporte de energía	192
8.3.4.	Polarización de onda electromagnética	194
8.3.5.	Reflexión y refracción	195
8.4.	Problemas	200
A.	Complemento matemático	207
B.	Respuestas problemas seleccionados	211

Prefacio

Para facilitar el estudio, he compilado estas notas informales sobre las materias incluidas en el programa del curso Electromagnetismo del Plan Común ofrecido por la Escuela de Ingeniería y Ciencias. No pretenden ser exhaustivas ni rigurosas. Más bien, una mezcla de argumentos y derivaciones simples, conducentes a construir el marco teórico de Maxwell que explica los fenómenos eléctricos y magnéticos. Están pensados para ser usados en un tablet, de manera que quienes los usen vayan complementando el apunte con las notas personales que consideren relevantes. La alternativa tradicional de imprimir el apunte y escribir las observaciones pertinentes también debiera funcionar.

Un texto formal es siempre la mejor fuente de estudio. Y hay varios en la bibliografía que acompaña este documento. Si el tiempo no es problema o hay interés por profundizar conceptos y aplicaciones, seguir un texto es mi recomendación. Enfrentados a la urgencia, espero que estos apuntes les ayuden.

Cada capítulo está acompañado de problemas, del estilo y nivel esperado para el curso. Muchos de ellos han sido parte de controles y exámenes pasados, como se indica en el encabezado respectivo. La fuente de los problemas es variada, la gran mayoría inspirados o reproducidos de textos sobre Electromagnetismo que han sido importantes a través de los años (ver bibliografía). Otros, corresponden a problemas planteados en otras latitudes o fueron diseñados en colaboración con profesores que han dictado el curso. Efectivamente, los problemas estándares en cualquier disciplina se reciclan en el tiempo, y nuestro caso no es la excepción. Por ello resulta hoy difícil identificar al autor que originalmente propuso un problema: sólo podemos agradecer su esfuerzo.

Aprovecho la oportunidad de destacar el trabajo de Profesores Auxiliares, quienes aportaron a la elaboración y selección de problemas durante el desarrollo de alguna de las últimas versiones del curso. Muy especialmente a José Fuentealba, Lucas González, Alejandro Gutiérrez, Matías Gutiérrez, Martín Gutiérrez, Miguel Letelier, Susana Marquez, Manuel Morales, Paulina Palma, Benjamin Pérez, Nicolás Valdés y Cristóbal Zenteno.

Francisco Brieva
enero 2024

Bibliografía

Textos (incluidos en Programa del Curso)

- “Electromagnetismo”, Patricio Cordero, Editorial Universitaria (2016)
- “Introduction to electrodynamics”, David Griffith, 4a edición, Cambridge University Press (2017)

Otros textos (interesantes)

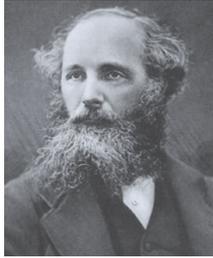
- "Problems in Classical Electromagnetism: 157 Exercises with Solutions", Macchi A., Moruzzi G. y Pegoraro F. - (Springer 2017)
- “Electromagnetism”, Pollack G. y Stump D. - Wiley (2002)
- “Electricity and Magnetism”, Purcell E.M., Morin D.J. - Cambridge University Press (2013)
- “Fundamentos de la teoría electromagnética”, J.R. Ritz, F.J. Milford y W. Christy (1996)
- “Electromagnetic Fields and Waves”, Paul Lorrain, Dale R. Corson, François Lorrain (3ra edición 1987)
- “Fundamentos de la teoría electromagnética”, J.R. Ritz, F.J. Milford y W. Christy (1996)
- “The Feynman Lectures on Physics, Vol. II: The New Millennium Edition: Mainly Electromagnetism and Matter”, Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands (2012, 1a edición 1964)
- “Electricity and Magnetism”, Berkeley Physics Course Vol 2, Edward M. Purcell (2a edición, 2011)

Problemas (formato apuntes, en U-cursos)

- [Problemas propuestos y resueltos de Electromagnetismo, Rodrigo Chi \(2016\)](#)

Introducción

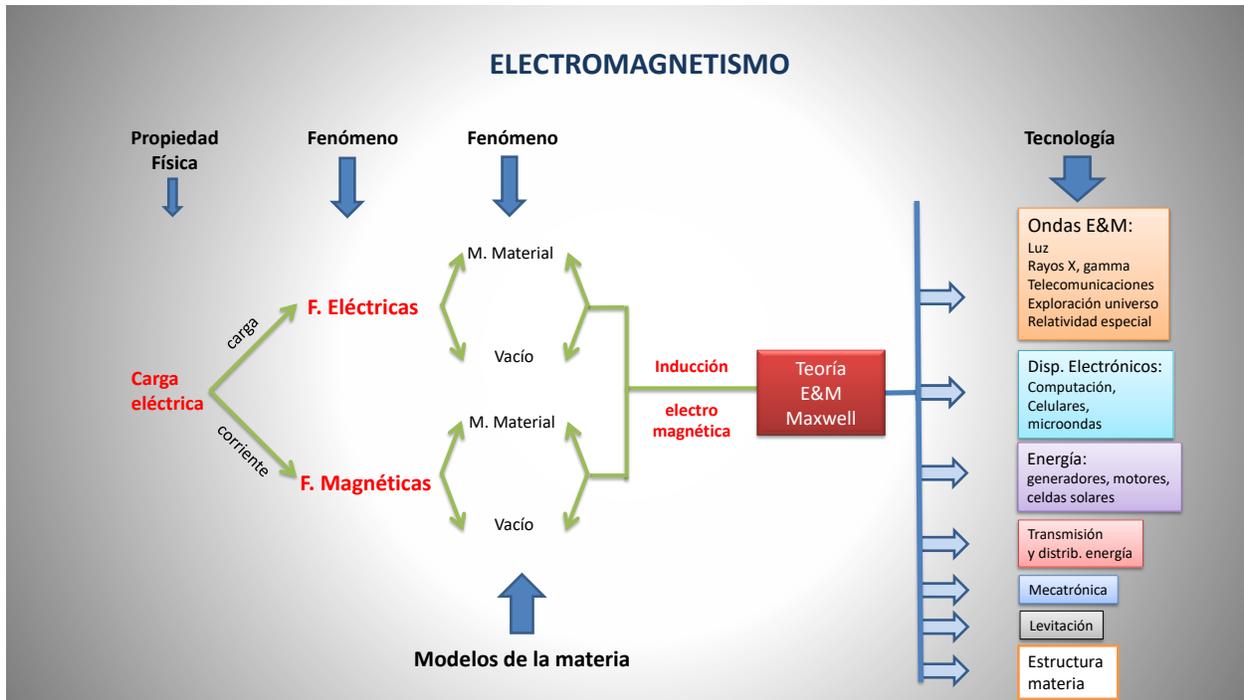
¿Por qué Electromagnetismo?

- * Este curso trata sobre conocer y comprender una de las propiedades fundamentales de la materia: **la carga eléctrica**.
 - * En el proceso, se descubrirá como se logró construir uno de los marcos teóricos más exitosos (**James C. Maxwell (1831-1879)**) en la historia de la Física Clásica para **describir y predecir** los fenómenos eléctricos y magnéticos.
- 
- * La Ciencia y la Tecnología que derivó de este conocimiento, y sigue ampliando sus fronteras, transformó y ha generado amplias oportunidades a la humanidad.
 - * Entender los conceptos básicos del Electromagnetismo es, hoy en día, una cuestión cultural.

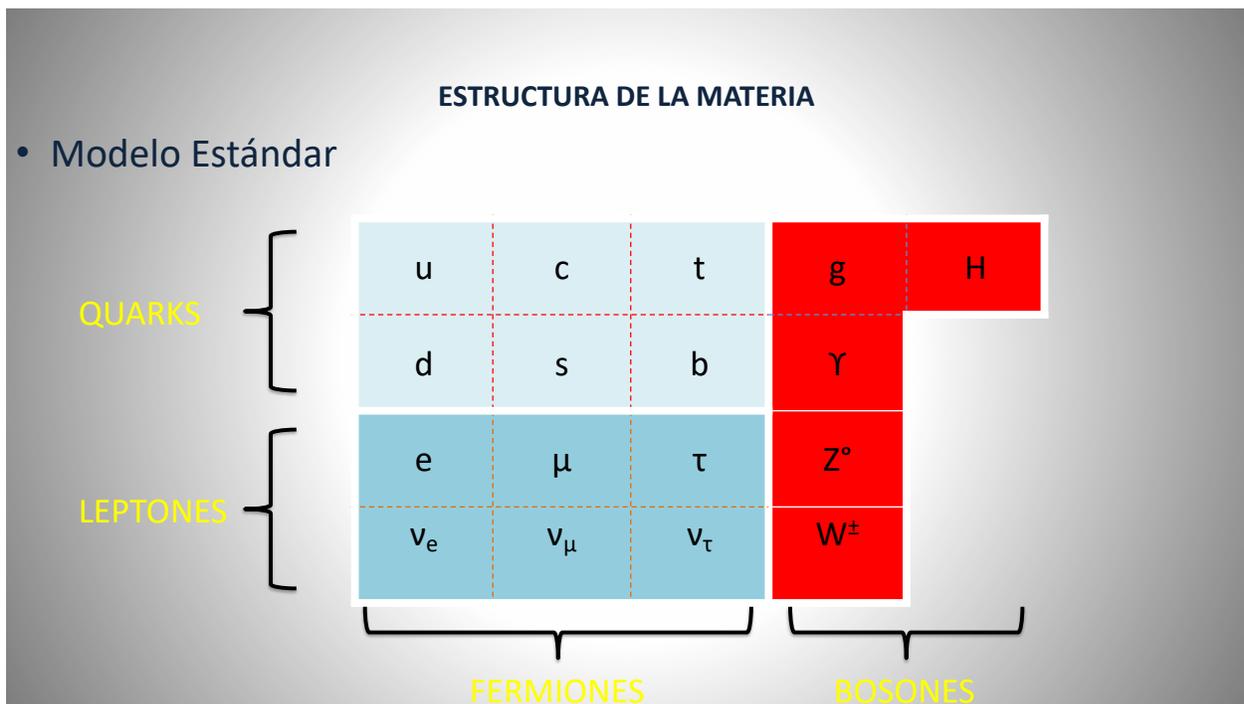
Videos/Lecturas en Internet

- * **Motivacional**
Breve película: [Viajeros y otras](#)
- * **Los orígenes**
Una fuerza fundamental en la naturaleza (National Geographics): [Electromagnetismo](#)
- * **Sobre las tecnologías hoy**
Temas importantes hoy (New Scientist): [Actualidad](#)
- * **Investigar sobre la Historia del Electromagnetismo: Línea del tiempo**

Del fenómeno a su impacto



La esencia: los componentes fundamentales



Construyendo la materia

“ensalada”



FERMIONES

- Hacen la materia observada
- Propiedades (masa, carga, spin,)
- Son 12
- Quarks vienen en pares
 - u, c, t ... carga eléctrica $2/3 |e|$
 - d, s, b ... carga eléctrica $-1/3 |e|$
- Leptones: e, μ , τ c. eléct. $- |e|$



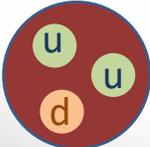
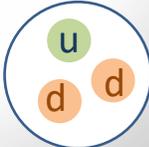
BOSONES

- Intermediador interac. fundamentales
- Gluón Interacciones fuertes
- Fotón Interacción electromagnética
- W^\pm, Z^0 Interacciones débiles
- H (Higgs)

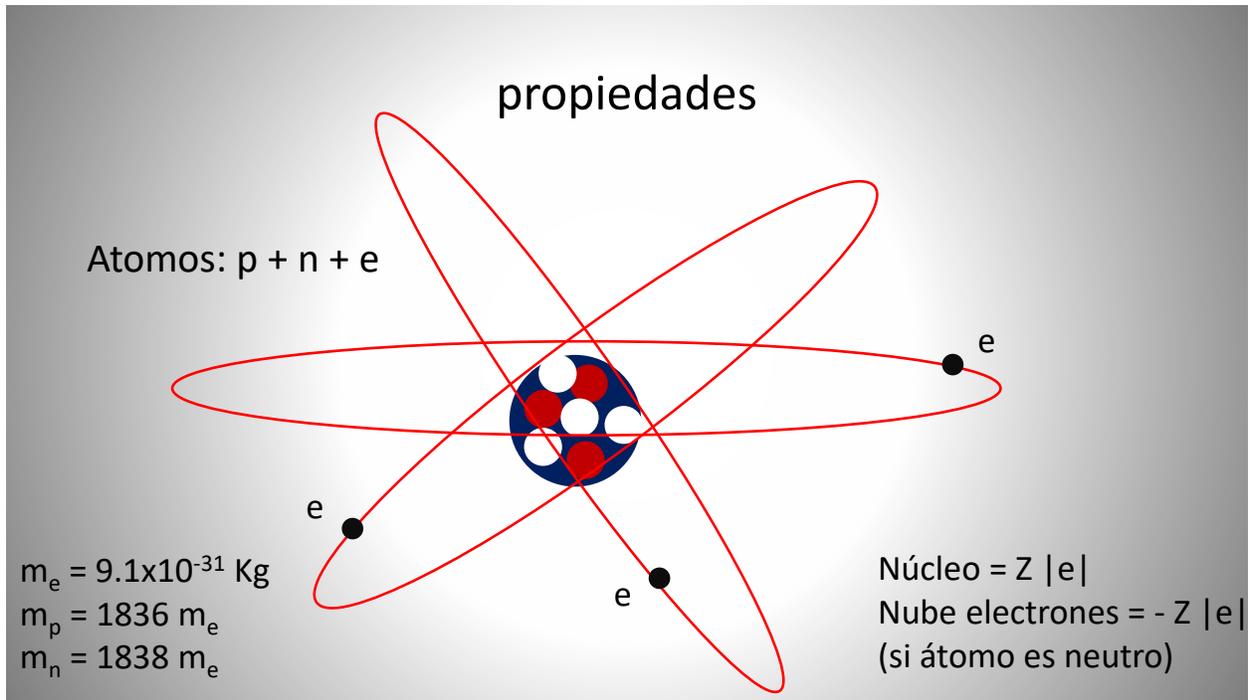
Propiedades asociadas a la carga eléctrica

propiedades

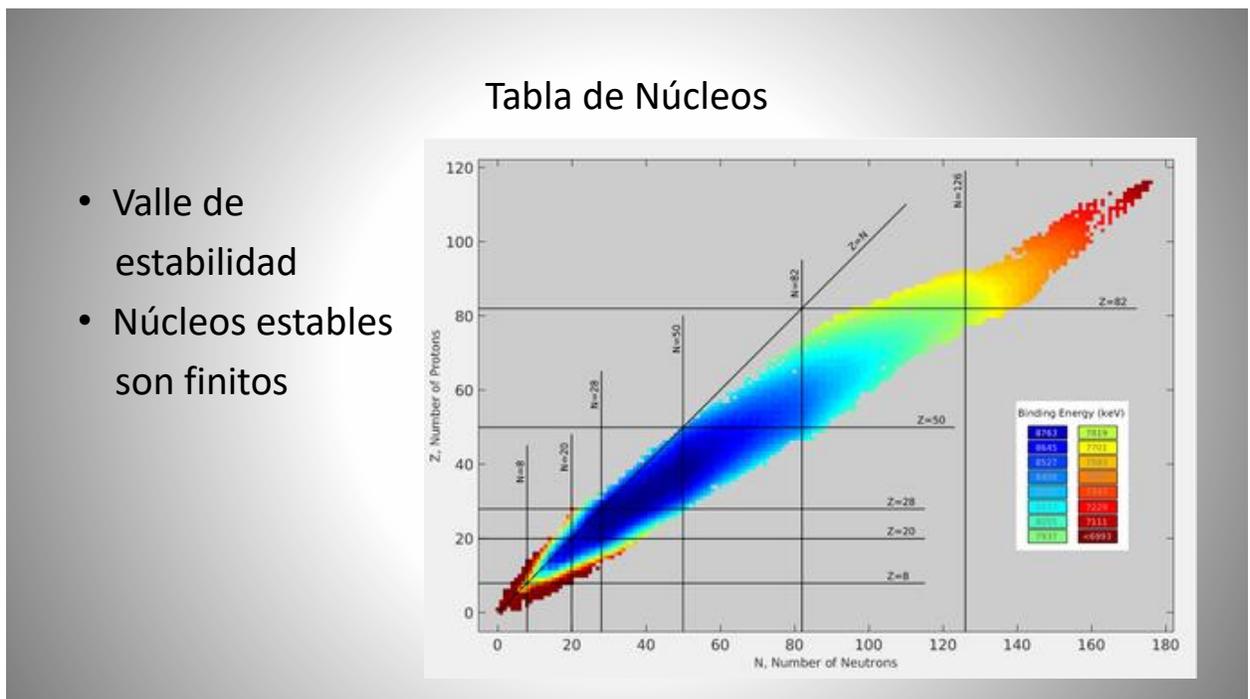
- Referencia
 - Carga eléctrica del electrón $q_e = - |e|$
 - $|e| = 1.6 \times 10^{-19}$ [MKS]
- Quarks no aparecen libres en la naturaleza.
 - _ Se combinan formando HADRONES: Proton {u,u,d} Neutron {u,d,d}

	Carga eléctrica	$+ e $		
proton				
			0	neutron

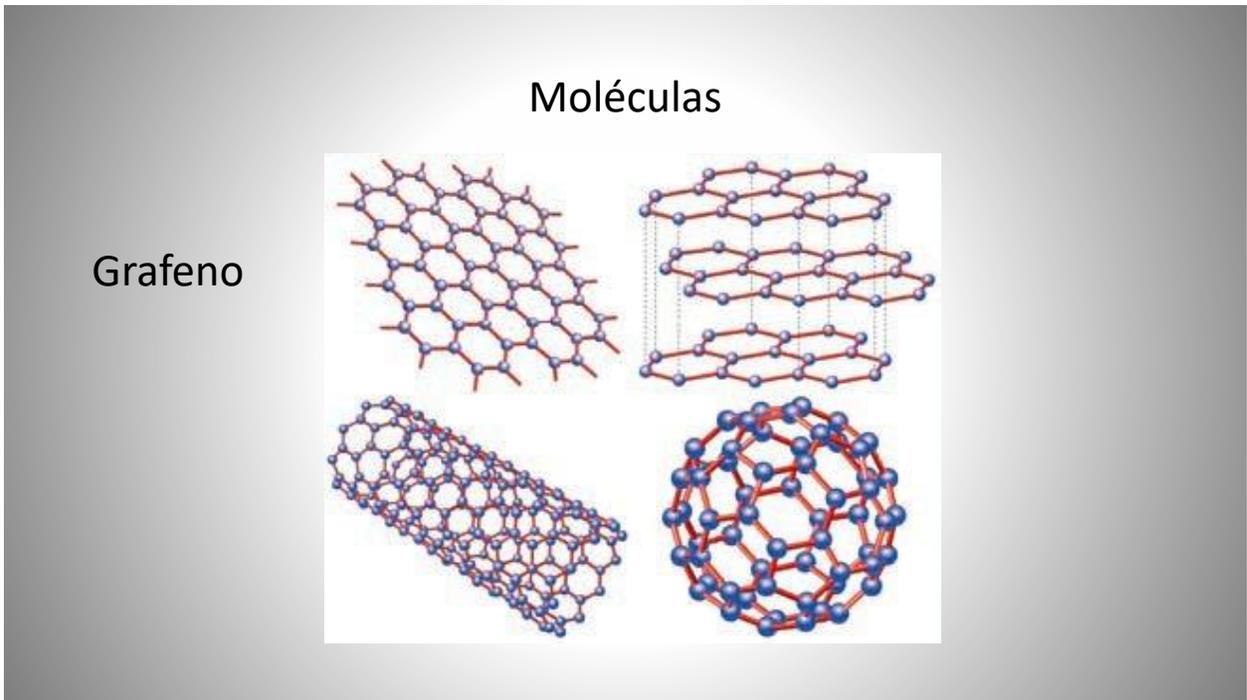
Estructuras más complejas



Fenómeno electromagnético define a la naturaleza, como la conocemos



y permite formar estructuras materiales novedosas



Electrostática

2.1. La carga eléctrica

2.1.1. Fenomenología

Hechos experimentales:

* la carga eléctrica se presenta en dos estados posibles:

- positiva y negativa
- partícula de referencia: electrón

carga eléctrica $q_e = -|e|$

$$|e| = 1,6021 \times 10^{-19} [\text{C}] \quad m_e = 9,109 \times 10^{-31} [\text{Kg}]$$

[C] \equiv Coulomb (SI)

* La carga eléctrica total (positiva + negativa) se conserva en un sistema cerrado,

$$Q_{\text{neto}} = \sum_i q_i = \text{constante} \quad q_i \equiv \text{carga partícula } i$$

Puede redistribuirse o combinarse de maneras diferentes.

* La carga eléctrica macroscópica está cuantizada,

$$|Q| = N|e| \quad N \rightarrow \infty$$

* ¿Cómo se caracteriza, entonces, la carga de un cuerpo/objeto?

1 \rightarrow pocas partículas \rightarrow Se tratan explícitamente

N (grande) partículas \rightarrow Densidades de carga eléctrica

2.1.2. Densidades de carga

Hipótesis de trabajo:

Considerar la carga como una variable continua, descripción macroscópicamente adecuada por la gran cantidad de cargas electrónicas envueltas.

Consecuencia:

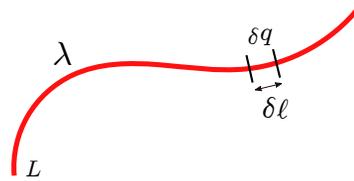
introducir la idea de densidades (distribuciones espaciales) continuas de carga eléctrica.

- **Densidad lineal de carga**

$$\lambda = \lim_{\delta \ell \rightarrow 0} \left(\frac{\delta q}{\delta \ell} \right) \equiv \frac{dq}{d\ell}$$

La carga total del objeto,

$$Q_{total} = \int_L dq = \int_L \lambda d\ell \rightarrow \lambda L \quad \text{si } \lambda = \text{cte}$$

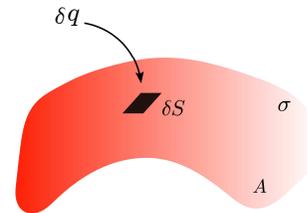


- **Densidad superficial de carga**

$$\sigma = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\delta q}{\delta S} \right) \equiv \frac{dq}{dS}$$

La carga total del objeto,

$$Q_{total} = \int_A dq = \int_A \sigma dS \rightarrow \sigma A \quad \text{si } \sigma = \text{cte}$$

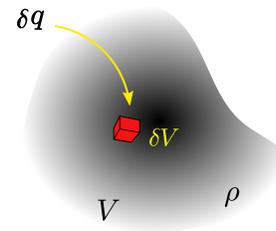


- **Densidad volumétrica de carga**

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\delta q}{\delta V} \right) \equiv \frac{dq}{dV}$$

La carga total del objeto,

$$Q_{total} = \int_V dq = \int_V \rho dV \rightarrow \rho V \quad \text{si } \rho = \text{cte}$$



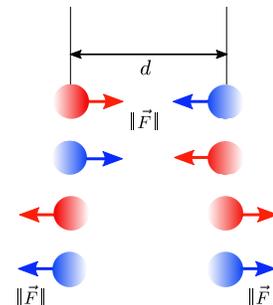
2.1.3. Ley de fuerza eléctrica (Coulomb)

El fenómeno: para 2 cargas eléctricas (q, q'), en presencia una de la otra, se observa

- atracción / repulsión para cargas eléctricas diferentes / iguales
- intensidad de la interacción - en ambas situaciones de carga - proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa

- $\|\vec{F}\| \sim \frac{qq'}{d^2}$

Formalmente,



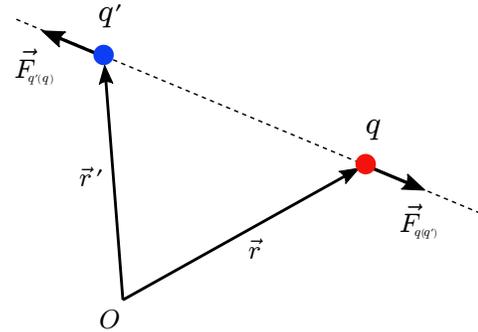
$$\vec{F}_{q(q')} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$$

La constante de proporcionalidad corresponde al Sistema internacional (S.I.) de unidades con

$$[\text{carga}] \equiv [\text{C}] = \text{Coulomb}$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2} \right]$$

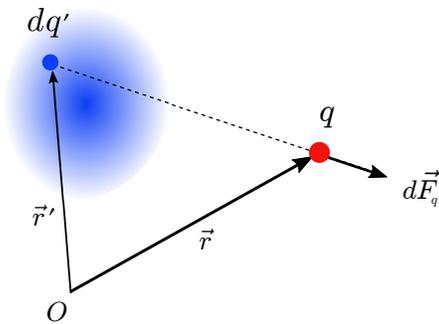
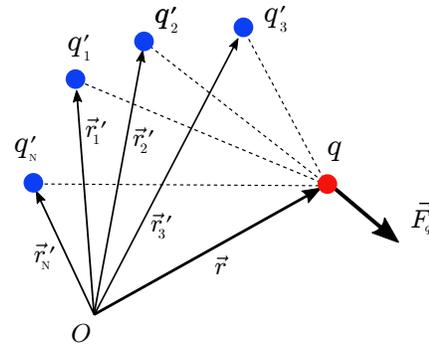
$c = 299792458 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ es la velocidad de la luz
 ϵ_0 es la **permitividad del vacío**.



2.1.4. Principio de superposición

¿Cuál es la fuerza sobre q , ubicada en punto descrito por \vec{r} , cuando existen N cargas q'_i en las posiciones \vec{r}'_i ?

$$\vec{F}_{q(q'_1, q'_2, \dots, q'_N)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'_i}{\|\vec{r}-\vec{r}'_i\|^3} (\vec{r}-\vec{r}'_i)$$



Generalización de ley de fuerza:

¿cuál es la fuerza sobre q cuando existe una densidad de carga (lineal, superficial o volumétrica) en el espacio?

$$\vec{F}_{q(\text{distrib})} \longrightarrow \vec{F}_q(\vec{r}) = \int_{\text{distrib}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dq(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} (\vec{r}-\vec{r}') \quad dq(\vec{r}') = \begin{cases} \lambda(\vec{r}')d\ell' \\ \sigma(\vec{r}')dS' \\ \rho(\vec{r}')dV' \end{cases}$$

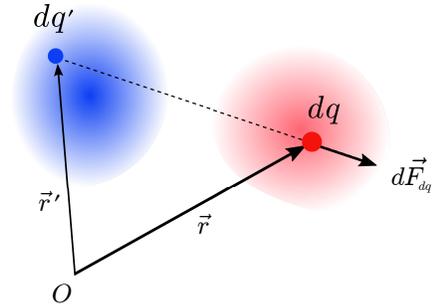
2.1.5. Propiedades de la fuerza electrostática

- Satisface ley de acción y reacción: $\vec{F}_{q(\text{distrib})} = -\vec{F}_{\text{distrib}(q)}$
- Es una fuerza conservativa*: $\nabla \times \vec{F}_{q(\text{distrib})}(\vec{r}) = 0$

* Operador diferencial $\nabla \times$ actualdo sobre una función vectorial corresponde al rotor de la función

- Fuerza entre 2 distribuciones de carga estática

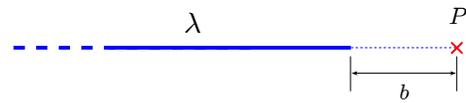
$$\vec{F}_{dist1(dist2)} \longrightarrow \vec{F} = \int_{dist1+dist2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{r})dq(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$$



2.1.6. Ejemplos

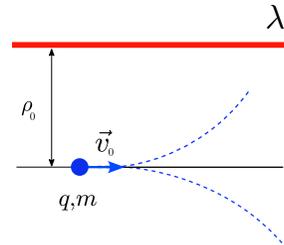
Problema:

Calcule la fuerza eléctrica sobre una carga q ubicada en el punto P de la figura, debido a una línea semi-infinita cargada uniformemente con una densidad lineal λ . El punto P se ubica a una distancia b del extremo de la línea, alineado con ésta.



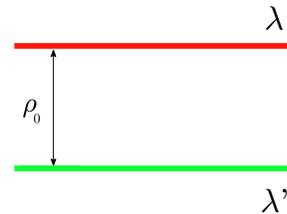
Problema:

Partícula de carga q y masa m ubicada a distancia inicial ρ_0 de la distribución lineal de carga λ [C/m], inicialmente con velocidad \vec{v}_0 . Largo de la distribución de carga $\rightarrow \infty$. Estudiar trayectoria de la carga eléctrica.



Problema:

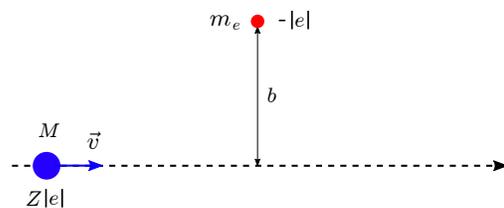
¿Fuerza por unidad de largo entre dos distribuciones lineales de carga, λ y λ' , paralelas, separadas a una distancia ρ_0 ?



Problema:

Se tiene un electrón libre en reposo. Una partícula pesada de masa $M \gg m_e$ y carga $Z|e|$, que viaja con velocidad \vec{v} , pasa a distancia b del electrón en reposo.

¿Energía transferida al electrón?

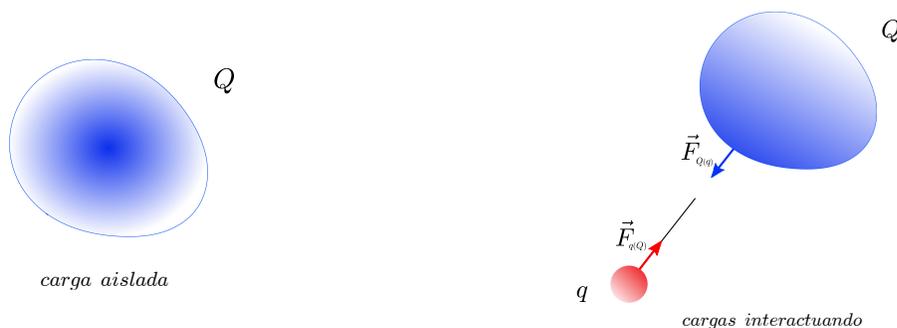


Indicación

- Trayectoria partícula no es alterada por presencia de electrón.
- Fuerza partícula-electrón dura tiempo suficientemente corto de modo que electrón adquiere un impulso sin cambiar su posición.

2.2. El campo eléctrico

Observar la situación siguiente en relación a distribuciones de carga estática (no varían en el tiempo):



* Interpretación:

- Distribución de carga crea un efecto en todo el espacio;
- Cuando se coloca carga de prueba infinitesimal δq en un punto del espacio, ésta experimenta una fuerza eléctrica proporcional a su magnitud.

* **Campo Eléctrico:** es el efecto que existe en el punto donde se ubica la carga de prueba δq ,

$$\vec{E} = \lim_{\delta q \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{F}_{\delta q}}{\delta q} \right)$$

No existiendo variación en el tiempo de la distribución de carga eléctrica que genera el campo, se le identifica como un **campo eléctrico estático** o **campo electrostático**.

2.2.1. Densidades de carga eléctrica y su campo

La definición de \vec{E} está sujeta a:

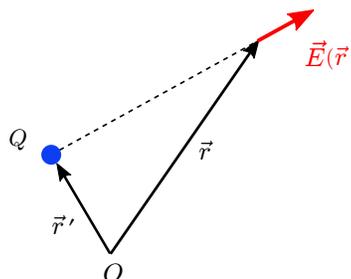
- * la distribución de carga es estática (fija)
- * δq es parte de la distribución de carga que produce el efecto

Resumiendo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{cargas puntuales} \\ \text{densidades de carga} \end{array} \right\} \longrightarrow \vec{E} \longrightarrow \vec{F}_{\delta q} = \delta q \vec{E} \left\{ \begin{array}{l} \text{para carga} \\ \text{prueba } \delta q \end{array} \right\}$$

\vec{E} que produce carga puntual Q:

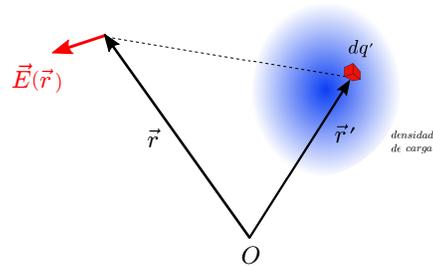
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



Generalización: vía principio de superposición,

\vec{E} que produce una densidad de carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\text{distrib}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq(\vec{r}')$$

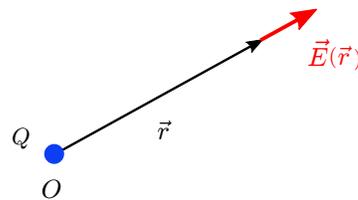


Observación:

una buena elección del origen del sistema de coordenadas simplifica cálculo del campo eléctrico.

Por ejemplo, carga puntual en O ($\vec{r}' = 0$)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$



Fuerza y el campo eléctrico

Se trata de calcular la fuerza eléctrica sobre una carga o una distribución de carga eléctrica inmersa en el campo eléctrico conocido $\vec{E}(\vec{r})$ que produce otra fuente de carga eléctrica,

* Fuerza sobre carga q :

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

* Fuerza sobre una distribución de carga (λ, σ, ρ)

$$d\vec{F}(\vec{r}) = dq(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = \int_{\text{distrib}} \vec{E}(\vec{r}) dq(\vec{r})$$

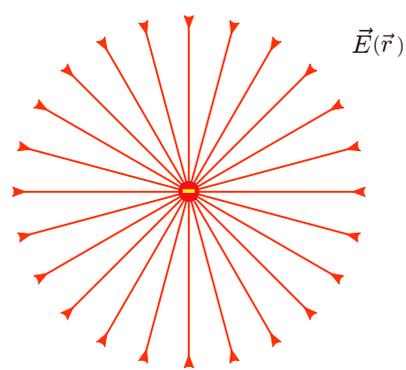
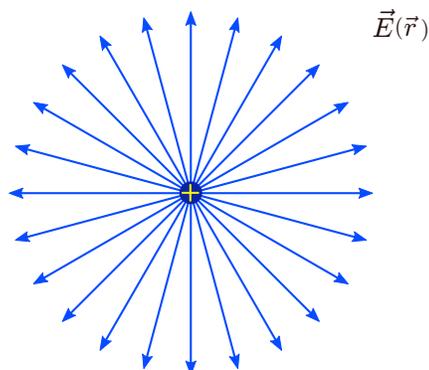
2.2.2. Líneas de campo eléctrico

Son las trayectorias (líneas) que permiten visualizar el campo eléctrico. Se definen tal que su tangente, en todo punto, tiene la dirección de \vec{E} ,

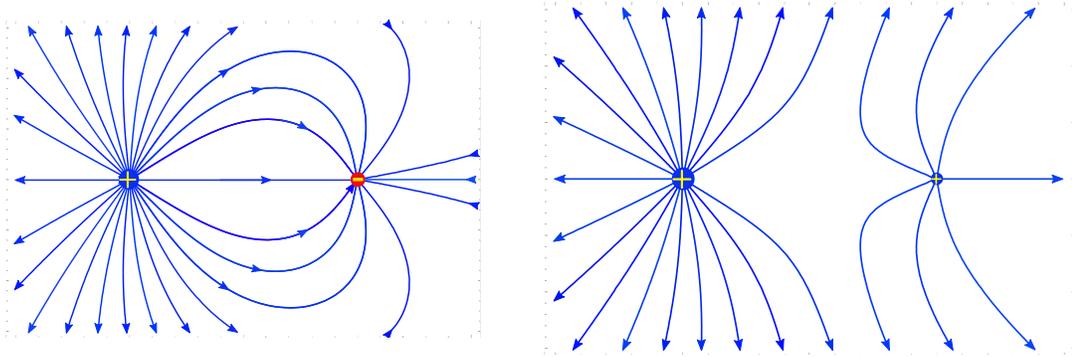
$$\text{si } \vec{r} \text{ describe trayectoria} \quad \longrightarrow \quad d\vec{r} = \lambda \vec{E}$$

Consistente con las convenciones asociadas al signo de las cargas y el tipo de fuerza que experimentan, las líneas de campo eléctrico *salen* de las cargas positivas y *llegan* a las cargas negativas.

Caso carga puntual:



Caso de dos cargas puntuales:
(es una situación algo más complicada)



Las figuras muestran las líneas de campo eléctrico para sistemas que tienen cargas puntuales de diferente magnitud y diferentes y el mismo signo, respectivamente.

2.2.3. Propiedades del campo electrostático

* La fuente del $\vec{E}(\vec{r})$ es la carga eléctrica

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (\text{1a ecuación de Maxwell})$$

La razón:
$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) \longrightarrow \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{[\vec{r} - \vec{r}']}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \neq \vec{r}' \\ 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') & \text{si } \vec{r} = \vec{r}' \end{cases}$$

con $\delta(\vec{x})$ la función delta de Dirac*.

* Consecuencias:

- **Teorema de Gauss**

Integrando ecuación de Maxwell en un volumen arbitrario V encerrado por una superficie $S(V)$, el flujo del campo eléctrico a través de la superficie satisface

$$\oint_{S(V)} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' = \frac{Q_V}{\epsilon_0} \quad (Q_V: \text{carga neta contenida en } V)$$

* La función delta de Dirac, en una dimensión, está definida por

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ \infty & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1 \quad \longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \delta(x-a) dx = F(a)$$

La generalización a 3 dimensiones es, es sistema cartesiano de referencia,

$$\delta(\vec{r} - \vec{a}) \equiv \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \neq \vec{a} \quad (x \neq a_x; y \neq a_y; z \neq a_z) \\ \infty & \text{si } \vec{r} = \vec{a} \quad (x = a_x; y = a_y; z = a_z) \end{cases} \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{a}) dx dy dz = 1$$

Esta relación matemática es general y aplica a cualquier función vectorial diferenciable $\vec{F}(\vec{r})$ que satisface $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})$, con f una función escalar que actúa como fuente de \vec{F} .

* Mirada alternativa:

Considerar una carga puntual q centrada en el origen O ; luego, el campo eléctrico en un punto del espacio descrito por el vector posición \vec{r} es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Calcular el flujo de campo eléctrico ϕ_E a través de la superficie esférica (cerrada) S ,

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

que para un elemento de superficie $d\vec{S} = dS \hat{r}$, con $dS = r^2 d\Omega$ y $d\Omega$ el elemento diferencial de ángulo sólido, conduce a

$$\phi_E = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Se concluye:

el flujo de campo eléctrico a través de la superficie esférica de radio r es proporcional a la carga q encerrada por la superficie.

Ahora, al considerar una superficie S' arbitraria, que encierra a la carga q , es directo observar que el flujo del campo eléctrico a través de S' es igual a aquél flujo a través de S ,

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La razón es que sólo la componente radial del elemento de superficie $d\vec{S}' \cdot \hat{r} = dS' \hat{n} \cdot \hat{r}$ contribuye a la integral.

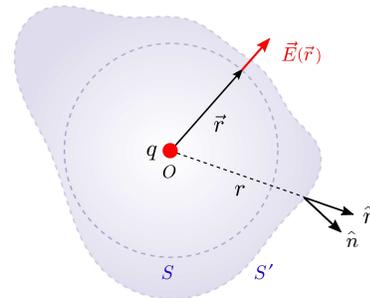
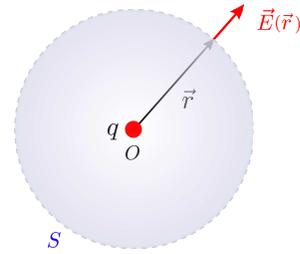
Usando el **teorema de la divergencia** se concluye, en general, que para la carga $q \rightarrow Q_V$ encerrada en el volumen V de superficie arbitraria S ,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

donde ρ es una distribución de carga volumétrica contenida en V . Como V (y la superficie que lo encierra) es arbitrario, se concluye que los integrandos deben ser iguales,

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

que corresponde a la forma diferencial del teorema de Gauss.

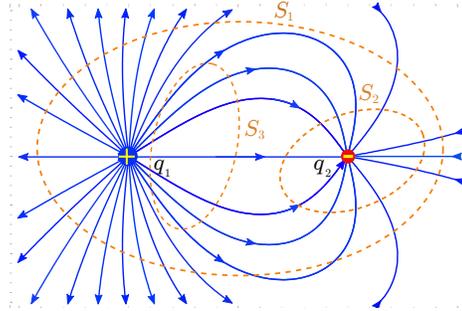


- Interpretación

El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es proporcional a carga neta contenida en volumen V encerrada por S .

Observar:

$$\left. \begin{aligned} \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 - q_2) \\ \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} q_2 \\ \oint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned} \right\}$$



- Líneas de campo eléctrico

Estas líneas siempre nacen en carga positivas (+) y terminan en cargas negativas (-). Por consistencia con la ecuación de Maxwell (o teorema de Gauss),

$$\text{el flujo de campo eléctrico} \equiv \Phi_E(S) \quad \text{tiene mismo signo que } Q_V$$

- Importancia

Facilita el cálculo del campo electrostático en casos de gran simetría (uniformes, cilíndricos, esféricos)

* $\vec{E}(\vec{r})$ es irrotacional

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \mathbf{0} \quad (2a \text{ ecuación de Maxwell} - \frac{\partial}{\partial t} = 0)$$

La razón:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \rightarrow \nabla \times \left(\frac{[\vec{r} - \vec{r}']}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right) \equiv 0$$

Consecuencias:

- Campo electrostático es conservativo
- La integral de línea del campo electrostático en una trayectoria cerrada es nula

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{Teorema de Stokes})$$

- Debe existir una función escalar a partir de la cual $\vec{E}(\vec{r})$ es derivable.

Resumen: las características del campo electrostático (no hay dependencia explícita del tiempo) son:

$$\text{Fuentes: } (Q, \lambda, \sigma, \rho) \rightarrow \vec{E}(\vec{r})$$

Propiedades de \vec{E} :

$$* \quad \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \iff \oint_{S(V)} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' = \frac{Q_V}{\epsilon_0} \quad \text{teorema de Gauss}$$

$$* \quad \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \iff \text{Campo electrostático } (\frac{\partial}{\partial t} = 0) \text{ es conservativo}$$

Solución explícita para \vec{E} :

$$* \quad \vec{E}(\vec{r}) = \int_{distrib} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} dq(\vec{r}')$$

$$* \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} \quad \text{para carga puntual } Q$$

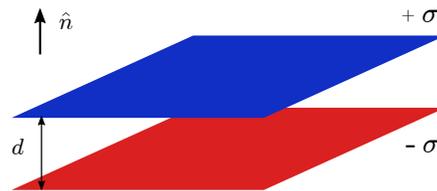
Fuerzas sobre cargas o distribuciones de carga eléctrica

$$* \quad \vec{F} = \int_{distrib} \vec{E}(\vec{r}) dq(\vec{r})$$

2.2.4. Ejemplos

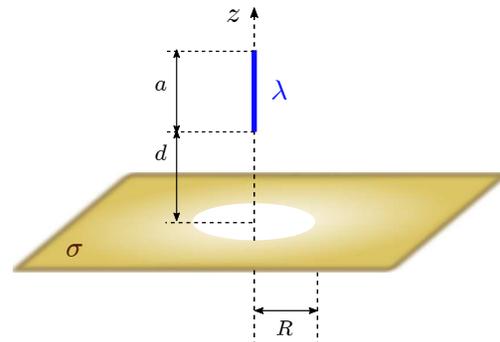
Problema:

Considerar dos distribuciones planas de carga, infinitas, separadas una distancia d , que tienen densidades constantes $\pm\sigma$ respectivamente. Interesa conocer el campo eléctrico en todo el espacio y la fuerza por unidad de área que se ejerce sobre cada distribución.



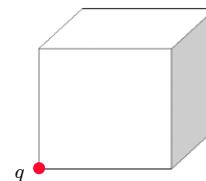
Problema:

Considere un plano infinito con densidad de carga superficial σ constante. Éste tiene orificio de radio R . Una línea de carga de largo a , con densidad lineal de carga λ también constante, se ubica a distancia d sobre el plano y en el eje de simetría del orificio. Calcular la fuerza que se ejerce sobre la línea de carga.



Problema:

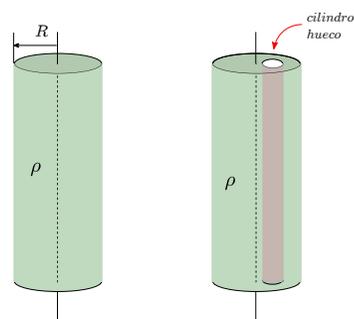
Una carga q se ubica en la esquina de un cubo. ¿Cuál es el flujo de campo eléctrico \vec{E} a través de la cara gris del cubo?



Problema:

a) Considerar una distribución de carga volumétrica ρ uniforme, con una distribución espacial cilíndrica de radio R y muy larga. Se quiere conocer el campo eléctrico en todo el espacio ($\rho \ll R$).

b) Se hace un agujero cilíndrico de radio $a < R/2$ ubicado a distancia $d < (R - a)$ del eje central. ¿Cómo se modifican los campos eléctricos?



2.3. El potencial eléctrico

2.3.1. La función potencial

Motivación: el caracter conservativo del campo electrostático ($\nabla \times \vec{E} = 0$) sugiere que existe una **función escalar** V a partir de la cual se puede calcular el campo,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

y recibe el nombre de la **función potencial eléctrico**.

¿Cómo se conoce $V(\vec{r})$?

a partir del campo \vec{E} :
$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_{ref}) - \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

a partir de la carga:
$$\begin{cases} V(\vec{r}) = V(\vec{r}_{ref}) + \int_{distrib} \frac{dq(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}-\vec{r}'\|} \\ \nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}) \end{cases}$$

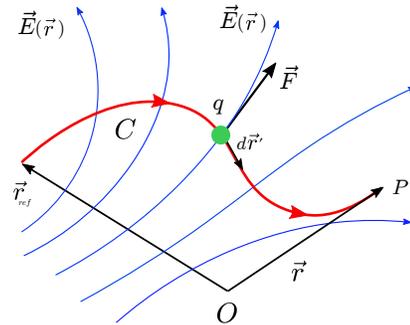
Significado físico:

considerar carga q sobre la cual el campo \vec{E} ejerce una fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$. El trabajo que debo realizar para llevar la carga de punto \vec{r}_{ref} a punto \vec{r} es

$$W_{\vec{r}_{ref} \rightarrow \vec{r}} = \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F}^{(ext)} \cdot d\vec{r}' = -q \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

con lo cual

$$W_{\vec{r}_{ref} \rightarrow \vec{r}} = q \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} dV(\vec{r}') = q [V(\vec{r}) - V(\vec{r}_{ref})]$$



Conclusión:

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_{ref}) = \frac{W_{\vec{r}_{ref} \rightarrow \vec{r}}}{q}$$

La **diferencia de potencial** entre los puntos \vec{r} y \vec{r}_{ref} es igual al trabajo por unidad de carga que se requiere para llevar una carga eléctrica de \vec{r}_{ref} a \vec{r} .

Para distribuciones **finitas** de cargas,

usual tomar $V(\vec{r} = \infty) = 0 \implies V(\vec{r}) = \begin{cases} - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \\ \int_{distrib} \frac{dq(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}-\vec{r}'\|} \end{cases}$

Ejemplos:

- * Potencial eléctrico para carga puntual q

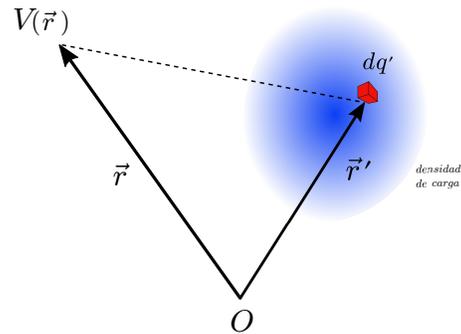
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- * Potencial eléctrico para distribución arbitraria de carga finita

general:
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{distrib}} \frac{dq(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$

Para distribución volumétrica de carga ρ :

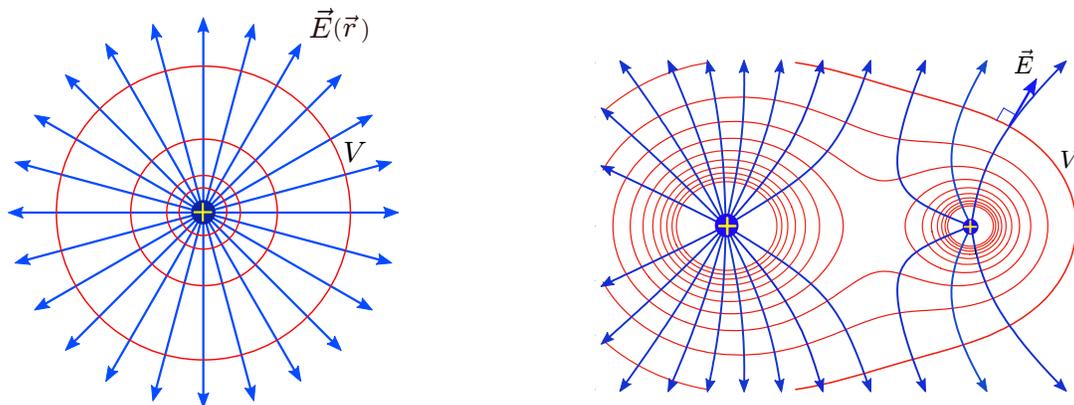
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{distrib}} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$



2.3.2. Superficies equipotenciales

Trata de un esquema para visualizar el potencial eléctrico en el espacio (similar a curvas de nivel en un plano que indican, por ejemplo, los puntos de igual altura sobre el nivel del mar).

En nuestro caso, una superficie equipotencial es el lugar geométrico de los puntos de igual valor del potencial eléctrico, $V(\vec{r}) = \text{constante}$.



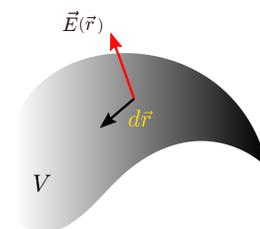
De la relación

$$\vec{E} = -\nabla V \quad \implies \quad \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV$$

significa que para $V = \text{constante} \quad \implies \quad \vec{E} \perp d\vec{r}$

Conclusión:

Campo eléctrico es siempre normal a las superficies equipotenciales.



2.3.3. Unidades

Para potencial eléctrico:

$$[V] \equiv \text{Volt} \rightarrow \frac{[\text{energía}]}{[\text{carga}]} = \frac{[\text{Joule}]}{[\text{Coulomb}]} \equiv \frac{J}{C}$$

Para campo eléctrico:

$$[E] = \left[\frac{V}{m} \right] \leftrightarrow \left[\frac{N}{C} \right]$$

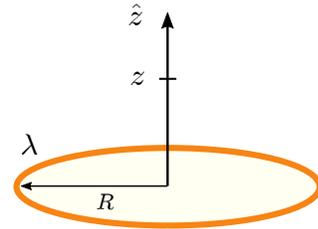
Para energía (alternativa a Joule)

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} [J] \quad \text{eV} \equiv \text{electron-Volt}$$

2.3.4. Ejemplos

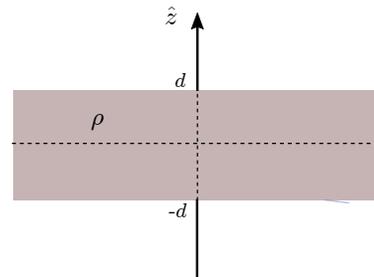
Problema:

Se tiene un anillo de radio R con densidad lineal de carga λ uniforme. Calcular potencial y campo eléctrico en el eje z .



Problema:

Una densidad de carga volumétrica ρ , constante, ocupa una zona rectangular del espacio de área muy extensa ($\rightarrow \infty$) y altura $2d$. Calcular potencial y campo eléctrico en todo el espacio.

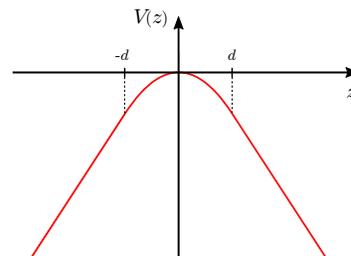


Solución

$$z > d \quad V(z) = \frac{\rho d^2}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{2z}{d} \right) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(z) = \frac{\rho d}{\epsilon_0} \hat{z}$$

$$-d \leq z \leq d \quad V(z) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \hat{z}$$

$$-d > z \quad V(z) = \frac{\rho d^2}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{2z}{d} \right) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(z) = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} \hat{z}$$



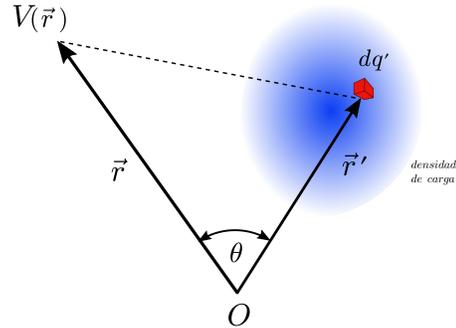
La constante asociada al potencial eléctrico está definida tal que $V(z = 0) = 0$.

2.3.5. Expansión multipolar del potencial

Para una distribución de carga, de dimensiones finitas, no siempre es simple calcular el potencial y/o el campo eléctrico que genera en todo el espacio.

El potencial eléctrico se puede calcular:

$$\begin{aligned} \text{resolviendo} \quad & \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{directo} \quad & V(r) = \int_{\text{distrib}} \frac{dq(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|} \end{aligned}$$



A menudo, ninguna de las alternativas es simple de implementar o no tiene mayor importancia hacerlo. Ello sugiere que un resultado aproximado para V o \vec{E} es una opción interesante.

Inspiración:

$$\text{Llamar} \quad r = \|\vec{r}\| \quad r' = \|\vec{r}'\| \quad u = \frac{r'}{r} \implies \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{r [1 - 2\hat{r} \cdot \hat{r}' u + u^2]^{1/2}}$$

Considerar $u \ll 1$ ($r' \ll r$), es decir, calcular $V(\vec{r})$ en puntos alejados de la distribución de carga.

Multipolos eléctricos

Desarrollo en serie de Taylor alrededor de $u = 0$,

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{r} \left[1 + \hat{r} \cdot \hat{r}' \left(\frac{r'}{r} \right) + \frac{1}{2!} (3(\hat{r} \cdot \hat{r}')^2 - 1) \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \dots \right]$$

Sugiere:

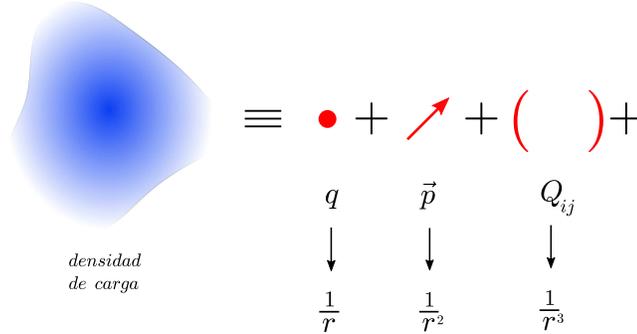
$$V(\vec{r}) = V_{\text{monopolo}}(\vec{r}) + V_{\text{dipolo}}(\vec{r}) + V_{\text{cuadrupolo}}(\vec{r}) + \dots$$

donde:

$$\begin{aligned} \text{Monopolo} \quad & \left\{ \begin{array}{l} V_{\text{monopolo}}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ Q = \int_{\text{distrib}} dq(\vec{r}') \quad \text{Carga total} \end{array} \right. \\ \text{Dipolo} \quad & \left\{ \begin{array}{l} V_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \vec{p} = \int_{\text{distrib}} \vec{r}' dq(\vec{r}') \quad \text{Momento dipolar eléctrico} \end{array} \right. \\ \text{Cuadrupolo} \quad & \left\{ \begin{array}{l} V_{\text{cuadrupolo}}(\vec{r}) = \frac{\sum_{i,j} x_i x_j Q_{ij}}{4\pi\epsilon_0 r^5} \\ Q_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\text{distrib}} [3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2] dq(\vec{r}') \quad \text{Tensor cuadrupolar eléctrico} \end{array} \right. \end{aligned}$$

En las expresiones previas, el origen de coordenadas se ha elegido coincidiendo con el centro de carga de la distribución (equivalente al centro de masa)

Significado:



Campo eléctrico:

su expansión multipolar es derivable a partir del potencial eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

Interesa, principalmente, analizar las componentes monopolar y dipolar del campo.

Por la simetría esférica que presenta el potencial a distancias grandes, basta trabajar en el plano:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \theta) \hat{r} + E_\theta(r, \theta) \hat{\theta} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$$

Aproximación monopolar:

$$\vec{E}_{monopolar}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Aproximación dipolar:

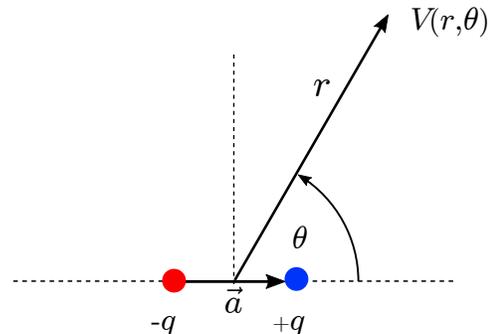
$$\vec{E}_{dipolar}(\vec{r}) = \frac{[3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}]}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

2.3.6. Dipolo eléctrico

Configuración de carga con las características siguientes:

- Cargas $\pm q$ separadas una distancia a .
- Carga neta es nula
- Momento dipolar eléctrico

$$\vec{p} = \int_{distrib} \vec{r} dq(\vec{r}) = q\vec{a}$$

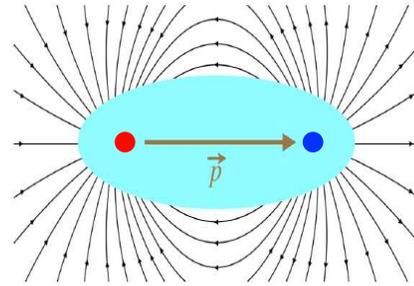


- Potencial monopolo

$$V_{monopolo}(\vec{r}) = 0$$

- Potencial dipolo

$$V_{dipolo}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{qa \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sim \frac{1}{r^2} \quad (r \rightarrow \infty)$$

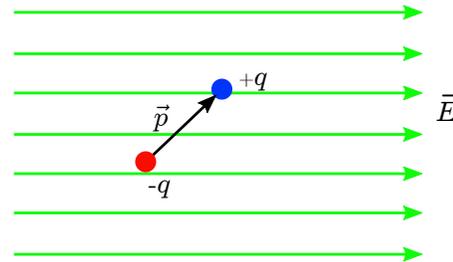


- Potencial cuadrupolo
demostrar que es nulo (distribución no tiene momento cuadrupolar)

Dipolo en campo eléctrico externo

- + Fuerza sobre dipolo

$$\vec{F}_{dipolo} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{E} \text{ uniforme} \\ (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} & \text{si } \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \end{cases}$$



- + Torque sobre el dipolo

$$\vec{\tau}_{dipolo} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_-$$

$$\vec{\tau}_{dipolo} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (\text{El dipolo siempre tiende a alinearse con } \vec{E} \text{ externo})$$

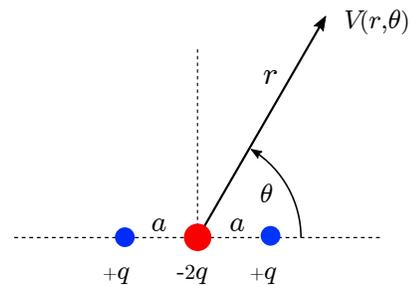
- + Energía del dipolo (debido al campo externo)

$$W_{dipolo} = (+q)V\left(\frac{\vec{a}}{2}\right) + (-q)V\left(-\frac{\vec{a}}{2}\right) = q[V\left(\frac{\vec{a}}{2}\right) - V\left(-\frac{\vec{a}}{2}\right)]$$

$$W_{dipolo} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Ejemplo (dos dipolos)

Calcular el potencial y el campo eléctrico en puntos lejanos, para la distribución de cargas indicada en la figura.



2.3.7. Ecuación de Poisson (Laplace)

Una forma diferencial para calcular la función potencial eléctrico se obtiene a partir de la ecuación que relaciona el campo eléctrico con la densidad de carga eléctrica ρ que lo produce. En efecto, se ha establecido que en vacío

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \\ + \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla V(\vec{r}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (\text{ecuación de Poisson})$$

El operador diferencial $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla^*$ es conocido como el Laplaciano y determina una ecuación a derivadas parciales de segundo orden para el cálculo de la función potencial V . Sus constantes de integración quedan determinadas por las condiciones de borde que un problema específico impone sobre V .

Para conocer el potencial eléctrico en una zona del espacio donde no existe carga eléctrica, corresponde resolver

$$\text{(ecuación de Poisson)} \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 V(\vec{r}) = 0 \quad \text{(ecuación de Laplace)}$$

más las correspondientes condiciones de borde.

Ejemplo:

Se tiene una carga puntual q ubicada en el origen de un sistema de coordenadas. Determinar el potencial eléctrico en todo el espacio y, posteriormente, el campo eléctrico que produce.

- * La densidad de carga que produce el potencial eléctrico se expresa, considerando la simetría esférica del problema, por

$$\rho(\vec{r}) \quad \longrightarrow \quad \rho(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \delta(r) \quad \text{con} \quad \int_{\text{espacio}} \rho(\vec{r}) d\tau = q$$

donde r es la distancia al punto origen, δ es la función delta de Dirac ya discutida y $d\tau$ es el elemento de volumen. Es directo verificar que la integral de la densidad de carga en todo el espacio es la carga q .

- * La función potencial buscada depende sólo de la distancia al origen (no hay direcciones privilegiadas), $V(\vec{r}) = V(r)$;
- * La ecuación (Poisson) que determina la función potencial eléctrico es

$$\nabla^2 V(r) = -\frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \delta(r)$$

Para $r > 0$ no hay cargas eléctricas ($\delta(r \neq 0) = 0$) y basta resolver la ecuación de Laplace ($\nabla^2 V(r) = 0$).

- * Caso $r \neq 0$. Expresando el Laplaciano en coordenadas esféricas, conduce a una ecuación diferencial de solución simple:

$$\nabla^2 V(r) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V(r)}{\partial r} \right] = 0 \quad r \neq 0$$

Integrando se obtiene

$$V(r) = C_2 - \frac{C_1}{r} \quad C_1 \quad \text{y} \quad C_2 \quad \text{constantes de integración}$$

- * Condiciones de borde (o restricciones que limitan el compartamiento de $V(r)$ cerca del origen y en el infinito),

* En coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2 V(\vec{r}) \equiv \nabla^2 V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial z^2}$$

$$+ \quad r \rightarrow \infty \quad \implies \quad V(r \rightarrow \infty) \longrightarrow C_2$$

La elección estándar (no única) para distribuciones de carga finitas es un potencial nulo a grandes distancias de la fuente. Ello significa elegir $C_2 \equiv 0$.

$$+ \quad r = \eta \rightarrow 0. \text{ Integrando la ecuación de Poisson en un volumen esférico } \mathcal{T} \text{ de radio } \eta,$$

$$\int_{\mathcal{T}} \nabla^2 V(r) d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{T}} \rho(r) d\tau = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

y reemplazando el Laplaciano, expresando el elemento de volumen en esféricas e integrando se obtiene,

$$4\pi\eta^2 \left[\frac{\partial V}{\partial r} \right]_{r=\eta} = -\frac{q}{\epsilon_0} \implies C_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

con lo cual se recupera el potencial que produce una carga puntual en el origen.

* El cálculo del campo eléctrico es directo,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

Teorema de Earnshaw

En una región del espacio con densidad de carga nula, pero donde existen campos electrostáticos (generados fuerza de la región considerada), no es posible mantener una carga eléctrica q en equilibrio estable.

Llamando \vec{E} el campo electrostático resultante, entonces la carga q experimenta una fuerza

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) = -q\nabla V(\vec{r})$$

con V el potencial eléctrico a partir del cual se deriva el campo $\vec{E} = -\nabla V$ por su característica conservativa. Suponiendo que existe un punto de equilibrio \vec{r}_0 , entonces la estabilidad de la carga q dependerá del comportamiento de las componentes de \vec{F}_q alrededor de \vec{r}_0 . Considerando que no hay una densidad de carga en la región del punto \vec{r}_0 , se concluye que

$$\nabla \cdot \vec{F}_q = -q\nabla \cdot \vec{E} = 0 \implies \nabla^2 V = 0$$

La condición de equilibrio requiere que, individualmente, las segundas derivadas parciales de la energía potencial (o del potencial eléctrico), con respecto a cada una de las coordenadas que describen el movimiento, en el punto de equilibrio, sean positivas. Esta condición es incompatible con la ecuación de Laplace que satisface V .

En el caso de coordenadas cartesianas, V satisface

$$\nabla^2 V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Pero para tener un equilibrio estable, cada término debe ser positivo alrededor de \vec{r}_0 ,

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_0} > 0 \quad \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_0} > 0 \quad \left[\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_0} > 0$$

pero cuya suma no puede ser nula. Sin embargo, es posible que el movimiento general de la carga q puede ser estable según un par de los ejes de referencia e inestable según un tercero.

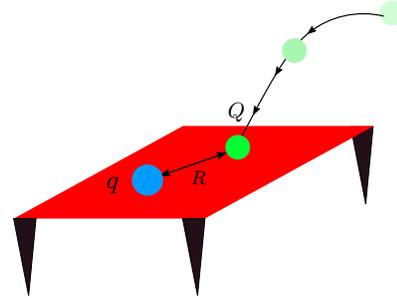
2.3.8. Energía eléctrica

Uno de los aspectos importantes del estudio del fenómeno electrostático se relaciona con la capacidad de almacenar energía que se tiene cuando se forma una configuración de cargas (y por lo tanto, crear un campo electrostático en su entorno).

Considerar:

- Traer carga q ... Se realiza trabajo ?
- Traer carga Q ... Se realiza trabajo ?
- Trabajo realizado:

$$W = W_q + W_Q = QV_q(R) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}$$



Energía electrostática de un conjunto de cargas

Considerar un conjunto de N cargas $\{q_i\}$ que forman una configuración estática. ¿Cuál es la energía que esa configuración almacena?

$$W_e = \sum_{i=1}^N W_i \rightarrow \begin{cases} W_i = q_i \bar{V}_i & \text{energía asociada a carga } q_i \text{ en } \vec{r}_i \\ \bar{V}_i = \sum_{j=1}^i V_{i(j)} & \text{con } (V_{i(i)} = 0 \quad \forall i) \\ V_{i(j)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} & \text{con } r_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\| \end{cases}$$

La simetría $q_i V_{i(j)} = q_j V_{j(i)}$ significa poder escribir

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N q_i V_{i(j)} \quad \text{energía electrostática} \quad \left(= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i q_i V_{i(j)} \right)$$

Generalización: **energía electrostática de una distribución de cargas** (λ, σ, ρ)

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{distrib} dq(\vec{r}) V(\vec{r})$$

* Ejemplo:

Calcular la energía electrostática almacenada en una distribución de carga uniforme ρ que ocupa un volumen esférico de radio R .

Resultado:

$$W_e = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} R^5$$

Energía electrostática a partir del campo eléctrico

Considerar el caso más general de una densidad de carga ρ finita que ocupa un volumen Vol en el espacio. Luego, la energía de la distribución es

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{Vol} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\tau$$

Pero $\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) \longrightarrow W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) V(\vec{r}) d\tau$ (notar Vol $\longrightarrow V$: todo el espacio)

expresión que conduce a (demostrar!),

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V \|\vec{E}(\vec{r})\|^2 d\tau$$

es decir, la energía almacenada calculada a partir del campo eléctrico que produce en todo el espacio.

2.4. Problemas

E-1 Compare las magnitudes de las fuerzas eléctrica y gravitacional entre un protón y un electrón. Busque en la literatura la información que requiera para obtener una respuesta cuantitativa.

E-2 Se requiere mantener cuatro cargas puntuales idénticas q en equilibrio en las esquinas de un cuadrado. Encuentre la carga puntual que lo hará, al colocarla en el centro del cuadrado.

E-3 Considere una estructura cúbica de carga q y aristas de longitud a . Lejos de ésta se ubica una carga puntual q la cual es repelida.

Estime la diferencia porcentual de esta repulsión (fuerza) con la que se observaría si la estructura fuese esférica de igual volumen.

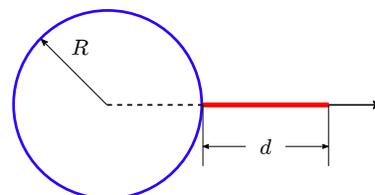
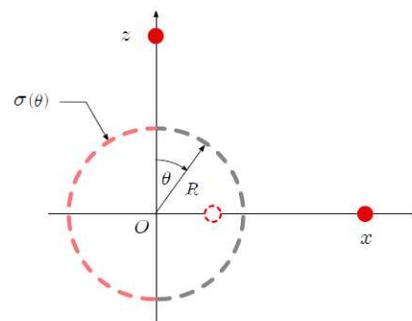
E-4 Se tiene una distribución de carga que cubre una superficie esférica de radio R y depende del ángulo polar θ , $\sigma(\theta) = \sigma_0 \sin \theta$ (σ_0 es conocido).

El problema es encontrar la fuerza que se ejerce sobre una carga q cuando ésta se encuentra fuera o dentro de la esfera de carga. Considere los casos en que la carga se encuentra sobre el eje $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

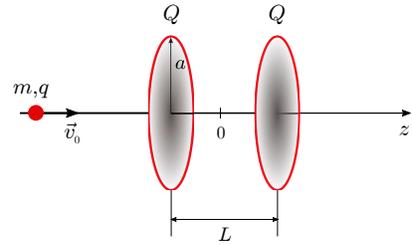
¿Qué efecto habría si la carga q es reemplazada por otra distribución esférica (radio R') de carga superficial $\sigma'(\theta) = \sigma'_0 \cos \theta$? ¿Se acelera? ¿Podría rotar? Basta un buen análisis cualitativo (con fundamentos) para responder. Si quiere calcular, mejor aún!

E-5 Una esfera uniformemente cargada (con carga total Q) y de radio R está centrada en el origen. Determine la fuerza resultante que actúa sobre una línea uniformemente cargada (con carga total q) orientada radialmente y con sus extremos en $r = R$ y $r = R + d$.

Respuesta (pág. 211)

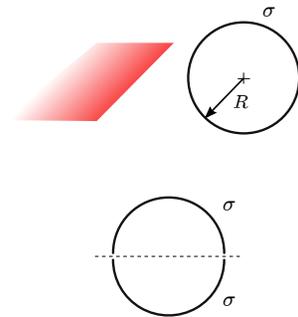


E-6 Anillos circulares de radio a se alinean según sus ejes de simetría, con cargas $+Q$ uniformemente distribuida en cada uno y separados una distancia L . Una partícula de masa m y carga q puede viajar por el eje de simetría.



- Determine la fuerza electrostática que se ejerce sobre la partícula en todo punto del eje de simetría.
- Grafique la componente de la fuerza según el eje para los casos en que la carga q sea positiva o negativa; estudie la existencia de puntos de equilibrio estable y, de existir, la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a ellos.
- ¿Es conservativa la fuerza? ¿Es posible hablar de una función energía potencial eléctrica?
- Si la partícula incide sobre los anillos, viajando según el eje desde una distancia lejana y velocidad inicial \vec{v}_0 , analice el movimiento según la magnitud de la velocidad inicial $\|\vec{v}_0\|$ y el signo (\pm) de la carga.

E-7 Una cáscara esférica muy delgada y de radio R , cargada uniformemente con una densidad superficial de carga σ , se divide en dos mitades iguales al partirla por un corte plano, muy fino, que pasa por el centro de la esfera (ver figura).

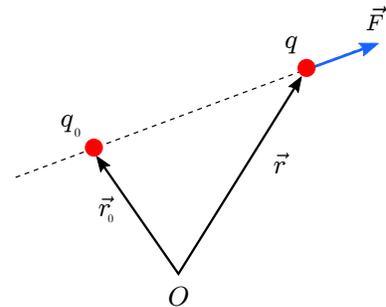


Calcule la fuerza electrostática de repulsión entre las cáscaras semiesféricas resultantes.

Observación: El corte no altera sustancialmente la distribución del campo (significa despreciar los efectos que el corte produce)
 Respuesta (pág. 211)

E-8 (C1-2016P) Considere una Electrostática basada en una Ley de Fuerzas del tipo

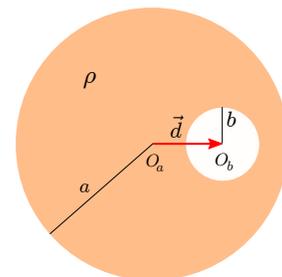
$$\vec{F}_{q(q_0)} = K \frac{q_0 q}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^4} (\vec{r} - \vec{r}_0)$$



correspondiente a la fuerza que una carga q_0 , ubicada en la posición \vec{r}_0 , ejerce sobre la carga q ubicada en \vec{r} y K es una constante de las dimensiones adecuadas. Al respecto:

- Defina un campo electrostático. Es conservativo? Examine la posibilidad de definir una función potencial para éste campo. ¿Qué interpretación da Ud. a esta función?
- ¿Existe un teorema equivalente al teorema de Gauss para la electrostática?
- Considere una distribución uniforme de carga por unidad de superficie (σ) de geometría plana. Calcule el campo en un punto cualquiera del espacio y compare con resultado de la electrostática usual.

E-9 Una esfera de radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ distribuida sobre todo su volumen, excluyendo una cavidad esférica de radio $b < a$ y donde $\rho = 0$. El centro de la cavidad O_b está ubicado a una distancia d , con $|d| < (a - b)$, desde el centro de la esfera (O_a). La distribución de masa de la esfera es proporcional a su distribución de carga. Se aplica un campo eléctrico externo \vec{E}_0 , uniforme. Calcule:



- la fuerza sobre la esfera;

- b) el torque con respecto al centro de la esfera y con respecto al centro de masa;
 c) el campo eléctrico total en el interior de la cavidad.

Respuesta (pág. 211)

E-10 (E1-2016P) Se tiene una densidad lineal de carga eléctrica positiva ($+\lambda$), distribuida homogéneamente en un anillo de radio a . Una partícula de masa m y carga eléctrica negativa ($-Q$) se coloca sobre el eje, en reposo, muy lejos del anillo. Gravedad no es significativa.

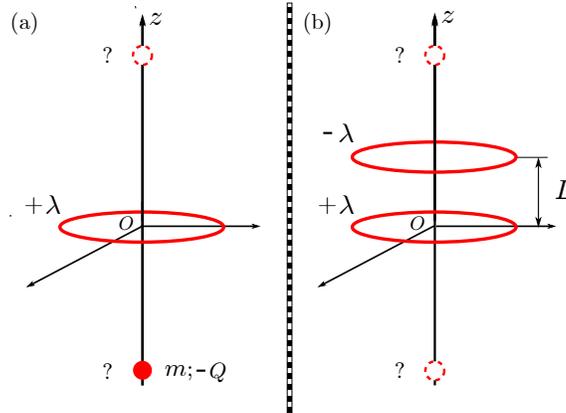
a) Estudie el movimiento de la partícula (figura). Para ello,

- Calcule la fuerza eléctrica que se ejerce sobre la carga.
- ¿Da lo mismo en que extremo del eje de simetría se coloca inicialmente la carga? Justifique cuantitativa o cualitativamente.
- ¿Cuál es la velocidad máxima que adquiere? Dónde, en el eje, ocurre?

Coloque un segundo anillo de carga, ahora negativa ($-\lambda$), a una distancia L del primero. Entonces,

b) Estudie el movimiento de la partícula en esta nueva situación (figura). Para ello,

- Calcule la fuerza eléctrica total que se ejerce sobre la carga.
- ¿Da lo mismo en que extremo del eje de simetría se coloca inicialmente la partícula? Justifique cuantitativa o cualitativamente.
- ¿Existe algún punto del eje donde la partícula tiene velocidad nula? Describa lo que ocurre y el efecto que tiene el segundo anillo de carga.

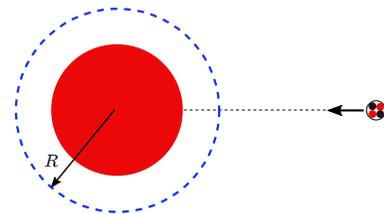


Respuesta (pág. 211)

E-11 Un modelo rudimentario de un átomo es considerar una membrana esférica de radio R y carga eléctrica negativa igual a $-Z|e|$. Esta membrana envuelve una esfera uniformemente cargada, de radio λR y carga total $+Z|e|$. En el modelo, $\lambda \leq 1$ y la carga neta del átomo es nula.

a) Determine el campo eléctrico en todo el espacio como función de la distancia r al centro del átomo.

b) Una partícula alfa, consistente de un átomo de helio doblemente ionizado (He^{++}), se aproxima radialmente al átomo. Determine la fuerza eléctrica que afecta a la partícula α . Grafique y compare los casos $\lambda = 0,9$ y $\lambda = 10^{-4}$.

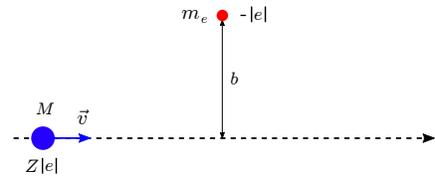


E-12 Las superficies interior ($r = a$) y exterior ($r = b$) de un cascarón esférico no conductor tienen la misma densidad de carga σ constante. No hay carga en el resto del espacio. Encuentre el campo eléctrico en las zonas $r < a$, $a < r < b$, y $r > b$. ¿Cómo cambian sus resultados si ahora la superficie interior posee una densidad de carga $-\sigma$?

Respuesta (pág. 211)

E-13 Considerar un electrón libre, masa m_e y carga eléctrica $-|e|$, en reposo. Una partícula pesada de masa $M \gg m_e$ y carga $Z|e|$, que viaja con velocidad \vec{v} , pasa a una distancia b del electrón en reposo.

Calcule la energía transferida al electrón y analice la dependencia de la energía transferida con la rapidez de la partícula y la distancia b .

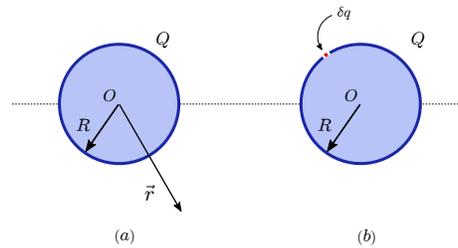


Indicación: Suponga que la trayectoria de la partícula pesada no es alterada por la presencia del electrón, y que la interacción entre electrón y partícula dura un tiempo suficientemente corto de modo que el electrón adquiere un impulso sin cambiar su posición durante ella (lo que implica que el impulso adquirido debe ser perpendicular a la trayectoria de la partícula pesada).

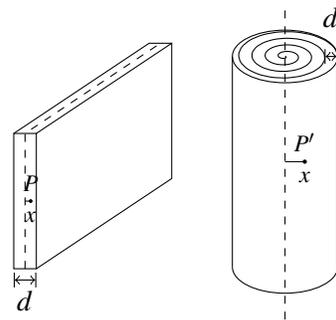
E-14 Una carga eléctrica Q se distribuye uniformemente sobre la superficie de una esfera de radio R .

a) Calcule el campo eléctrico en todo el espacio como función de la distancia r al centro de la esfera. Grafique su magnitud para $0 \leq r \leq \infty$.

b) La superficie tiene ahora un pequeño orificio circular de área δS . Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que experimenta un elemento de carga δq ubicado en el centro del orificio.



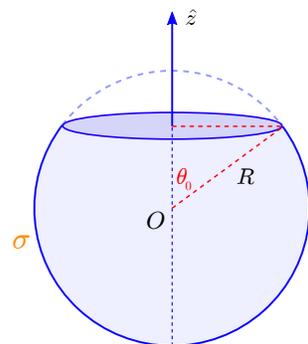
E-15 (C1-2020P) Una lámina no conductora muy extensa de grosor d contiene una carga uniformemente distribuida de densidad ρ en todo su volumen. El campo eléctrico en un punto P dentro de la lámina a una distancia x del plano central es E_1 . Luego la lámina es enrollada para formar un cilindro sólido muy largo. El campo eléctrico en un punto P' dentro del cilindro a una distancia x de su eje es E_2 . Encontrar $\frac{E_1}{E_2}$.



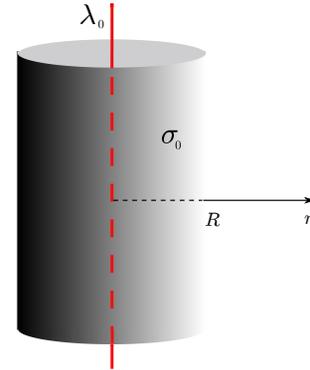
E-16 (C1-2021P) Una distribución de carga superficial uniforme σ se ubica sobre una superficie esférica de radio R , salvo en un casquete esférico del mismo radio y definido por el ángulo θ_0 como se indica en la figura.

a) Calcule el potencial eléctrico (con respecto a un potencial de referencia nulo en el infinito) a una distancia z arbitraria, medida desde el origen de la esfera, según el eje \hat{z} de simetría indicado en figura.

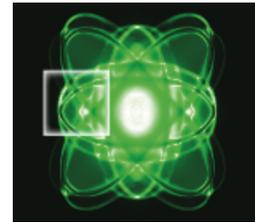
b) Considerar el caso límite $\theta_0 \rightarrow 0$ y determine el potencial y el campo eléctrico para puntos interiores ($z < R$) y exteriores ($z > R$) a la esfera según el eje \hat{z} . ¿Cómo podría verificar que los resultados obtenidos son correctos?



- E-17 (E2-2016P)[†]** Se tiene un cable infinito cargado con una densidad lineal de carga λ_0 , uniforme, rodeado por un casquete cilíndrico infinito de radio R y densidad superficial homogénea σ_0 . Si la densidad lineal coincide con el eje del cilindro, determine:
- El campo eléctrico en todo el espacio. Grafique su magnitud en función de la distancia al eje del cilindro: ¿es continuo el campo eléctrico?
 - El potencial eléctrico en todo el espacio. Tome como referencia $V(r = R) = 0$ y grafique la función potencial. Comente sobre la continuidad de la función.
 - Si el alambre se desplazara una distancia δ del eje del cilindro, ¿cómo determinaría el nuevo valor del campo eléctrico?



- E-18** Considere el siguiente modelo para el núcleo de un átomo: el núcleo está compuesto por una esfera maciza de radio R , la cual tiene una densidad de carga volumétrica radial $\rho(r) = \rho_0 (1 - r^2/R^2)$, donde ρ_0 tiene dimensiones $[C/m^3]$ y r es la coordenada radial. Encuentre el potencial eléctrico en todo el espacio.

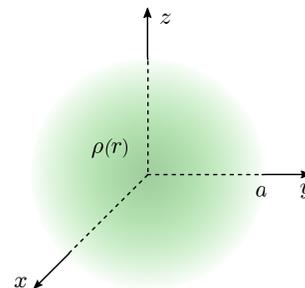


Respuesta (pág. 211)

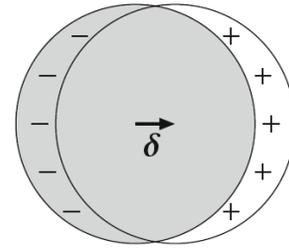
- E-19** Dos esferas rígidas tienen el mismo radio R , la misma masa M y cargas opuestas $\pm Q$ que se distribuyen de manera uniforme y rígida en los volúmenes de las esferas. Las esferas se encuentran inicialmente en reposo a una distancia $x_0 \gg R$ entre sus centros y tal que la energía de interacción es despreciable comparada a la suma de las energías necesarias para construir las distribuciones de carga. Debido a sus cargas opuestas, ellas se atraen entre sí y comienzan a moverse en $t = 0$.
- Evaluar la energía inicial del sistema.
 - Evaluar la velocidad de las esferas cuando se tocan entre ellas (distancia entre sus centros es $2R$).
 - Suponga que, luego de tocarse, las esferas pueden atravesarse sin roce. Evaluar la velocidad de las esferas cuando sus centros coinciden.

Respuesta (pág. 211)

- E-20** Se tiene una esfera de radio a con una distribución de carga $\rho(r)$ que produce un potencial eléctrico en su interior ($r \leq a$) dado por $V(r) = V_0 r^3 + K$ donde V_0 es conocido y K es una constante a determinar.
- Encuentre la densidad de carga $\rho(r)$ y la carga total Q de la esfera.
 - Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.
 - Calcule el potencial en todo el espacio.

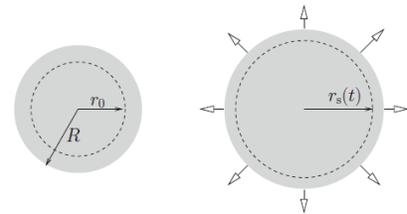


E-21 Una esfera neutra de radio R puede entenderse como la superposición de dos esferas ‘rígidas’: una con densidad de carga uniforme y positiva $+\rho$ y una segunda esfera de mismo radio R pero con densidad de carga negativa $-\rho$. Luego asumimos que es posible desplazar las esferas una cantidad δ entre ellas, sin alterar la estructura de cada esfera.



- Encontrar el campo eléctrico en la zona donde ambas esferas intersectan.
- Encontrar el campo eléctrico afuera de ambas esferas, discuta qué ocurre en el límite $\delta \ll R$.

E-22 En un tiempo $t = 0$ se tiene una nube esférica de radio R y carga total Q , comprimiendo N partículas puntuales. Cada partícula tiene carga $q = Q/N$ y masa m . La densidad de partículas es uniforme y ellas se encuentran en reposo.



- Calcular el potencial electrostático para una carga localizada a una distancia $r < R$ del centro en $t = 0$.
- Debido a la repulsión de Coulomb la nube se empieza a expandir radialmente manteniendo su simetría esférica. Asuma que las partículas no se superponen entre si, o sea, si dos partículas están localizadas inicialmente en $r_1(0)$ y $r_2(0)$, con $r_2(0) > r_1(0)$, entonces $r_2(t) > r_1(t)$ para todo tiempo posterior $t > 0$. Considere a las partículas localizadas en un cascarón esférico de ancho infinitesimal, o sea, si el radio del cascarón es r_s , entonces se tiene que $r_0 < r_s < r_0 + dr$ con $r_0 + dr < R$ en $t = 0$. Mostrar que la ecuación de movimiento de este cascarón es:

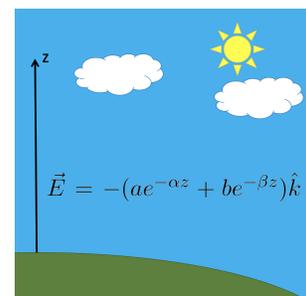
$$m \frac{d^2 r_s}{dt^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r_s^2} \left(\frac{r_0}{R}\right)^3$$

- Encontrar la posición inicial de las partículas que adquieren la máxima energía cinética durante la expansión de la nube y determine el valor de dicha energía máxima.

E-23 Considere un cilindro de radio R y largo infinito.

- Si la densidad de carga volumétrica es $\rho(r) = \rho_0 r e^{-r}$, determine la magnitud y dirección del campo eléctrico a cualquier distancia r del cilindro.
- Ahora considere que tiene una densidad de carga volumétrica ρ_0 constante. Si dentro del cilindro se hace un agujero cilíndrico de radio $R/4$, con eje paralelo al del cilindro original, pero desplazado δ con respecto a este eje, determine la magnitud y dirección del campo eléctrico dentro del agujero.

E-24 En un día con buen tiempo, el campo eléctrico sobre la superficie de la tierra se puede describir aproximadamente por la expresión $\vec{E} = -(ae^{-\alpha z} + be^{-\beta z})\hat{k}$, donde a, b, α y β son constantes con $(\alpha, \beta) > 0$. El eje z denota la altura sobre la superficie de la Tierra.



- Utilice la forma diferencial de la ley de Gauss para determinar la densidad de carga en función de la altura.
- Calcule la carga total contenida en una columna vertical de sección transversal A que va desde $z = 0$ hasta $z = \infty$.

E-25 (C1-2018P) Tratando de entender la expansión del universo[†], fue sugerido que la materia tiene una carga eléctrica neta (fenómeno no detectable en la experiencia cotidiana). Para ello, considere un volumen esférico V de tamaño astronómico, que contiene una densidad uniforme de N [átomos/ m^3] de hidrógeno, cada uno de ellos de masa m_H y se supone que la carga del protón es $q_p = (1 + \eta)q_e$, con q_e la magnitud de la carga del electrón.

a) Encontrar el campo eléctrico a una distancia r del centro del volumen ($V^{\frac{1}{3}} \gg r$).

b) Estimar el mínimo valor de η para el cual la repulsión eléctrica es mayor que la atracción gravitacional y el gas se expanda. Calcular un número es importante para tener el orden de magnitud. ¿Algún comentario?

c) Suponiendo que la densidad se mantiene constante por la creación continua de materia en el espacio, estudie el movimiento de un átomo en la variable radial r y determine la dependencia de su velocidad radial con r . Comente su resultado y la relación que tiene con el fenómeno de expansión que se busca explicar.

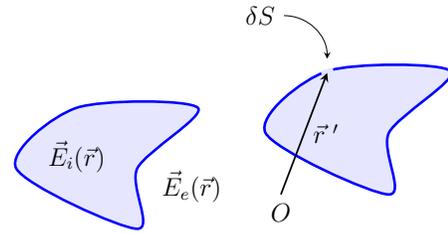
d) Determine el tiempo T para que la distancia radial de un átomo aumente en un factor e . Ese tiempo T puede tomarse como el correspondiente a la edad del universo.

Datos: $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$,

$$q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} C, m_H = 1,67353 \times 10^{-27} Kg, T_{univ} \sim 13,7 \cdot 10^9 \text{ años}.$$

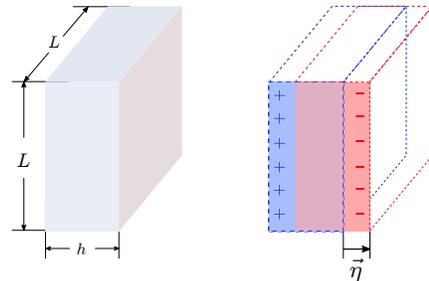
Respuesta (pág. 212)

E-26 Considere una superficie cerrada de forma arbitraria que ha sido cargada eléctricamente, además en su interior se encuentra una distribución de carga de densidad $\rho(\vec{r})$, de tal manera que al interior y al exterior de la superficie existen campos electrostáticos $\vec{E}_i(\vec{r})$ y $\vec{E}_e(\vec{r})$ respectivamente. A un punto \vec{r}' de dicha superficie, se le practica una pequeña perforación de área δS . Encontrar una expresión para el campo eléctrico en \vec{r}' .



E-27 La intensidad del campo eléctrico en la atmósfera, cerca de la superficie terrestre, es alrededor de 100 V/m y apunta hacia la Tierra. El potencial eléctrico aumenta a medida que lo hace la altura sobre la superficie, hasta valores del orden de 300.000 V. Este campo se mantiene por tormentas que depositan cargas negativas sobre la tierra. Calcule la carga eléctrica que tiene aproximadamente tiene la Tierra. Detalle las aproximaciones que realiza para hacer su cálculo.

E-28 (C1-2021O) Un bloque cuadrado de material de lado L tiene un espesor h , con $h \ll L$ (ver lado izquierdo de figura). El material, eléctricamente neutro, está constituido por iones de masa m_i distribuidos con una densidad uniforme N_i [partículas/vol] y electrones de conducción (o electrones 'libres') de masa $m_e \ll m_i$ y carga $q_e = -|e|$, distribuidos también en forma uniforme con densidad $N_e = ZN_i$, donde Z es el número entero que indica el grado de ionización y $|e|$ es la magnitud de la carga del electrón.



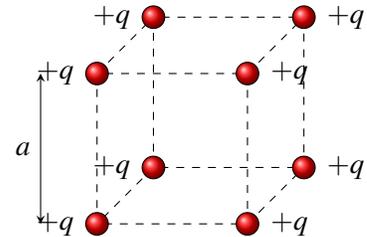
Se aplica un campo eléctrico externo y todos los electrones de conducción sufren un mismo desplazamiento $\|\vec{\eta}\|$, tal que $\|\vec{\eta}\| \ll h$, perpendicularmente a la base del bloque (ver lado derecho de figura). Se supone que las densidades N_i y N_e se mantienen constantes y que la distribución de los iones en el material permanece inalterada por el campo externo. Los efectos en los bordes del bloque son despreciables.

[†] La idea de este problema se debe a Lyttleton y Bondi (1959). Si le interesa conocer como terminó la historia y si se encontraron valores de η que lo validaran, investigue !!

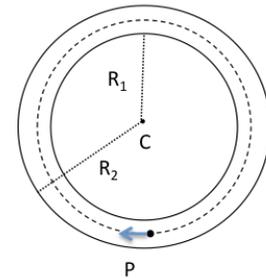
- a) Determinar el campo eléctrico en todo el espacio, producto del desplazamiento de los electrones. Grafique su resultado, detallando los valores relevantes que toma y el lugar donde ocurren. Ud. elija el sistema de coordenadas más conveniente.
- b) El campo eléctrico externo se remueve. Describa cualitativamente que ocurre al bloque de electrones. Determine la fuerza neta que actúa sobre la distribución de electrones.
- c) Estudie el movimiento para el caso límite de un desplazamiento pequeño $\|\vec{\eta}\| \ll h$ e interprete físicamente su resultado destacando los parámetros que resulten relevantes.

Respuesta (pág. 212)

E-29 Considere un cubo de lado a donde en cada uno de sus vértices se coloca una carga $+q$. Estas cargas están fijas en la estructura. Estudiar el punto de equilibrio que existe en el centro del cubo y mostrar si es estable o inestable.

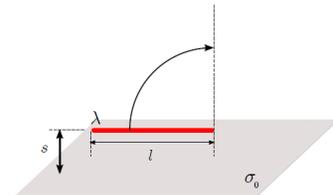


E-30 Un dispositivo electrostático está formado por dos cascarones esféricos concéntricos con radios $R_1 = 4\text{ cm}$ y $R_2 = 5\text{ cm}$, mantenidos a los potenciales V_1 y V_2 , respectivamente. Una fuente externa emite electrones en el punto P , del espacio vacío entre los dos cascarones, a una distancia $R_P = 4,5\text{ cm}$ del centro de las dos superficies esféricas. Los electrones tienen una velocidad inicial, perpendicular a la dirección radial del sistema esférico que pasa por P , y una energía cinética igual a $1,4\text{ keV}$. Calcular:



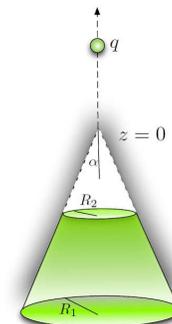
- a) el valor de la diferencia $V_1 - V_2$ tal que los electrones hagan una órbita circular;
- b) la energía electrostática almacenada en el dispositivo.

E-31 (C1-2017P) Una densidad de carga lineal λ con largo l está paralela a un plano infinito con densidad superficial de carga σ_0 . ¿Cuánto trabajo se requiere para rotar la línea de carga a la posición vertical?



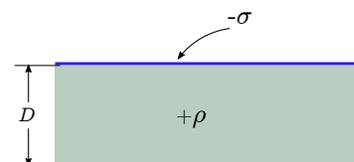
Respuesta (pág. 212)

E-32 Considere el manto de un cono de cortado (como se muestra en la figura) entre $\rho = R_1$ y $\rho = R_2$, cargado con una densidad $\sigma(\rho) = \sigma_0 \frac{a}{\rho}$ donde ρ es la distancia entre el manto y el eje del cono. Una carga puntual q se trae desde el infinito hasta el vértice del cono siguiendo un camino sobre el eje de simetría (eje z), tal y como se ilustra en la figura.



Encuentre el trabajo necesario que realiza un agente externo para llevar la carga desde infinito hasta el vértice de cono, con velocidad constante.

E-33 Se tiene una placa no-conductora infinita, de espesor despreciable, que tiene una densidad de carga superficial uniforme $-\sigma$. Junto a ella, una placa infinita paralela de espesor D y con una densidad de carga volumétrica uniforme $+\rho$. Todas las cargas están fijas.



Calcular la dirección y magnitud del campo eléctrico,

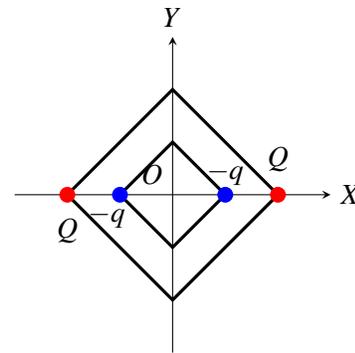
- a) a una distancia h sobre la placa cargada negativamente;
 b) dentro de la placa de espesor finito, a una distancia d bajo la placa cargada negativamente;
 c) a una distancia H bajo ambas placas.

E-34 (C1-2018P) Justifique sus respuestas brevemente y con claridad.

- a) En cierta zona finita del espacio del espacio existe un campo eléctrico cuyas componentes cartesianas $\{E_x, E_y, E_z\}$ son proporcionales a los productos $\{yz, xz, xy\}$ de coordenadas cartesianas. ¿Es un campo electrostático? ¿Hay una fuente de carga eléctrica en el mismo volumen?
 b) Dos planos infinitos, uniformes, de densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$, intersecan ortogonales entre si. Encontrar el campo eléctrico (magnitud y dirección) en todo el espacio y haga un gráfico aproximado de las líneas de campo.
 c) ¿Cuál es la energía eléctrica almacenada en una configuración de 4 cargas puntuales (tres positivas y una negativa) ubicadas en las esquinas del cuadrado: $+q$ en $(0, 0)$, $+q$ en $(0, a)$, $+q$ en $(a, 0)$ y $-q$ en (a, a) ?
 d) Una carga eléctrica Q se ubica, a una distancia δ del centro de un volumen cúbico de lado L ($L > \delta$), sobre la recta que une dos caras opuestas, perpendicular a ellas y que pasa por el centro. Calcular el flujo de campo eléctrico por la superficie correspondiente a la cara del cubo más cercana a la carga.

E-35 (C1-2020P) Dos cuadrados de lados a y $2a$ se posicionan en el plano xy con sus centros en el origen. Dos cargas de valor $-q$ son fijadas en los vértices opuestos del cuadrado pequeño y dos cargas de valor Q se fijan en los vértices opuestos del cuadrado grande (ver figura).

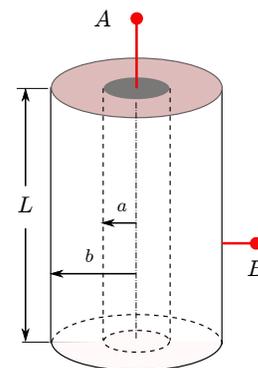
- a) Encontrar el trabajo requerido para mover el cuadrado grande lentamente hasta infinito desde la posición inicial.
 b) Hallar el trabajo hecho por un agente externo en rotar lentamente el cuadrado pequeño en 90° en torno al eje Y , seguido por una rotación del cuadrado grande en 90° en torno al eje Z .



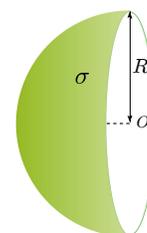
E-36 (C1-2016P) Un diodo rectificador, de geometría cilíndrica, es un dispositivo construido con un material en el que destacan 2 zonas. La zona P ($0 \leq r \leq a$) que tiene una densidad uniforme de carga negativa $\rho_p = -eN_p$, con e la magnitud de la carga del electrón y N_p el número de iones por unidad de volumen del medio. La zona N ($a \leq r \leq b$) tiene una densidad uniforme de carga positiva. El diodo es eléctricamente neutro.

- a) Determine la densidad de carga ρ_N en la zona N .
 b) Calcule el campo eléctrico en el diodo ($0 \leq r \leq b$). Grafique su magnitud en función del radio.
 c) ¿Cuánta energía debe suministrarse a un electrón para que atraviese el dispositivo desde el terminal metálico B hasta A ?

Respuesta (pág. 212)



E-37 Una superficie semiesférica de radio R está uniformemente cargada con una densidad superficial de carga σ . Evalúe el potencial eléctrico en el centro de curvatura, por al menos 2 métodos diferentes.

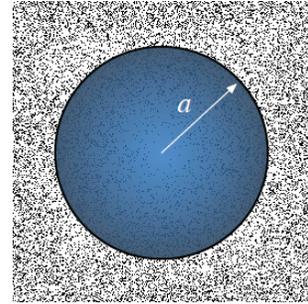


E-38 Explosión Coulombiana plana. Partículas idénticas de masa m y carga q se distribuyen con velocidad inicial cero y densidad uniforme n_0 en el espacio correspondiente a una placa infinita $|x| < \frac{1}{2}a$ en $t = 0$. Para $t > 0$, la placa se expande debido a la repulsión electrostática entre los pares de partículas.

Encontrar la ecuación de movimiento para las partículas, su solución y la energía cinética que adquieren.

Respuesta (pág. 212)

E-39 Una esfera maciza de radio a con carga desconocida, se encuentra completamente inmersa en un fluido que posee una densidad volumétrica de carga dada por $\rho(r) = -\epsilon_0 k^2 V(r)$ para $r > a$, donde k es una constante, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío y $V(r)$ el potencial eléctrico. Experimentalmente se ha determinado que el potencial en el borde de la esfera es V_0 con respecto al infinito (donde se asume que el potencial se anula) y que la distribución volumétrica de carga dentro de la esfera es uniforme.



a) Determine la densidad de carga $\rho(r)$ y el potencial eléctrico $V(r)$ en todo el espacio.

b) Si inicialmente la esfera estaba en el vacío, ¿cuánto trabajo debió ser realizado para colocar el fluido cargado alrededor de ella?

Indicación: puede ser útil definir $\psi(r) = rV(r)$ para facilitar la operatoria del problema.

E-40 (C1.2-2022P) Cierta distribución de carga da origen al siguiente campo eléctrico en la dirección radial,

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \theta(a - r) \hat{r},$$

donde r es la distancia al origen de coordenadas, a es un radio constante, E_0 es la magnitud constante del campo y $\theta(x)$ es la función de Heaviside (o escalón)*.

a) Encontrar la densidad de carga en función de E_0 y a .

b) Encontrar la carga total y determine el potencial electrostático para todo r .

E-41 Una carga total Q se distribuye uniformemente en el volumen de una esfera de radio R .

Calcular la energía electrostática de esta configuración de carga por los siguientes caminos:

a) Calcule el trabajo que se requiere para armar la esfera cargada a través de mover capas infinitesimales de cargas sucesivas, desde el infinito a su ubicación final.

b) Calcule la integral de volumen del campo eléctrico que produce la distribución de carga en todo el espacio,

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \|\vec{E}(\vec{r})\|^2 dV$$

c) Calcule

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{esfera}} \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV$$

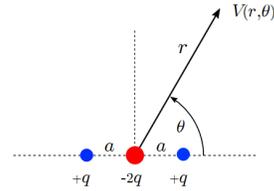
donde ρ es la densidad volumétrica de carga y ϕ es el potencial electrostático. Discuta las diferencias con el cálculo realizado en (b).

Respuesta (pág. 212)

* La función de Heaviside se define como

$$\theta(a - r) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > r \\ 0 & \text{si } a < r \end{cases}$$

E-42 Calcular el potencial y campo eléctrico en puntos lejanos para la distribución de cargas que se muestra en la figura.

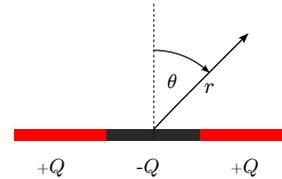


E-43 Demuestre que para una distribución cualquiera de cargas, el momento dipolar es independiente de la posición del origen del sistema de coordenadas si la carga total del sistema es nula.

Como aplicación, considere una distribución de carga lineal y uniforme sobre un anillo de radio a . La carga total de la distribución es $-q$ y el anillo está contenido en el plano xy , con centro en el origen. Una carga $+q$ está ubicada en el interior del anillo en $x = +d$. Encuentre el monopolo y el momento dipolar eléctrico de la distribución. Obtenga una expresión para el potencial electrostático a este mismo orden.

E-44 Dos cables paralelos tienen densidades uniformes de carga por unidad de largo λ y $-\lambda$, y están separados por una distancia ℓ . Los campos asociados a los cables decaen como $1/r$ (r distancia medida desde eje del cable y perpendicular a él). Entonces lejos de los cables, tenemos una versión “2D” de un dipolo, donde los cables actúan como cargas puntuales con campos que decaen como $1/r$ (en vez del $1/r^2$). Encuentre $V(r, \theta)$ y $\vec{E}(r, \theta)$ (considerando el plano perpendicular a los cables).

E-45 Calcular el campo eléctrico en un punto del espacio $P(r, \theta)$ debido a una barra de longitud L y carga neta Q distribuida linealmente como se indica en la figura. Estudiar el caso cuando el punto P se encuentra alejado de la distribución de carga ($r \gg L$).

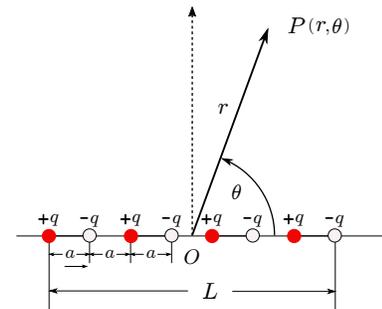


E-46 (E3-2016P) Un modelo de molécula lineal consiste en una sucesión de cargas positivas y negativas alternadas, separadas por una distancia inter atómica a . El largo total de la cadena es L y existe un número N (par) de átomos.

a) Determine el potencial eléctrico, en aproximación dipolar, en un punto P alejado de la cadena ($r \gg L$).

b) Calcule la energía necesaria para agregar una carga (del signo opuesto) en la posición correspondiente, en un extremo de la cadena. ¿Cuál es su resultado para $N \rightarrow \infty$?

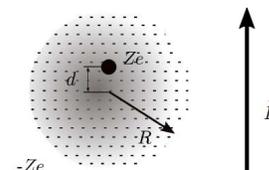
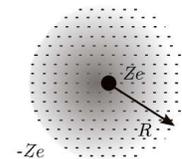
Recuerde: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \mp \dots$



E-47 (C1-2017P) Un átomo tiene Z protones en su núcleo y Z electrones orbitando con simetría esférica de radio R (figura superior). La magnitud de la carga es e . El átomo se coloca en un campo eléctrico externo \vec{E} uniforme (figura inferior).

a) Explique que sucede con el núcleo y la distribución electrónica. ¿Se mantiene esférica la nube de electrones o se deforma? Bosqueje lo que está ocurriendo. Justifique sus afirmaciones con claridad y rigurosidad.

b) Si la distribución electrónica mantiene su simetría esférica, determine la ubicación d del núcleo relativa al origen de modo que la atracción electrostática anule el efecto del campo externo.

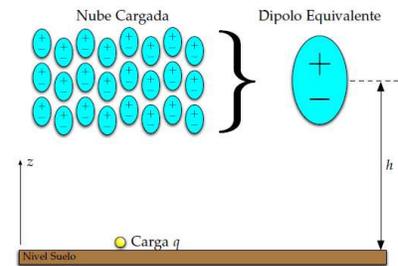


¿Qué restricción impondría a la magnitud de \vec{E} para que su resultado tenga algún sentido?

c) Determine el momento dipolar inducido y compare el potencial eléctrico $V(\theta)$ que el átomo polarizado produce en la superficie de la nube (ignore efecto de \vec{E}) con respecto a situación inicial. Tome el origen al centro de la distribución de carga negativa. Analice sus resultados para $\theta = 0, \pi$.

Respuesta (pág. 212)

E-48 Una nube de tormenta puede asimilarse a conjunto de dipolos orientados según se indica en la figura. Para representar eléctricamente dicha nube se utiliza un dipolo equivalente, con una distancia d entre sus cargas y está dispuesto a una altura h (punto medio de la nube). Para medir las cargas del dipolo se realiza el siguiente experimento: se coloca carga q a nivel de suelo, debajo del centro de la nube, y se mide la fuerza sobre ella. Si el valor de dicha fuerza es F ,



a) Calcule el campo eléctrico en la posición donde se encuentra la carga q . Además se pide calcular el potencial $V(z)$ en el eje z .

b) Calcule el trabajo necesario para llevar una carga q a una altura $\frac{h}{2}$.

E-49 (C1-2023P) Una esfera metálica eléctricamente neutra, de radio R , contiene N electrones de conducción (electrones prácticamente libres en el medio), cada uno de masa m_e y carga eléctrica $-|e|$. Se remueven de la esfera una fracción α de los electrones de conducción ($0 < \alpha < 1$) y los $(1 - \alpha)N$ se redistribuyen entre sí para lograr una configuración de equilibrio, mientras los N iones de la red cristalina permanecen fijos.

a) Calcular la densidad volumétrica de los electrones de conducción y el radio de su distribución en la esfera. ¿Cuál es la carga total de la esfera metálica y dónde se ubica?

Luego, la esfera de los electrones de conducción se desplaza rígidamente una distancia $\vec{\delta}$ relativa a la red iónica, con $\|\vec{\delta}\|$ suficientemente pequeña para que la esfera que encierra los electrones permanezca en el interior de la esfera de iones.

b) Calcular el campo eléctrico en el interior de la esfera de electrones de conducción.

c) Una vez que libera la esfera de los electrones de conducción, evalúe la frecuencia angular con que ésta oscila en el interior de la esfera metálica.

Respuesta (pág. 212)

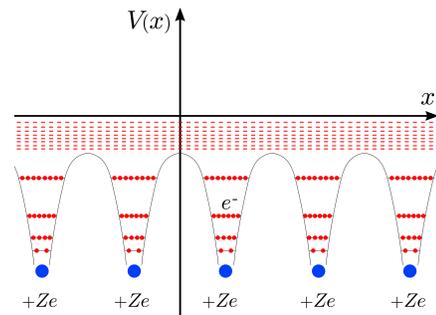
Campos eléctricos en la materia

3.1. Conductores

3.1.1. Modelo de un conductor (ideal)

Medio con un gran número de electrones (e^-) libres de moverse a través del material.

Los electrones (de conducción), débilmente ligados, tienden a moverse libremente por el medio (no abandonan la superficie - tensiones superficiales)



Consecuencias

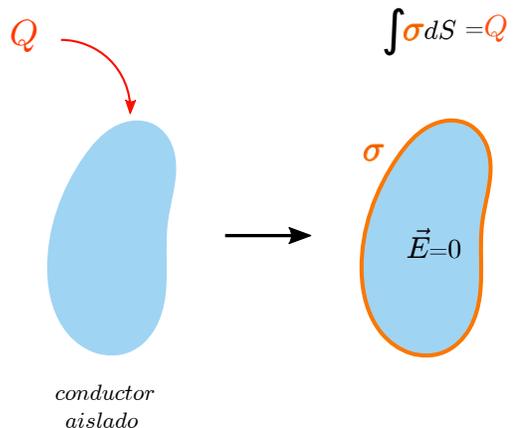
$$\vec{E} = 0 \quad \text{en interior de conductor}$$

Este resultado implica:

- * El volumen del conductor es una equipotencial $V = \text{constante}$;
- * El campo eléctrico \vec{E} es normal a superficie conductor.

- * Al agregar una carga Q a conductor (descargado), ésta se distribuye:

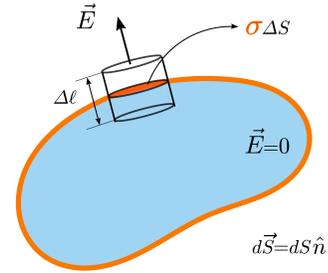
- en forma de una **densidad superficial de carga**, en la superficie del conductor y tal que el campo eléctrico en su interior sea nulo;



- en la superficie (externa) del conductor existe un campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0} \hat{n}$$

donde \hat{n} es la normal a la superficie del conductor.

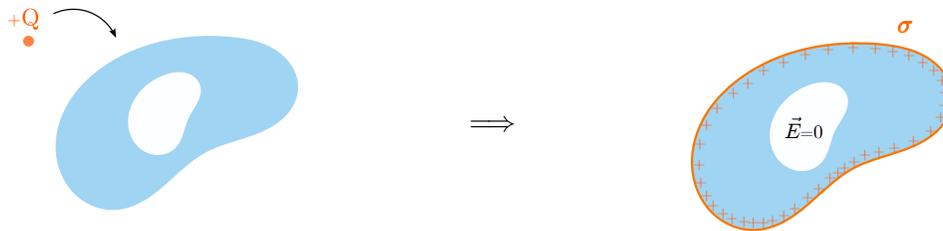


3.1.2. Inducción de carga eléctrica

Se refiere a la distribución que sufre la carga eléctrica en las superficies de un conductor tal que sea compatible con las propiedades del conductor y satisfaga las condiciones de contorno donde el conductor se ubica.

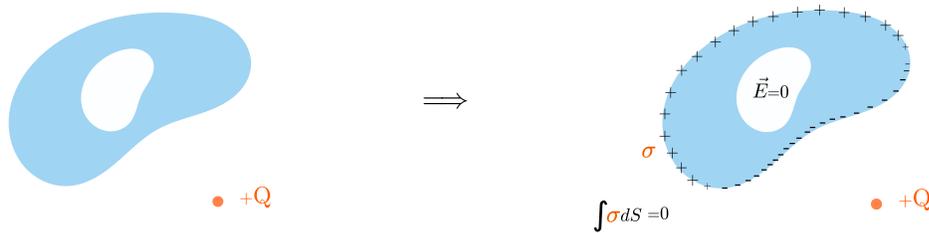
Casos típicos de inducción:

- * Conductor descargado hueco y se agrega carga $+Q$



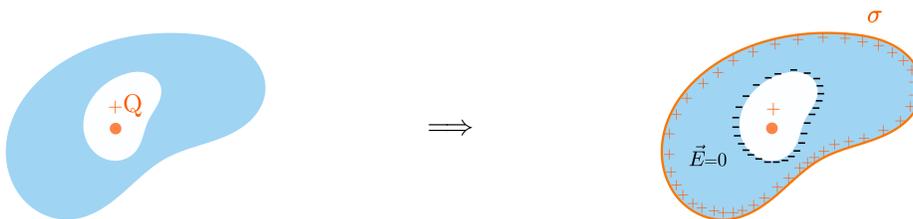
- * Blindaje electrostático

Conductor descargado hueco en presencia de carga externa $+Q$ (o campo eléctrico)



Existe una redistribución de cargas en la superficie del conductor pero nada ocurre en su interior !!

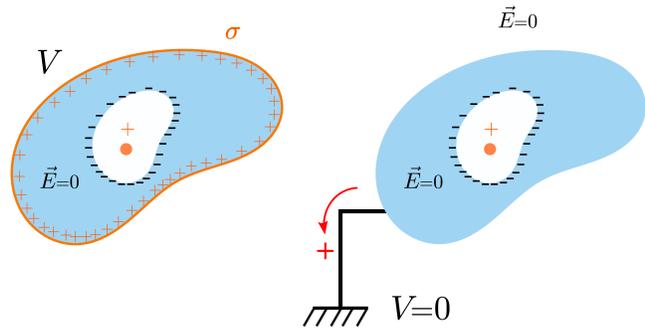
- * Conductor descargado hueco con carga $+Q$ en su interior



* **Conexión a tierra**

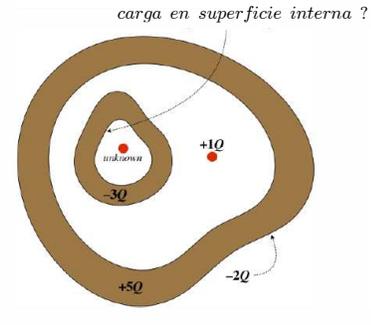
Se considera a la Tierra como un conductor infinitamente grande, que puede actuar como una fuente o sumidero de carga eléctrica.

$$V_{Tierra} \equiv V_{ref} = \quad (\text{por convención})$$



* **Ejercicio sobre cargas de inducción**

Un conductor hueco contiene a otro conductor hueco y a una carga puntual $+1Q$. La carga libre atrapada en el interior del conductor pequeño se desconoce, pero el conductor pequeño tiene una carga neta de $-3Q$ y el conductor mayor tiene una carga neta de $+5Q$. Si una carga de $-2Q$ se encuentra en la superficie externa del conductor mayor, encontrar cuanta carga hay en la superficie interna del conductor pequeño. Suponga que todas las cargas en los conductores están en reposo, en equilibrio.



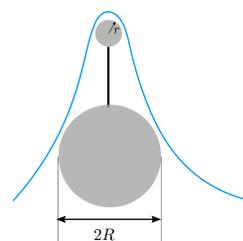
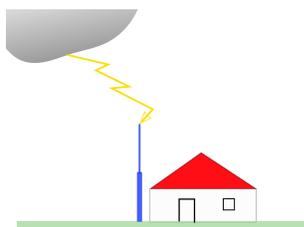
* **Determinación de la densidad de carga en superficie de un conductor**

La distribución de la carga eléctrica en la superficie (σ) de un conductor depende de la geometría de la superficie donde se induce y de la condición que el campo es nulo en su interior. Ello significa, usualmente, resolver el problema electrostático para conocer el campo externo al conductor y, consecuentemente, calcular σ . El problema se simplifica cuando el conductor tiene una gran simetría y no punto de la superficie es privilegiado frente a otro, generando una σ uniforme.

Por ejemplo, en una esfera conductora de radio R y carga Q , ésta se distribuye uniformemente en su superficie con $\sigma = Q/4\pi R^2$. Verificar que el campo eléctrico es nulo en cualquier punto interior a la esfera. Comprobar que el resultado es el mismo cuando la esfera es sólida o corresponde a una cáscara esférica del mismo radio y espesor despreciable.

3.1.3. Ejemplos

* **Descarga de alto voltaje (también llamada efecto punta)**



Modelo: Dos esferas conductoras de radios r y R ($r < R$), conectadas entre sí y que se reparten una carga total Q , representan conductor real. Cuál es la densidad superficial de carga en cada esfera?

$$V_r \simeq \frac{q}{4\pi r} \quad V_R \simeq \frac{Q}{4\pi R}$$

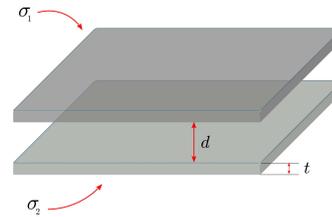
Restricciones:

$$\begin{aligned} q + Q &= Q_t & V_r &= V_R \\ q &= \frac{r}{r+R} Q_t & Q &= \frac{R}{r+R} Q_t \\ \sigma_r &= \left(\frac{R}{r}\right) \sigma_R \implies \sigma_r > \sigma_R \end{aligned}$$

* Planos conductores paralelos

Dos planos conductores espesor t , infinitos, separados una distancia d , que tiene densidades de carga superficiales totales σ_1 y σ_2 .

- Determinar las densidades de carga en cada cara de los planos y los campos eléctricos en todo el espacio
- Analizar caso especial $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$

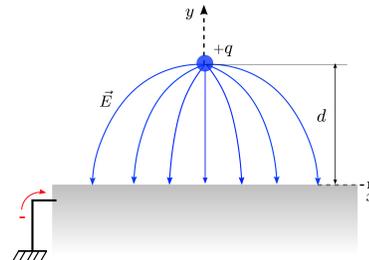


* Carga puntual frente a plano conductor conectado a tierra

Una carga puntual se coloca a una distancia d frente a un plano conductor conectado a tierra.

Se quiere conocer:

- La densidad superficial de carga inducida en la superficie
- La fuerza (atracción o repulsión ?) entre la carga y el plano



Este problema se resuelve formalmente resolviendo la ecuación de Poisson:

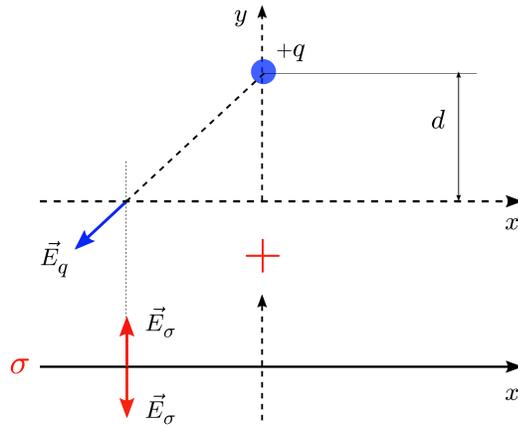
$$\nabla^2 V(x,y) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{más condición de borde} \quad V(x,0) = 0$$

Conociendo el potencial eléctrico, se puede calcular el campo eléctrico sobre la superficie del conductor y, con ello, la densidad de carga eléctrica inducida en la superficie. Finalmente, la fuerza entre la carga y el plano se podría calcular usando la ley de fuerzas de Coulomb.

Otra opción es el camino ingenuo, cuando flaquea el conocimiento de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales. Afortunadamente, existe el llamado **teorema de unicidad** que nos garantiza que una vez encontrada la solución a la ecuación de Poisson (no importa el método), esa solución es única.

El enfoque es potenciar al máximo el principio de superposición. En efecto, consideremos una carga puntual $+q$ en el espacio y un plano con una densidad de carga $\sigma(x)$ ubicado a la distancia d de la carga puntual.

$$\vec{E}_{\text{conductor}} = \left[\vec{E}_q + \vec{E}_\sigma \right]_{y=0^-} \longrightarrow 0$$

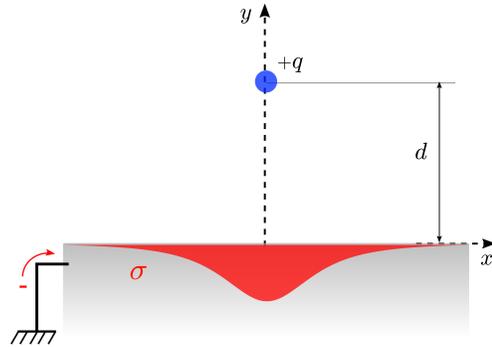


$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_q(x, 0) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2+d^2)^{3/2}} [-x\hat{x} + d\hat{y}] \\ \vec{E}_\sigma(x, 0) &= -\frac{\sigma(x)}{2\epsilon_0}\hat{y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma(x) = -\frac{qd}{2\pi(x^2+d^2)^{3/2}}$$

En la figura se muestra la densidad de carga inducida en el conductor debido a la presencia de carga q . La densidad presenta su valor máximo frente a la carga puntual.

¿Cuál es la carga total Q_{ind} inducida en el conductor? Verifique (con $\rho = \sqrt{x^2+z^2}$, la coordenada radial sobre plano (x, z)):

$$Q_{\text{ind}} = \int_{\text{plano}} \sigma(\rho) dS = -q \quad (dS = 2\pi\rho d\rho)$$



Fuerza de atracción entre carga y plano

La densidad de carga inducida en el plano conductor produce, en el semi-espacio $x > 0$, un campo eléctrico que ejerce una fuerza atractiva sobre la carga $+q$ dada por (calcular!),

$$\vec{F}_q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{x}.$$

Observar que la fuerza obtenida es equivalente a aquella con que una carga eléctrica, llamada carga imagen, de magnitud $-q$ y ubicada en la coordenada $y = -d$, atrae a la carga $+q$. El resultado inspira el llamado **método de imágenes** para calcular densidades de carga inducidas en conductores. Es útil para el caso de conductores de simetrías definidas.

* Esfera conductora en campo eléctrico uniforme

Una esfera metálica de radio R , descargada, se coloca en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$. Se espera que el campo actúe sobre los átomos que forman el material, produciendo una redistribución de la carga eléctrica en el conductor. El problema es determinar la densidad de carga superficial inducida en la esfera.

Esquema de solución:

el tema central de este problema es calcular el potencial eléctrico $V(\vec{r})$ en todo espacio fuera de la esfera ($r \geq R$). Usando coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ para mejor explotar las simetrías presentes, el esquema estándar a seguir es el siguiente:

$$r \geq R: \quad \text{Laplace} \longrightarrow \nabla^2 V(\vec{r}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\theta, \phi) = \epsilon_0 \left[\vec{E} \cdot \hat{r} \right]_{r=R}$$

Las condiciones de borde para determinar el potencial V están dadas por las consideraciones siguientes:

$$V(\vec{r}) \quad \begin{cases} = 0 & \text{para } r = R \quad (\text{esfera conductora es una equipotencial}) \\ \sim -E_0 r \cos \theta & \text{para } r \gg R \quad (z = r \cos \theta) \end{cases}$$

Observar en la figura adjunta que el plano (x, y) corresponde a una superficie equipotencial de valor nulo, lo que hace conveniente asignar tal valor a la equipotencial correspondiente a la esfera conductora. La elección de otro valor no altera el resultado buscado.

La resolución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es la mayor dificultad técnica. Se deja esa tarea para quienes hayan desarrollado tal conocimiento.

Esquema de solución alternativo:

un análisis del problema indica que existe una redistribución de carga eléctrica en la esfera conductora en presencia de \vec{E}_0 . Esta redistribución se manifiesta en la inducción de una densidad de carga superficial σ , simétrica pero de diferente signo con respecto al plano (x, y) (ver figura) y tal que la carga total inducida es nula. En coordenadas esféricas,

$$\sigma(\theta, \phi) = \begin{cases} \sigma(\theta) & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\sigma(\pi - \theta) & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Por la simetría del problema, es directo observar que no hay dependencia en la variable azimutal ϕ . Además,

$$\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

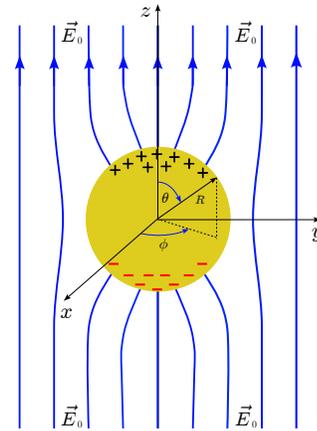
y la componente radial del campo eléctrico para $\theta = \frac{\pi}{2}$

es nula y éste pasa tangente a la esfera.

El potencial eléctrico en un punto arbitrario \vec{r} ($r \geq R$) corresponde a la suma del potencial V_0 asociado al campo inicial \vec{E}_0 y el potencial V_{esf} producido por la distribución de carga $\sigma(\theta)$,

$$V(\vec{r}) = V_0(\vec{r}) + V_{\text{esf}}(\vec{r}) \quad \begin{cases} V_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta \\ V_{\text{esf}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad r \geq R \end{cases}$$

donde \vec{p} es el momento dipolar de la esfera y el término dominante que produce el potencial V_{esf} (la carga total es nula),



$$\vec{p} = \int_{\text{esfera}} \vec{r} \sigma(\theta) dS = p \hat{z} \quad \text{con} \quad p = 4\pi R^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \right]$$

La densidad superficial de carga es proporcional a la componente radial del campo eléctrico ($\vec{E} = -\nabla V$) evaluado en la superficie. Luego,

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \left[\vec{E} \cdot \hat{r} \right]_{r=R} \implies \sigma(\theta) = \left[\epsilon_0 E_0 + \frac{2p}{4\pi R^3} \right] \cos \theta$$

es decir, se ha establecido una relación para calcular σ dependiendo de su momento dipolar, que a su vez depende de σ . Hay al menos 2 alternativas para calcular p .

* Imponiendo que en la superficie de la esfera conductora no existe la componente tangencial del campo eléctrico,

$$\left[\vec{E} \cdot \hat{\theta} \right]_{r=R} = 0 \implies p = 4\pi R^3 \epsilon_0 E_0$$

Esta condición es equivalente a imponer la condición de borde $V(r=R) = 0$.

* Alternativamente, proceder calcular p directamente a partir de su definición,

$$p = 4\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\epsilon_0 E_0 + \frac{2p}{4\pi R^3} \right] \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \implies p = \frac{1}{3} [4\pi R^3 \epsilon_0 E_0 + 2p]$$

y se obtiene el valor esperado.

Finalmente, la densidad superficial de carga inducida en la esfera conductora es

$$\sigma(\theta) = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

resultado que confirma la intuición de como se han redistribuido las cargas en la esfera.

3.1.4. Sistemas de conductores

Considere un sistema de N conductores

Su importancia: almacenan energía !!

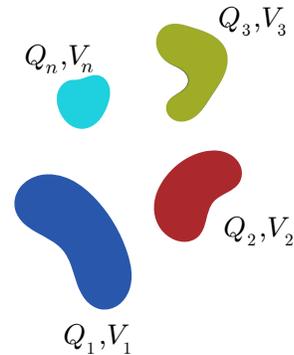
Ello porque es necesario realizar un trabajo externo para lograr vencer repulsión Coulombiana y terminar con conductores cargados (Q_i) y a potencial V_i .

El potencial en conductor i depende de la carga en cada conductor,

$$V_i = V_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_N)$$

y al existir una relación lineal entre carga y potencial se puede establecer que

$$V_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} Q_j \quad \text{donde } \alpha_{ij} \text{ coeficientes determinados por la geometría y medio}$$



Caso 1 conductor (en el vacío)

Con respecto a $V_{ref} = 0$ el conductor adquiere un potencial al traer carga Q a él,

$$V - V_{ref} \sim Q$$

reflejando el trabajo externo realizado para cargarlo. Entonces, se puede establecer

$$Q = C [V - V_{ref}] \quad C \equiv \text{Capacidad del conductor}$$

La capacidad depende sólo de la geometría y del medio donde se ubica el conductor

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} \equiv \text{Farad}$$

Capacidad de un conductor esférico

El potencial del conductor, referido a un potencial de referencia en el infinito $V_{\infty} = 0$, es

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

y su capacidad será

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad [F]$$

Ejemplo: para esfera tamaño de la Tierra ($R \simeq 6,400 \text{ Km}$)

$$C \simeq 7 \times 10^{-4} \quad [F]$$

Usual ver expresada la Capacidad en $[\mu F] = 10^{-6} [F]$; o en $[nF] = 10^{-9} [F]$; o en $[pF] = 10^{-12} [F]$.

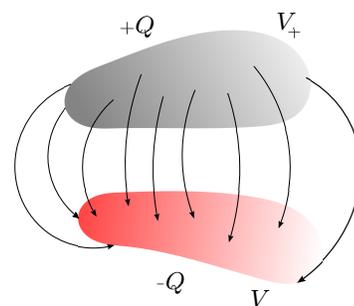
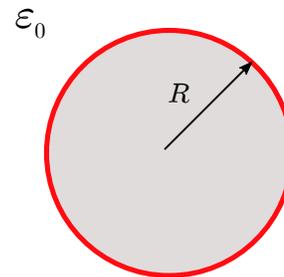
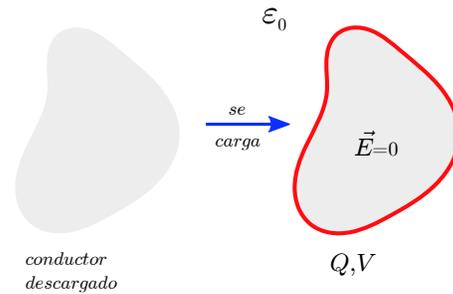
Condensadores

Condensador: sistema de 2 conductores (placas), susceptibles de estar sometidos a una diferencia de potencial o ser cargadas con cargas $\pm Q$

Se define la **capacidad** del condensador

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-}$$

con V_{\pm} el potencial eléctrico en conductor con carga $\pm Q$. La importancia de este dispositivo está en su capacidad de almacenar energía. Ello ha tenido un gran impacto en el desarrollo de tecnologías electrónicas.



Condensador plano: sistema de 2 conductores (placas) planos.

[*] Planos aprox ∞ , sección A , paralelos, separados d

[*] Se carga con $\sigma \simeq \pm \frac{Q}{A}$ en placas

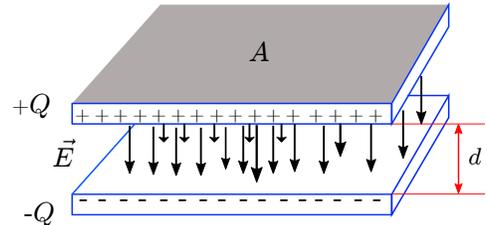
[*] Existe un campo eléctrico entre placas

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

[*] La diferencia de potencial entre las placas

$$V_+ - V_- = \|\vec{E}\| d = \frac{Qd}{A\epsilon_0}$$

[*] **Su capacidad:** $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ [F]



Ejemplo: un condensador de placas paralelas, área de 1 [m²] y separadas 1 [mm], tiene una capacidad $C = 8,854$ [nF].

+ **Energía eléctrica almacenada**

$$\delta W_e = \delta q \Delta V \quad \text{con} \quad \Delta V = \frac{q}{C} \quad \implies \quad W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q(V_+ - V_-)$$

+ **Fuerza entre placas**

La magnitud de la fuerza (atractiva) sobre un elemento de carga $\Delta q = \sigma \Delta S$ es

$$\Delta F = \Delta q E \quad \text{con} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Luego, la magnitud de la fuerza por unidad de área será

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \implies \quad F_{placa} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} A$$

Condensador cilíndrico: sistema de 2 conductores cilíndricos de radios a y b , muy largos (placas)

[*] Cilindros aprox ∞ , radios a y b

[*] Suponer que se cargan $\pm \lambda$ en placas

[*] Campo eléctrico entre placas

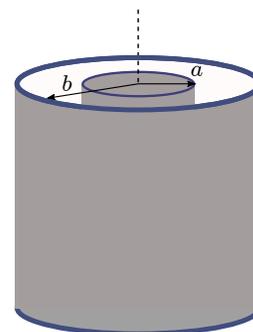
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

[*] La diferencia de potencial entre placas

$$V_+ - V_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a}$$

[*] **Su capacidad por unidad de largo:**

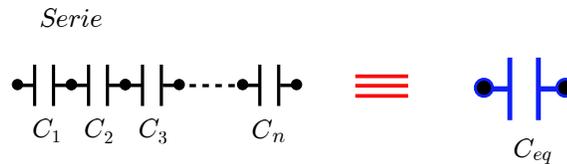
$$C_\ell = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log \frac{b}{a}} \quad \left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \right]$$



Conexión de condensadores

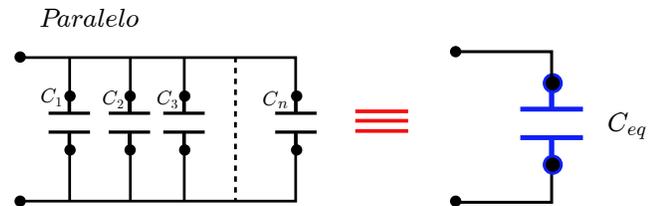
+ Conexión Serie

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$



+ Conexión Paralelo

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$



3.1.5. Energía eléctrica y fuerzas

Considerar un conjunto de n conductores que tienen cargas y potenciales $\{Q_i, V_i\}$ $i = 1, n$; ¿cuánta es la energía eléctrica almacenada en el sistema?

Observar:

el sistema es conservativo, luego no depende de la forma como va de la situación inicial (sin carga ni potencial) a la final.

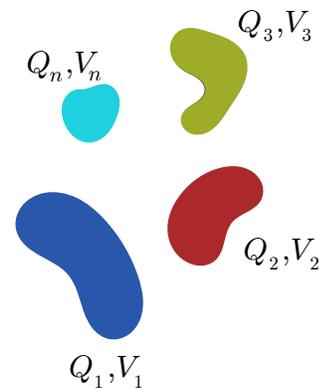
Ello sugiere considerar al sistema en una situación intermedia de carga,

$$\text{conductor } i \quad q_i = \alpha Q_i \quad \Rightarrow \quad v_i = \alpha V_i \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

entonces, el trabajo infinitesimal realizado para aumentar en δq_i la carga en conductor i , que tiene potencial v_i es

$$\delta W_i = \delta q_i v_i \quad \Rightarrow \quad \delta W_e = \sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n \delta q_i v_i$$

$$\text{como } \delta q_i = \delta \alpha Q_i \quad \Rightarrow \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$



Condensador

$$2 \text{ conductores, cargas } \pm Q \quad W_e = \frac{1}{2} Q [V_+ - V_-] = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad \Delta V = V_+ - V_-$$

Forma alternativa para W_e

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{espacio}} [\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})] \cdot [\vec{E}(\vec{r})] d\tau \quad \text{Demostrarlo !!}$$

Introduciendo

$$\text{densidad de energía eléctrica:} \quad \omega_e(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad W_e = \int_{\text{espacio}} \omega_e(\vec{r}) d\tau$$

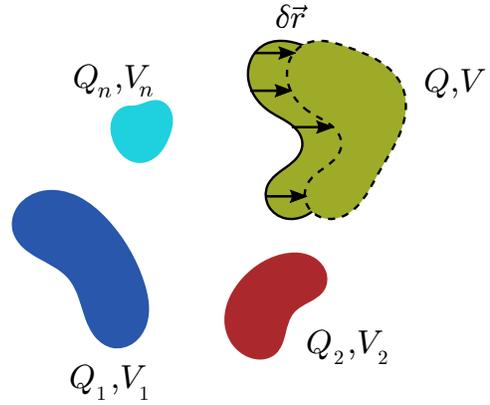
Fuerzas en sistema de conductores

Consideren los n conductores en equilibrio.

Calcular el trabajo mecánico que se necesita realizar para desplazar virtualmente un conductor $\{Q, V\}$ en $\delta\vec{r}$

$$\delta W_{mec} = \vec{F}_{mec} \cdot \delta\vec{r} = -\vec{F}_{elec} \cdot \delta\vec{r}$$

Hay que comparar el trabajo mecánico realizado con la variación de energía que sufre el sistema de conductores. Dos casos a considerar:



Carga constante en conductores

se tiene: $\delta W_{mec} = \delta W_e^{(Q)} \rightarrow -\vec{F}_{elec} \cdot \delta\vec{r} = \delta W_e^{(Q)}$
 entonces: $\vec{F}_{elec} = -\nabla W_e^{(Q)}$

Potencial eléctrico constante en conductores

se tiene: $\delta W_{mec} + W_{bat} = \delta W_e^{(V)} \rightarrow -\vec{F}_{elec} \cdot \delta\vec{r} + W_{bat} = \delta W_e^{(V)}$
 pero trabajo realizado por batería: $W_{bat} = \delta Q V = 2 \delta W_e^{(V)}$
 entonces: $\vec{F}_{elec} = +\nabla W_e^{(V)}$

* **Ejemplo:** calcular fuerza eléctrica por unidad de largo entre dos conductores con densidades lineales de carga $\pm\lambda$, separados una distancia ρ entre sus superficies externas. Los conductores son infinitamente largos para efectos prácticos y tienen una sección de radio $\delta \rightarrow 0$.

- Este problema se resuelve trivialmente aplicando la ley de Coulomb.

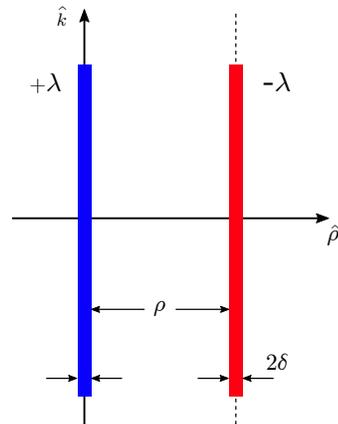
- En esta oportunidad ilustraremos como calcular la fuerza por unidad de largo a partir de la energía electrostática almacenada por el par de conductores,

$$W_E^{Q,\ell} = \frac{1}{2} \lambda [V_+ - V_-] = \frac{1}{2} \lambda \left[\frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho + \delta}{\delta} \right) \right]$$

donde el índice ℓ indica que la energía es calculada por unidad de largo.

- La fuerza por unidad de largo sobre el conductor rojo es

$$\vec{F}_\ell = -\nabla W_e^{Q,\ell} = -\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0(\rho + \delta)} \hat{\rho} \quad \text{resultado pedido para } \delta \rightarrow 0$$

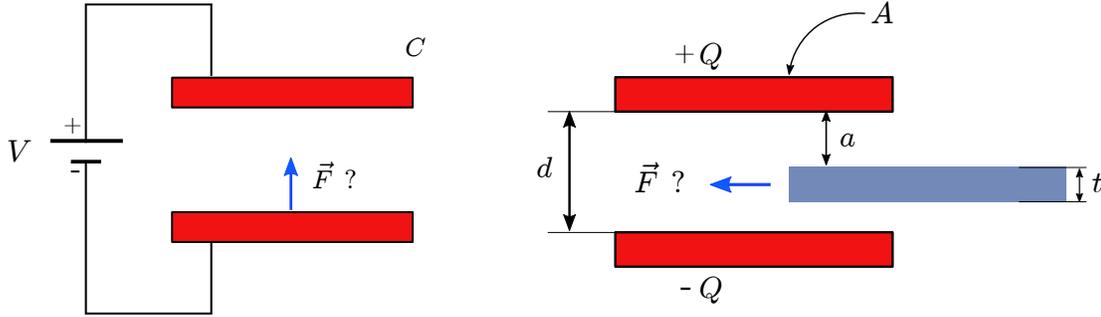


Curiosidad: la capacidad por unidad de largo para estas dos líneas conductoras paralelas, de radio δ y separadas distancia ρ es

$$C_\ell = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \left(\frac{\rho + \delta}{\delta} \right)}$$

* **Ejemplo:** Calcular la fuerza eléctrica sobre una placa conductora de espesor t ubicada entre las placas de un condensador plano. También la fuerza entre las placas del condensador cuando está vacío entre ellas.

La estrategia es calcular la fuerza eléctrica conociendo la energía electrostática almacenada. Esta energía puede calcularse a partir de la condición eléctrica del condensador y su capacidad.



En resumen, lo relevante es calcular la capacidad en ambos casos.

El caso más interesante es aquél con el conductor entre las placas, que se discute a continuación:

- placas cuadradas de lado L ;
- se desprecian efectos de borde (placas muy grandes);
- campo eléctrico uniforme entre placas. Significa que posición de conductor entre placas no es relevante;
- condensador se carga con $\pm Q$ en placa superior e inferior, respectivamente;
- hay 2 zonas relevantes; la carga se reparte en $\pm Q_1$ y $\pm Q_2$ en las zonas correspondientes:

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

- campos eléctricos (magnitud) constantes en las zonas respectivas,

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{E}_1\| = \frac{Q_1}{\epsilon_0 L(L-x)} \quad \|\vec{E}_2\| = \frac{Q_2}{\epsilon_0 Lx}$$

- la diferencia de potencial entre placas es la misma en ambas regiones,

$$V_+ - V_- \equiv V = \|\vec{E}_1\| d = \|\vec{E}_2\| (d-t) \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \epsilon_0 \frac{L(L-x)}{d} V \quad Q_2 = \epsilon_0 \frac{Lx}{(d-t)} V$$

- la condición sobre la carga total en la placa,

$$Q_1 + Q_2 = \left[\epsilon_0 \frac{L(L-x)}{d} + \epsilon_0 \frac{Lx}{(d-t)} \right] V = Q \quad \Rightarrow \quad Q = C_{\text{equiv}} V \quad \text{con} \quad C_{\text{equiv}} = C_1 + C_2$$

la C_{equiv} es la capacidad del sistema con el conductor entre las placas originales y se expresa como la suma de dos condensadores planos C_1 y C_2 conectados en paralelo.

- El problema queda totalmente resuelto !!

- Por ejemplo, la energía eléctrica del sistema a carga constante es

$$W_E^{(Q)}(x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{\text{equiv}}(x)} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{placa}} = \frac{Q^2}{2C_{\text{equiv}}^2} \frac{dC_{\text{equiv}}}{dx} \hat{x} = \frac{Q^2}{2C_{\text{equiv}}^2} \frac{\epsilon_0 L t}{d(d-t)} \hat{x}$$

3.2. Dieléctricos

3.2.1. Modelo de un dieléctrico (ideal)

Se entiende por un medio dieléctrico (o medio aislante) aquél medio material formado por átomos cuyos electrones no pueden moverse libremente bajo la acción de un campo externo (\vec{E}).

La comprensión de lo que ocurre en el medio es la siguiente:

el campo eléctrico externo polariza los átomos, generando la formación de dipolos eléctricos $\|\vec{p}\| \sim \|\vec{E}_{ext}\|$

Polarización del medio material

Debido a la polarización del medio, se modifica el campo eléctrico que sobre él se aplica,

$$\vec{E} \simeq \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{dip}$$

Evidencia experimental

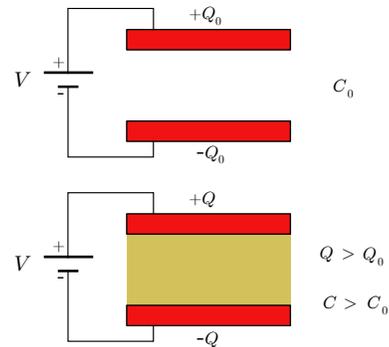
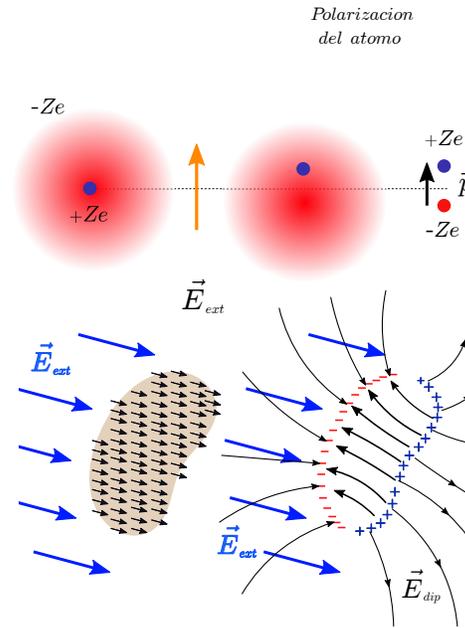
Considerar los experimentos siguientes:

Condensador a V constante

$$\vec{E}_{ext} \longrightarrow \vec{E} = \vec{E}'_{ext} + \vec{E}_{dip} = \vec{E}_{ext}$$

$$\implies \|\vec{E}'_{ext}\| > \|\vec{E}_{ext}\|$$

$$\text{como } Q \sim \|\vec{E}'_{ext}\| \implies Q > Q_0$$

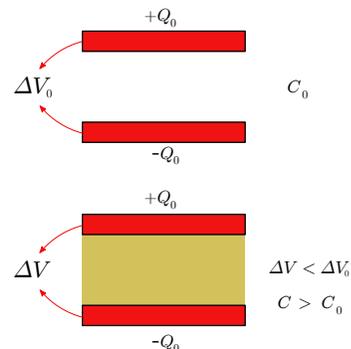


Condensador cargado y aislado

$$\vec{E}_{ext} \longrightarrow \vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{dip}$$

$$\implies \|\vec{E}\| < \|\vec{E}_{ext}\|$$

$$\text{entonces } \implies \Delta V < \Delta V_0$$



3.2.2. Polarización y densidades de carga

Descripción del dieléctrico:

considerar un medio que ha sido polarizado (o tiene una polarización propia, permanente). Ello significa que existe una densidad de momentos dipolares por unidad de volumen inducidos en el volumen que ocupa el dieléctrico.

Vector polarización

Es la magnitud física que mide la densidad volumétrica de dipolos inducidos (o permanentes) en el medio,

$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left[\frac{\sum_{i \in \Delta\tau} \vec{p}_i}{\Delta\tau} \right] = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$$

Para medio homogéneo y lineal, todos los dipolos inducidos son iguales,

$$\vec{P} = N\vec{p} \quad \text{con} \quad N \quad [\text{moléculas}/\Delta\tau] \text{ en el medio}$$

Para conocer el efecto que produce la materia polarizada, interesa calcular el campo eléctrico que produce cuando tiene un vector de polarización \vec{P} .

Por simplicidad, es preferible calcular primero el potencial eléctrico producido por una cantidad infinitesimal de dipolos $d\vec{p}$ en un punto arbitrario en el espacio,

$$dV(\vec{r}) = \frac{d\vec{p}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\tau'$$

Algo de cálculo

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$

donde prima indica derivada con respecto a \vec{r}' . Luego,

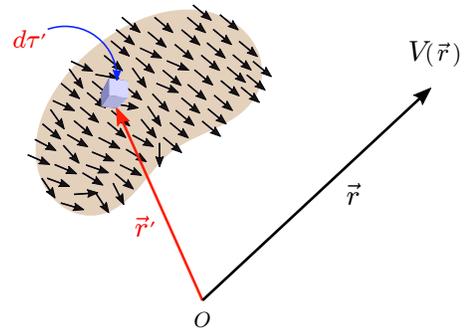
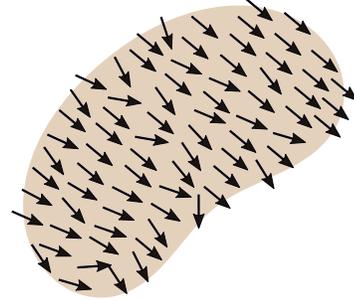
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{dist} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) d\tau'$$

Un par de manipulaciones conduce a

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{dist}} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S(V_{dist})} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Introducir (con \hat{n} la normal a la superficie del medio):

$$\text{Densidades de carga de polarización} \quad \begin{cases} \sigma_p(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n} \\ \rho_p(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) \end{cases}$$



con lo cual

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{dist}} \frac{\rho_p(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S(V_{dist})} \frac{\sigma_p(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} ds'$$

Conclusión:

medio polarizado se reemplaza por distribuciones de carga (de polarización) para calcular el efecto eléctrico que produce.

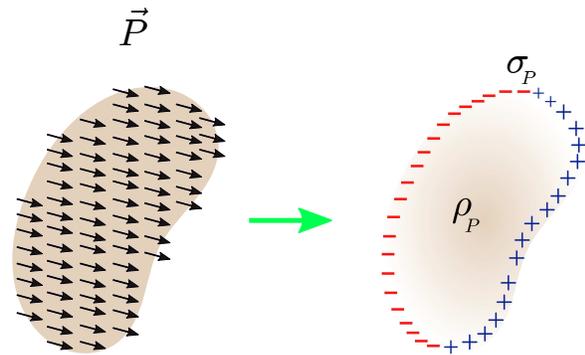
Observar:

* (σ_p, ρ_p) no son cargas libres;

* $Q_p = \oint \sigma_p dS + \int \rho_p d\tau = 0;$

* \vec{P} uniforme $\implies \rho_p = 0;$

* $\sigma_p \neq 0$ siempre.



3.2.3. Vector desplazamiento

Interesa ver el impacto que tiene la presencia del medio material en la descripción que las ecuaciones de Maxwell hacen del campo electrostático en el vacío.

Para tal efecto, considerar un medio dieléctrico donde existe una densidad de carga libre ρ_ℓ . Producto de los campos eléctricos que producen las cargas libres, el medio se polariza (\vec{P}). A su vez, los efectos del medio polarizado es reemplazable por su densidad de carga de polarización ρ_p . Luego,

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho_\ell + \rho_p]$$

recordando que

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \implies \nabla \cdot [\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}] = \rho_\ell$$

Introduciendo una nueva magnitud vectorial:

Vector Desplazamiento: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$

se concluye:

Maxwell: $\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_\ell \iff \oint_{S(V)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_\ell$ Teorema de Gauss

con Q_ℓ la carga libre total (neta) encerrada por volumen $V,$

$$Q_\ell = \int_V \rho_\ell d\tau.$$

A destacar:

- Vector \vec{D} empieza y termina en cargas libres;
- Vector \vec{E} empieza y termina en cargas libres y de polarización.

Ecuaciones constitutivas del dieléctrico**¿Cómo se comporta un medio dieléctrico?**

Depende del medio material específico. Se requiere desarrollar un modelo microscópico (y/o introducir elementos fenomenológicos) para determinar como se polariza frente a un campo eléctrico y cuantificar su vector de polarización.

Modelo lineal

En medios isótropos y homogéneos, una buena aproximación es suponer que la polarización es paralela al campo resultante en el medio ($\vec{P} \parallel \vec{E}$)

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad \chi_e \equiv \text{susceptibilidad eléctrica del medio material}$$

Por supuesto, en el vacío $\chi_e = 0$. Bajo la suposición que χ_e es independiente del campo eléctrico,

$$\chi_e \neq \chi_e(E) \quad E = \|\vec{E}\|$$

estonces χ_e es característica de cada medio.

El vector desplazamiento se modifica a

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

Introduciendo la **permitividad ε del material**

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \quad \implies \quad \vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

La constante dieléctrica puede depender de posición, lo que requiere un tratamiento cuidadoso.

Constante dieléctrica ε_r : corresponde a la permitividad relativa del material

$$\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

Conclusión: la ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_\ell \implies \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho_\ell$

$$\text{para } \varepsilon \neq \varepsilon(\vec{r}): \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_\ell}{\varepsilon}$$

Un resultado muy interesante: para una permitividad independiente de posición (uniforme), el cálculo del campo eléctrico (y por consiguiente del potencial eléctrico) es idéntico al correspondiente a la carga ρ_ℓ en el vacío, reemplazando al final $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$.

3.2.4. Condiciones de borde en Electroestática

Interesa conocer el comportamiento del campo eléctrico en la superficie de separación de dos medios. La evidencia muestra que los campos pueden refractarse el cómo lo hacen es parte de lo que la teoría debe poder responder.

En la superficie de separación:

- El potencial eléctrico debe ser continuo.

Una discontinuidad significaría un campo eléctrico de intensidad infinita ... físicamente imposible

- Maxwell y el comportamiento de \vec{D} y \vec{E}

en Electroestática: $\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_\ell \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \\ \vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \end{cases}$ ecuación constitutiva del medio

- En la superficie de separación,

+ El vector desplazamiento.

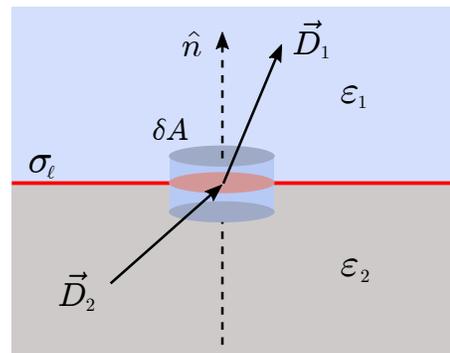
Integrando la ecuación de la divergencia en el volumen indicado en figura,

$$\oint_{S(V)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_\ell d\tau$$

luego $[\vec{D}_1 - \vec{D}_2] \cdot \hat{n} \delta A = \sigma_\ell \delta A$

porque la integral sobre el manto no contribuye. Se obtiene,

$$[\vec{D}_1 - \vec{D}_2] \cdot \hat{n} = \sigma_\ell$$



Conclusión:

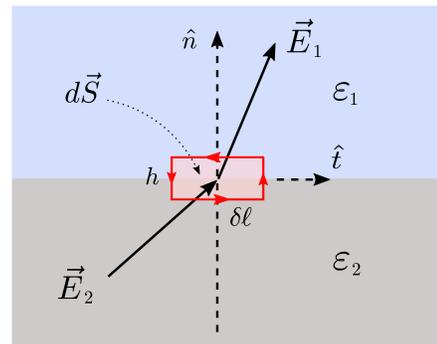
Existe una discontinuidad en la componente normal del vector desplazamiento que corresponde a la densidad de carga libre existente en la superficie. Si $\sigma_\ell = 0 \implies D_{2n} = D_{1n}$, es decir, se conservan las componentes normales a superficie de separación.

+ El vector campo eléctrico

Integrando la ecuación del rotor en la superficie indicada en figura y usando el teorema de Stokes,

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

con C la trayectoria que limita superficie de integración $d\vec{S} = (\delta\ell)(h)\hat{t} \times \hat{n}$ indicada en figura y \hat{t} la dirección tangente a la superficie de separación. Para $h \rightarrow 0$, la integral se reduce a



$$[\vec{E}_2 - \vec{E}_1] \cdot \hat{t} = 0 \implies E_{2t} = E_{1t}$$

Observando que: $\hat{t} = \hat{n} \times \frac{d\vec{S}}{\|d\vec{S}\|} \implies$ forma alternativa: $[\vec{E}_2 - \vec{E}_1] \times \hat{n} = 0$

Conclusión:

La componente tangencial del campo eléctrico se conserva al pasar de un medio a otro en la superficie de separación.

Refracción

Corresponde al cambio de dirección (refracción) del campo eléctrico (o líneas de fuerza) al cambiar de medio.

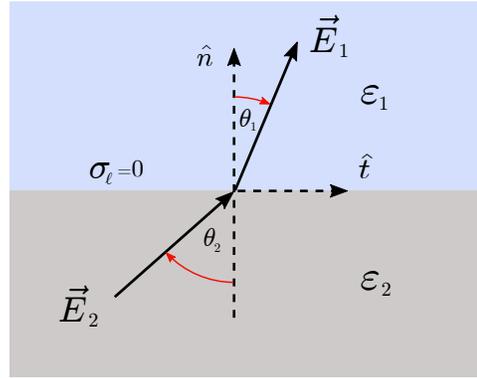
* Suponiendo que no hay densidad de carga libre en superficie de separación Los medios son isótropos y homogéneos.

* Condiciones de borde (notación $\|\vec{D}\| = D; \|\vec{E}\| = E$)

$$D_{2n} = D_{1n} \implies \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \theta_1$$

$$E_{2t} = E_{1t} \implies E_2 \sin \theta_2 = E_1 \sin \theta_1$$

Conclusión: $\tan \theta_1 = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \tan \theta_2$



Aplicación:

para $\epsilon_2 < \epsilon_1$ [de aire (vacío) a agua] $\implies \theta_1 > \theta_2$

para $\epsilon_2 > \epsilon_1$ [de agua a aire (vacío)] $\implies \theta_1 < \theta_2$

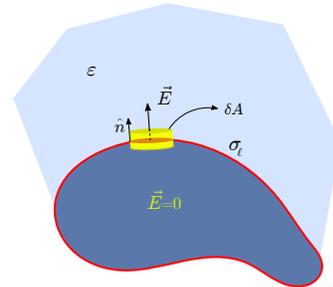
Ejemplo: Conductor con densidad superficial de carga libre σ_l rodeado por un medio material dieléctrico dieléctrica ϵ

- Una posibilidad para calcular el campo eléctrico en puntos exteriores al conductor es integrar la ecuación de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_l(\vec{r})$$

en un volumen infinitesimal, como se indica en figura (teorema de Gauss).

- Un camino directo, porque el paso previo ya está hecho, es analizar las condiciones de borde que deben satisfacer los campos al pasar de un medio a otro.



Para este problema, identificamos al conductor con el medio 2 y al dieléctrico con el medio 1,

$$\vec{E}_2 \equiv \vec{E}_{\text{cond}} = 0 \quad \vec{E}_1 \equiv \vec{E}_{\text{dielec}} \equiv \vec{E}$$

$$\vec{D}_2 \equiv \vec{D}_{\text{cond}} = 0 \quad \vec{D}_1 \equiv \vec{D}_{\text{dielec}} \equiv \vec{D}$$

- Las condiciones de borde indican:

a) las componentes tangenciales del campo eléctrico a ambos lados de la superficie del conductor son iguales

$$E_{1t} = E_{2t} \implies E_t = 0$$

es decir, la componente tangencial a la superficie, en el dieléctrico, es nula.

b) las componentes normales del vector desplazamiento a ambos lados de la superficie tienen una discontinuidad

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_\ell \implies D_n = \sigma_\ell$$

- El vector desplazamiento será

$$\vec{D} = \sigma_\ell \hat{n}$$

- El campo eléctrico en la superficie del conductor será

dieléctrico lineal y homogéneo $\vec{E} = \frac{\sigma_\ell}{\epsilon} \hat{n}$ \hat{n} : normal a la superficie del conductor

3.2.5. Energía eléctrica y fuerza en dieléctricos

Se recuerda que para un sistema de conductores en el vacío,

* Sistema de n conductores con cargas y potenciales

$\{Q_i, V_i\}$ $i = 1, \dots, n$ en el vacío. Claramente, la carga del conductor corresponde a la carga libre que adquiere,

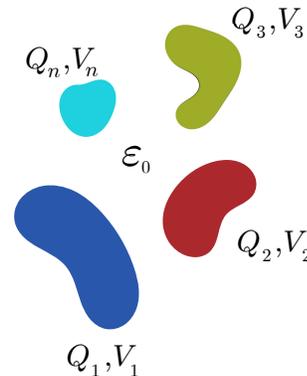
$$Q_i \equiv Q_i^\ell.$$

* La energía almacenada por el sistema

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

Alternativamente

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{espacio}} [\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})] \cdot [\vec{E}(\vec{r})] d\tau$$



* Densidad de energía electrostática

$$\omega_e(\vec{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} \implies W_e = \int_{\text{espacio}} \omega_e(\vec{r}) d\tau$$

Para un sistema de conductores en un medio dieléctrico:

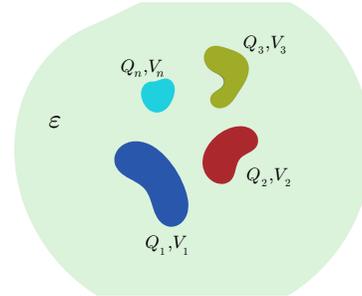
En el proceso de cargar los conductores insertos en el medio, es necesario realizar un trabajo externo adicional para polarizar el dieléctrico. Ello significa que el conductor i que se carga con carga libre Q_i^ℓ tendrá un potencial $\bar{V}_i > V_i$ cuando está en el medio.

* La energía almacenada por el sistema

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \bar{V}_i$$

Como la carga se distribuye en la superficie del conductor,

$$W_e = \frac{1}{2} \oint_{S(\text{conductor})} \sigma_\ell(\vec{r}') \bar{V}(\vec{r}') dS'$$



Pero, en la superficie del conductor, $\sigma_\ell = \vec{D} \cdot \hat{n}$ con \hat{n} la normal a la(s) superficie(s) conductora(s). Luego,

$$W_e = -\frac{1}{2} \oint_{S(\text{dielec})} \bar{V}(\vec{r}') \vec{D}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'$$

* Considerar la identidad

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\bar{V} \vec{D}) &\equiv \nabla \bar{V} \cdot \vec{D} + \bar{V} \nabla \cdot \vec{D} \\ &\equiv -\vec{E} \cdot \vec{D} + \bar{V} \nabla \cdot \vec{D} \end{aligned}$$

e integrar en el volumen del dieléctrico (campos son nulos al interior de conductores).

$$\oint_{S(\text{dielec})} \bar{V}(\vec{r}') \vec{D}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' = - \int_{V(\text{dielec})} \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{D}(\vec{r}') d\tau' + \int_{V(\text{dielec})} \bar{V}(\vec{r}') \rho_\ell(\vec{r}') d\tau'$$

No existiendo densidad de carga libre en el volumen del dieléctrico, el último término se anula. Se concluye:

- La energía electrostática almacenada

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V(\text{espacio})} \vec{E}(\vec{r}') \cdot \vec{D}(\vec{r}') d\tau'$$

donde el volumen del dieléctrico $V(\text{dieléctrico}) \rightarrow V(\text{espacio})$ por que al interior de los conductores la contribución a la energía es nula.

- Es conveniente introducir una medida de la cantidad de energía electrostática que existe por unidad de volumen en el medio dieléctrico,

$$\text{densidad de energía electrostática: } \omega_e(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r})$$

- Conocida la densidad de energía electrostática,

$$\text{la energía total almacenada en el medio: } W_e = \int_{V(\text{espacio})} \omega_e(\vec{r}) d\tau$$

- **Simplificaciones:** Para medio dieléctrico con polarización proporcional al campo eléctrico,

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad \implies \quad \omega_e = \frac{1}{2} \epsilon(\vec{r}) \|\vec{E}(\vec{r})\|^2$$

que se simplifica más aún para efectos del cálculo si el medio es homogéneo e isótropo, $\epsilon(\vec{r}) \rightarrow \epsilon$ (constante).

Fuerza a partir de la energía eléctrica

El cálculo de la fuerza sobre un conductor a partir de la energía acumulada en el sistema ya fue discutido. El mismo análisis aplica al caso de un objeto dieléctrico en presencia de un campo eléctrico. Por ello, por completitud, ahora sólo rescatamos el resultado principal,

Condición eléctrica:

$$\text{Carga constante - sistema aislado} \quad \vec{F} = -\nabla W_e^{(Q)}$$

$$\text{Potencial constante - fuente externa} \quad \vec{F} = +\nabla W_e^{(V)}$$

3.2.6. Ejemplos

Carga (libre) puntual en dieléctrico de permitividad ϵ .

Calcular el campo eléctrico que produce una carga puntual q_ℓ en el interior y el exterior del volumen esférico dieléctrico, de radio R_D , que se muestra en figura.

* Según Maxwell, la carga eléctrica libre q_ℓ es fuente del vector desplazamiento \vec{D} .

* La simetría esférica del problema sugiere

$$\vec{D}(\vec{r}) = D(r) \hat{r} \quad \forall r$$

es decir, tiene siempre dirección radial (ver tema condiciones de borde más adelante).

* Aplicar teorema de Gauss para \vec{D} . Escoger esfera de radio r (R) como superficie gaussiana

$$\oint_{S(r)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D(r) = q_\ell \quad \forall r$$

* El vector desplazamiento será,

$$\vec{D} = \frac{q_\ell}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \forall r$$

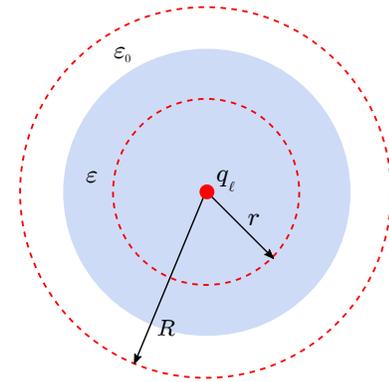
* Para medio dieléctrico isótropo y homogéneo, en el cual el vector polarización es proporcional al campo eléctrico resultante en el medio,

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 [\epsilon - \epsilon_0] \vec{E}(\vec{r}) \quad \implies \quad \vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r})$$

* El campo eléctrico será:

$$\implies \begin{cases} \vec{E} = \frac{q_\ell}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r} & \forall r \leq R_D \quad (R_D \text{ radio dieléctrico}) \\ \vec{E} = \frac{q_\ell}{4\pi \epsilon_0 R^2} \hat{r} & \forall R > R_D \text{ fuera de dieléctrico} \end{cases}$$

* El potencial eléctrico (para $V(\infty) = 0$),



$$\Rightarrow \begin{cases} V(r) = \frac{q_\ell}{4\pi\epsilon r} + \frac{(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon})q_\ell}{4\pi\epsilon_0 R_D} & \forall r \leq R_D \\ V(R) = \frac{q_\ell}{4\pi\epsilon_0 R} & \forall R > R_D \end{cases}$$

Explicitando el mecanismo de polarización

- + Cálculo directo del campo eléctrico. La fuente de este campo es la carga eléctrica libre q_ℓ y la carga de polarización q_p que modela la polarización que sufre el medio.
- + Se espera un campo eléctrico radial al suponer un medio isótropo y homogéneo,

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$$

- + La fuente de campo eléctrico son las cargas netas libres y de polarización encerradas en el volumen de aplicación,

$$\text{Gauss} \Rightarrow \begin{cases} \oint_{S(r)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} [q_\ell + q_p] & \forall r \text{ en dieléctrico} \\ \oint_{S(R)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi R^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} [q_\ell] & \forall R \text{ fuera de dieléctrico} \end{cases}$$

La carga de polarización q_p se calcula a partir de las densidades de carga de polarización. En el caso del volumen que encierra a todo el dieléctrico ($S(R)$), se tiene $q_p = 0$ por ser el medio eléctricamente neutro.

- + La carga de polarización

$$q_p = \int_{V(r)} \rho_p d\tau + \oint_{S(\delta)} \sigma_p dS$$

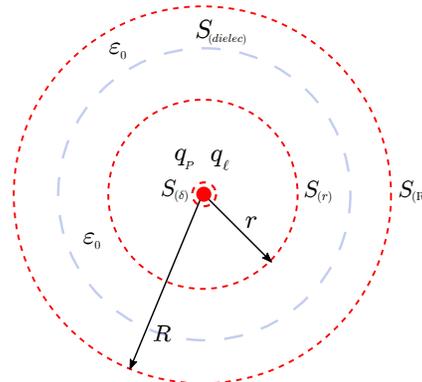
Observar que la carga proviene del volumen del dieléctrico y de la superficie $S(\delta)$ que limita con la carga libre. Reemplazando las densidades de polarización,

$$q_p = - \oint_{S(r)} \vec{p} \cdot d\vec{S} = -4\pi r^2 P(r)$$

- + Bajo la suposición de una polarización lineal del medio,

$$P(r) = [\epsilon - \epsilon_0] E(r) \quad \Rightarrow \quad q_p = - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0} (q_\ell + q_p)$$

$$\text{carga de polarización} \quad q_p = - \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right] q_\ell \quad \Rightarrow \quad q_\ell + q_p = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} q_\ell < q_\ell$$



Condensador plano

* Geometría del condensador: placas conductoras de superficie A separadas una distancia d . Entre placas, un medio de constante dieléctrica ϵ .

* La capacidad de un sistema de dos conductores corresponde a

$$C = \frac{Q_\ell}{\Delta V}$$

con Q_ℓ la carga libre en las placas y ΔV la diferencia de potencial entre placas.

* Se puede usar indistintamente una de las siguientes condiciones eléctricas:

- (a) conectar una batería externa a las placas y calcular la carga libre en las placas;
- (b) dar una carga libre a las placas y calcular la diferencia de potencial entre placas.

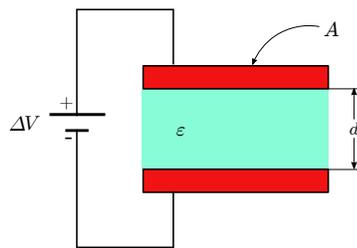
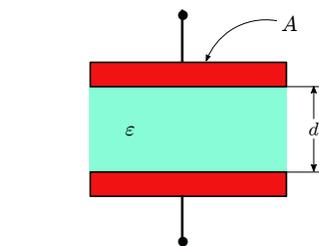
* Estrategia (a)

Al conectar una batería a las placas del condensador, el campo eléctrico entre placas es (en la aproximación de campo uniforme)

$$\|\vec{E}\| = \frac{\Delta V}{d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\|\vec{D}\|}{\epsilon} = \frac{\Delta V}{d}$$

al relacionar el campo eléctrico con el vector desplazamiento en el medio.

$$\text{Pero} \quad \|\vec{D}\| = \sigma_\ell = \frac{Q_\ell}{A} \quad \Longrightarrow \quad C = \epsilon \frac{A}{d}$$



capacidad de un condensador plano

* Estrategia (b)

Estando el condensador aislado, se entrega cargas $\pm Q_\ell$ a cada placa. Entonces, existirá una densidad superficial de carga libre

$$\sigma_\ell = \frac{Q_\ell}{A} \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{D}\| = \sigma_\ell$$

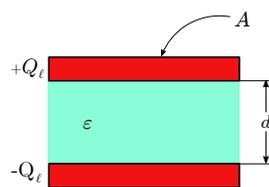
en aproximación de campo uniforme entre placas. El campo eléctrico entre las placas es

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_\ell}{\epsilon} \quad \Longrightarrow \quad \Delta V = \|\vec{E}\| d$$

y la diferencia de potencial entre las placas,

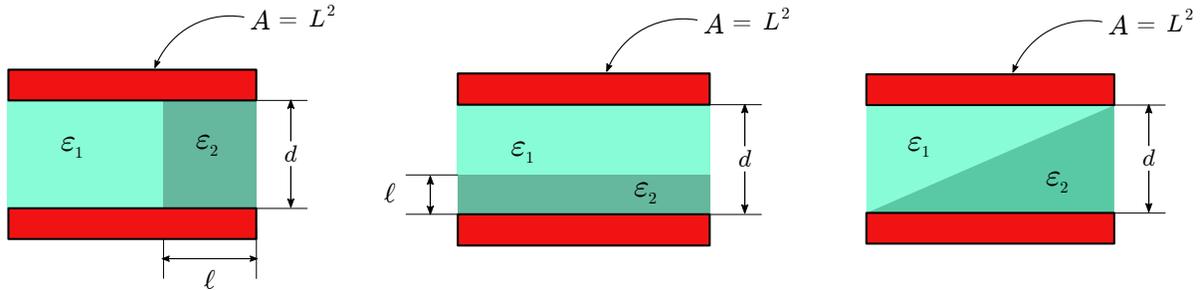
$$\Delta V = \|\vec{E}\| d = \frac{Q_\ell}{A \epsilon} d \quad \Longrightarrow \quad C = \epsilon \frac{A}{d} \quad \text{capacidad de un condensador plano}$$

Naturalmente, es el mismo resultado anterior. La capacidad depende de la geometría y del medio que llena el espacio entre placas.



Condensador plano con 2 materiales entre placas

Calcular capacidad de los condensadores planos indicados en las figuras.



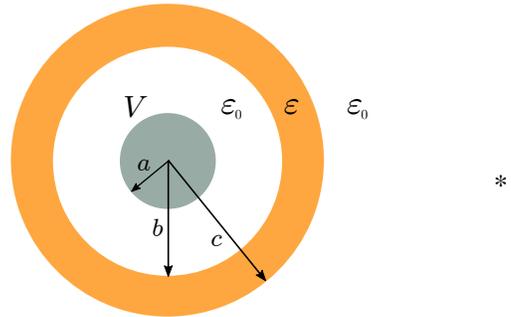
Cascarón aislante rodeando conductor

Se tiene un conductor de radio a y potencial eléctrico V (referido a un punto muy alejado de potencial nulo). El conductor está rodeado por medio esférico limitado por radios b y c , de constante dieléctrica ϵ . Calcular los campos eléctricos y las cargas de polarización.

* Calcular el vector desplazamiento.

Al desconocer la carga libre del conductor, no parece razonable intentar calcular \vec{D} . Sin embargo, si suponemos la existencia de una carga Q_ℓ distribuida en la superficie, se puede calcular \vec{D} en todo el espacio y después ajustar su valor al potencial V que se conoce. La simetría esférica del problema sugiere

$$\vec{D}(\vec{r}) = D(r) \hat{r} \implies D(r) = \frac{Q_\ell}{4\pi r^2} \quad \forall r \geq a$$



Calcular el campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q_\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & a < r < b \\ \frac{Q_\ell}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} & b < r < c \\ \frac{Q_\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r > c \end{cases}$$

* El potencial eléctrico en el conductor (para determinar Q_ℓ)

$$\begin{aligned} V(r=a) - V(\infty) \equiv V &= - \int_{\infty}^a \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{Q_\ell}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{\infty} \right] + \frac{Q_\ell}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right] + \frac{Q_\ell}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right] \end{aligned}$$

* Determinar Q_ℓ

$$Q_\ell = \frac{4\pi\epsilon_0 V}{\frac{1}{a} - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)}$$

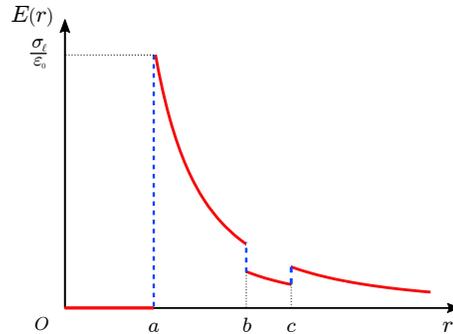
con lo cual el campo eléctrico queda determinado en función de los datos.

* Comportamiento del campo eléctrico

$E(r)$ es discontinuo en las superficies donde existe carga libre o de polarización.

En $r = a$, el campo nulo del conductor pasa a σ_ℓ/ϵ_0 .

En $r = b$, la carga de polarización debilita el campo para recuperar su intensidad en $r = c$.



* Densidades de cargas de polarización

en medio dieléctrico:
$$\vec{p}(\vec{r}) = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{Q_\ell}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r} \quad b < r < c$$

$$\Rightarrow \text{densidades de polarización} \begin{cases} \sigma_p(r=b) = \vec{p}(b) \cdot (-\hat{r}) = -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{Q_\ell}{4\pi\epsilon b^2} \\ \sigma_p(r=c) = \vec{p}(c) \cdot (\hat{r}) = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{Q_\ell}{4\pi\epsilon c^2} \\ \rho_p(r) = -\nabla \cdot \vec{p}(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$

* La carga de polarización total es, naturalmente, nula. La carga de polarización en cada superficie del dieléctrico son de igual magnitud pero distinto signo. En este problema no hay carga de polarización en el volumen del dieléctrico.

* Energía usada para polarizar el dieléctrico.

Corresponde a la diferencia de energía electrostática del sistema con medio aislante y sin él.

$$W_{\text{pol}} = W_{\text{diel}} - W_{\text{vacío}} = \frac{1}{2} [C_d - C_0] V^2$$

donde C_d es la capacidad del sistema con dieléctrico y C_0 sin él,

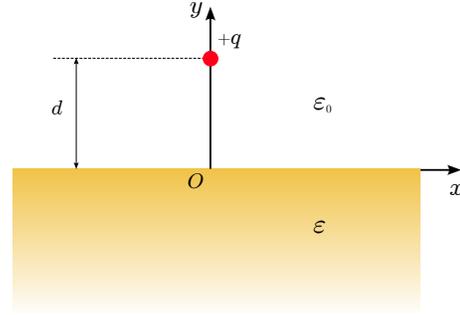
$$C_d = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)} \quad C_0 = 4\pi\epsilon_0 a$$

Compare $C_d \geq C_0$ (?) y tiene su respuesta.

Carga puntual frente a medio dieléctrico en semi-espacio

Una carga puntual en el aire se coloca a una distancia d frente a un medio dieléctrico lineal y uniforme, de permitividad ϵ constante, que ocupa el semiespacio $y \leq 0$. Se quiere conocer:

- La densidad de carga de polarización en la superficie $y = 0$ del medio.
- La fuerza (ζ atracción o repulsión?) entre la carga y el dieléctrico.



La física del problema es la siguiente: la carga eléctrica ubicada en $\vec{d} = d \hat{y}$ produce, en un punto cualquiera descrito por el vector posición \vec{r} , un campo eléctrico \vec{E}_0 ,

$$\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{d})}{\|\vec{r} - \vec{d}\|^3} \quad \longrightarrow \quad \vec{E}_0(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[x\hat{x} + (y-d)\hat{y}]}{[x^2 + (y-d)^2]^{3/2}} \quad (\text{en coordenadas cartesianas})$$

Por la simetría del problema, basta trabajar en el plano $\{x, y\}$ y los resultados son directamente extrapolables cambiando $x \rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Debido al campo \vec{E}_0 el medio se polariza. Ello significa una redistribución de la carga eléctrica ligada en el medio y la generación de un campo eléctrico \vec{E}_p asociado a la polarización del medio que modifica el campo original \vec{E}_0 que produce la carga eléctrica, tanto en el aire como en el dieléctrico,

$$\vec{E}_0(x, y) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{E}_a(x, y) = \vec{E}_0(x, y) + \vec{E}_p^{(+)}(x, y) \\ \vec{E}_d(x, y) = \vec{E}_0(x, y) + \vec{E}_p^{(-)}(x, y) \end{cases}$$

donde $\vec{E}_p^{(\pm)}$ representa el campo de polarización para $y \gtrless 0$.

Para un medio dieléctrico lineal y uniforme, el vector de polarización es $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_d$ y el campo eléctrico que produce es calculable a partir de las densidades de carga de polarización,

$$\vec{P} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{y} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_d(x, y=0) \cdot \hat{y} & (\hat{y} \text{ normal superficie dieléctrico}) \\ \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0 \end{cases}$$

Como se observa, los campos \vec{E}_a y \vec{E}_d dependen de la polarización \vec{P} del medio pero ésta, a su vez, depende del campo resultante \vec{E}_d en el dieléctrico. La condición de borde que deben satisfacer los campos en la interfaz aire-dieléctrico agrega una condición que resuelve el problema. En efecto, en la superficie de separación se debe conservar la componente normal del vector desplazamiento (no habiendo densidad de carga libre en ella),

$$\left[\vec{D}_a \cdot \hat{y} = \vec{D}_d \cdot \hat{y} \right]_{y=0} \quad \Longrightarrow \quad \left[\epsilon_0 \vec{E}_a \cdot \hat{y} = \epsilon \vec{E}_d \cdot \hat{y} \right]_{y=0} \quad \Longrightarrow \quad \left[(\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_0 \cdot \hat{y} = (\epsilon_0 \vec{E}_p^{(+)} - \epsilon \vec{E}_p^{(-)}) \cdot \hat{y} \right]_{y=0}$$

El cálculo de $\vec{E}_p^{(\pm)}$ es simple ya que sólo se requiere en el entorno a la superficie de separación ($y = 0^{(\pm)}$) y es producido por una densidad de carga superficial ubicada en el plano $y = 0$. Por teorema de Gauss,

$$\vec{E}_p^{(\pm)}(x, y=0) = \pm \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0} \hat{y} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_p^{(-)}(x, y=0) = -\vec{E}_p^{(+)}(x, y=0)$$

lo que permite determinar la densidad de carga de polarización σ_p ,

$$\left[(\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_0 \cdot \hat{y} = (\epsilon + \epsilon_0) \vec{E}_p^{(+)} \cdot \hat{y} \right]_{y=0} \implies \sigma_p(x) = - \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} q \right) \frac{d}{2\pi [x^2 + d^2]^{3/2}}$$

El resultado es interesante. La densidad de carga de polarización en la superficie del dieléctrico que la misma distribución, pero diferente magnitud, que la densidad de carga libre inducida en un plano conductor infinito conectado a tierra y frente a una carga $+q$ (ver pág. 47). Otras consecuencias de este resultado son:

- La carga de polarización total contenida en la superficie $y = 0$ del dieléctrico es

$$Q_p = \int_{\text{plano}} \sigma_p dS = - \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \right) q$$

- La fuerza que sobre la carga $+q$ ejerce el dieléctrico es

$$\vec{F}_q = +q \vec{E}_p(\vec{r} = d \hat{y}) \quad \text{con} \quad \vec{E}_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{plano}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \sigma_p(\vec{r}') dS'$$

Un breve cálculo conduce a

$$\vec{F}_q = \frac{q Q_p}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} \hat{y}$$

es decir, la fuerza sobre q es atractiva ($Q_p < 0$ para $q > 0$) y equivalente a la fuerza electrostática entre la carga libre q colocada en $y = d$ y la carga de polarización Q_p ubicada en $y = -d$.

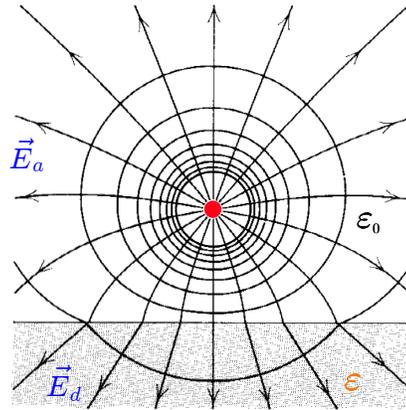
- La fuerza que sobre el dieléctrico ejerce la carga $+q$ es

$$\vec{F}_d = \int_{\text{plano}} \sigma_p(\vec{r}') \vec{E}_0(\vec{r}') dS' \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_d = -\vec{F}_q$$

resultado esperable al cumplirse la ley de acción y rea

- A partir de σ_p se pueden calcular los campos eléctricos $\vec{E}_p^{(\pm)}$ en cualquier punto del espacio debido a la polarización del medio. Con ello, se pueden determinar los campos resultantes \vec{E}_a en el aire y \vec{E}_d en el dieléctrico. Estos campos se muestran, cualitativamente en la figura adjunta.

Se distingue la deformación que sufre el campo en el aire, desde su valor \vec{E}_0 a \vec{E}_a , dejando de ser radial. Se deja como ejercicio demostrar que \vec{E}_a es la suma de los campos producidos por $+q$ en $y = d$ y la carga Q_p ubicada en $y = -d$.



Para el campo en la zona del dieléctrico, se puede demostrar que corresponde al campo eléctrico producido por una carga puntual efectiva Q_{ef} ,

$$Q_{ef} = +q + Q_p = \frac{2}{\epsilon_r + 1} q < q$$

ubicada en $y = d$. Por lo tanto, \vec{E}_d es un campo radial, de menor magnitud que el campo eléctrico en el vacío, tal como es esperable que ocurra en el material aislante.

3.3. Problemas

CD-1 (C1-2017P) Justifique sus respuestas brevemente y con claridad.

a) Dos esferas conductoras de radios distintos se conectan con un cable, y ambas tienen carga neta positiva. ¿Cuál de ellas tiene más carga?

- (i) La grande;
- (ii) La chica;
- (iii) Tienen la misma carga;
- (iv) La respuesta depende de como se cargaron las esferas.

b) Una cuerda cuelga de un clavo, y en cada extremo inferior se coloca una esfera no conductora, con la misma carga positiva cada esfera. Estas esferas están separadas un poco por su repulsión electrostática, y se encuentran en equilibrio. Si se coloca un plano conductor a potencial cero bajo las esferas, después de que todo el sistema alcance el equilibrio, las esferas:

- (i) Se acercaron entre ellas;
- (ii) Se alejaron entre ellas;
- (iii) Se mantienen iguales;
- (iv) No hay suficiente información.

c) Si un palo cargado se acerca a un globo conductor, y el globo es neutro:

¿el globo se atrae al palo, se repele, o no siente fuerza?

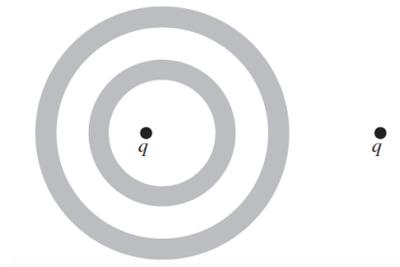
d) ¿Cuál(es) de los siguientes campos vectoriales representa un posible campo electrostático?

- (i) $\vec{E}(\vec{r}) = x\hat{x} - y\hat{y}$;
- (ii) $\vec{E}(\vec{r}) = y\hat{x} + x\hat{y}$;
- (iii) $\vec{E}(\vec{r}) = y\hat{x} - x\hat{y}$

CD-2 Las regiones sombreadas de la figura representan dos capas esféricas conductoras concéntricas neutras. Las regiones blancas representan vacío. Dos cargas puntuales q se ubican como se indica; la interna está descentrada.

a) Dibuje una imagen razonablemente precisa de las líneas de campo en todas partes e indique cualitativamente las diversas densidades de carga. ¿Qué cantidades tienen simetría esférica?

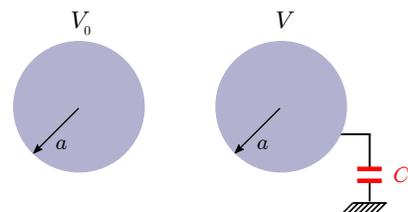
b) Repita las tareas anteriores en el caso en que las dos capas conductoras estén conectadas por un cable conductor para que tengan el mismo potencial.



CD-3 (C1-2021P) Una esfera conductora (ideal) de radio a (ver figura) se carga a potencial V_0 y se aísla. Posteriormente, se conecta a tierra por medio de un condensador de capacidad C .

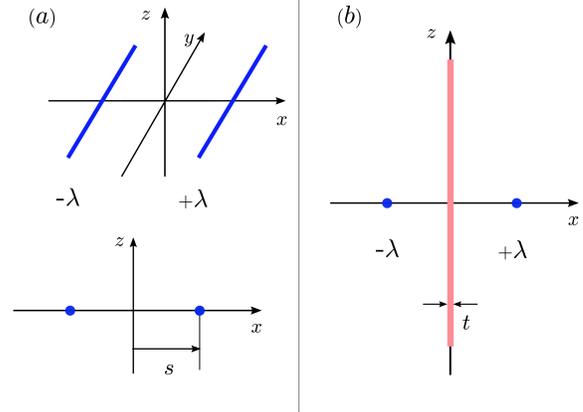
a) Calcular el potencial eléctrico final de la esfera y la carga en la esfera y el condensador.

b) ¿Cuánta energía se disipó al hacer la conexión a Tierra?



CD-4 (C1-2020P) Dos distribuciones uniformes de carga, muy largas y radio despreciable, se instalan paralelas a una distancia $2s$. Una de las distribuciones tiene una densidad lineal de carga $+\lambda$ [C/m] y la otra $-\lambda$ [C/m] como se indica en figura (a). El largo de las distribuciones es mucho mayor que s , de modo que pueden considerarse infinitamente largas para encontrar los campos eléctricos y potenciales.

- a) Calcular el campo eléctrico \vec{E} en un punto arbitrario del plano equidistante a ambas distribuciones
- b) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el plano?
- c) Coloque un plano conductor (∞) delgado (espesor $t \sim 0$) coincidiendo con el plano geométrico equidistante a las distribuciones, como se indica en figura (b). Indique, argumentando, si el modifica el campo eléctrico que las distribuciones producen en todo el espacio. ¿Hay una densidad de carga superficial inducida en el plano conductor? Calcúlela si su respuesta es positiva.



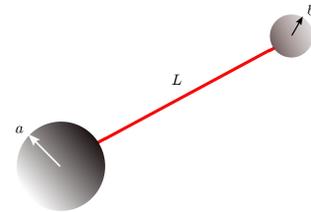
- d) Se conecta la distribución de carga $-\lambda$ al plano conductor a través de un alambre. Explique si algo ocurre: ¿cambia el campo y el potencial eléctrico en todo el espacio? Su evaluación dependerá de la calidad de sus argumentos.

Respuesta (pág. 213)

CD-5 (C1-2016P) Dos esferas conductoras, de radios a y b , se conectan por un alambre conductor de longitud L ($L \gg a, b$). Calcular la tensión en el alambre cuando una carga Q se distribuye entre las dos esferas.

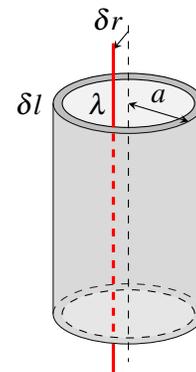
Comentario: se requiere un cálculo aproximado, a partir de la condición $L \gg a, b$. Explique sus aproximaciones.

Respuesta (pág. 213)



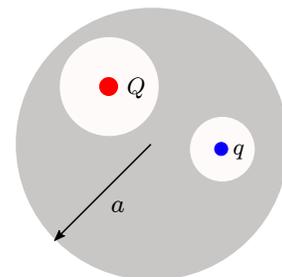
CD-6 Se tiene un cascarón cilíndrico conductor, de ancho δl y radio externo a . Dentro del cilindro hay un alambre de densidad de carga lineal λ , este alambre está desplazado una distancia δr del centro del cilindro.

- a) Encontrar las densidades de carga inducidas en el borde interno y externo del cascarón cilíndrico.
- b) Calcular el campo eléctrico para $r > a$, interprete.

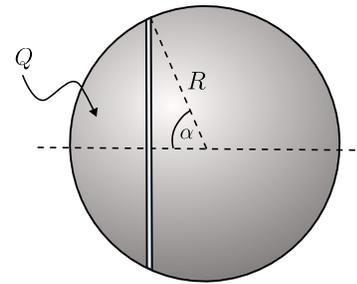


CD-7 (C1-2021P) Una esfera conductora (ideal) de radio a (ver figura) tiene dos cavidades esféricas. En el centro de dichas cavidades existen las cargas q y Q respectivamente.

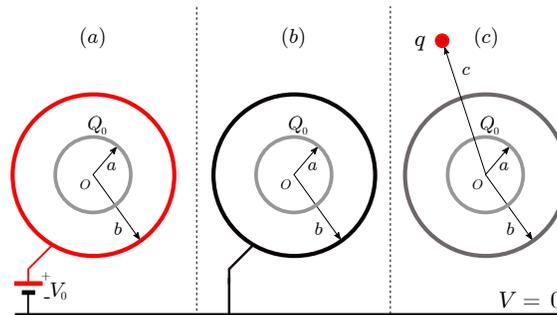
- a) Calcule la fuerza entre las cargas q y Q .
- b) La distribución de carga en la superficie de la esfera conductora es uniforme. Explique por qué debe ser así e indique su valor.
- c) ¿Cuál es el valor del potencial en la región externa de la esfera conductora ($r > a$)?



CD-8 (C1.1-2022P) Una esfera metálica sólida, de radio R y eléctricamente neutra, es separada en dos volúmenes haciendo un corte recto. El corte es realizado a través de un ángulo α ($\alpha \leq \pi/2$) del eje de la esfera, como se muestra en la figura. Las regiones cortadas son separadas por una película aislante de espesor despreciable, recuperando la forma esférica original. Posteriormente, al volumen pequeño se le da una carga Q , mientras que el volumen grande se mantiene neutro. Determine **todas** las densidades de carga presentes en el sistema cuando se haya establecido el equilibrio electrostático.



CD-9 (C1-2018P) Considere dos esferas conductoras huecas, concéntricas, de radios a y b ($b > a$) y espesor despreciable aunque finito. El conductor interior se carga con $Q_0 > 0$. Se supone que la tierra (considerada como potencial de referencia) está lo suficientemente alejada como para no perturbar lo que ocurre en los conductores.



a) El conductor externo se conecta a tierra a través de una batería que tiene una diferencia de potencial V_0 entre sus bornes (ver figura a).

- i) Calcular la carga inducida en las superficies interior y exterior de cada conductor.
- ii) Calcular el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.

iii) Calcular la función potencial eléctrico en todos los puntos del espacio y la diferencia de potencial entre los conductores.

b) El conductor externo se conecta directamente a tierra (ver figura b). Repita los cálculos anteriores.

c) Se desconecta el conductor externo de tierra y se acerca una carga $q > 0$ hasta una distancia $c > b$ desde el centro del sistema (ver figura c). Decida si la acción de la carga q modifica o no (con fundamentos):

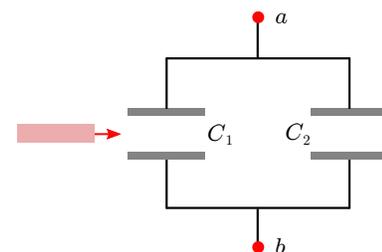
- i) la carga total de cada conductor;
- ii) la densidad de carga en ellos;
- iii) la función potencial en todo el espacio y la diferencia de potencial entre los conductores.

CD-10 (C1-2021P) Se tienen dos condensadores planos C_1 y C_2 como se indica en la figura, conectados a una batería que provee una diferencia de potencial eléctrico V entre los puntos a y b .

a) Se desconecta la batería.

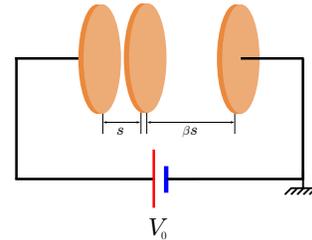
i) Calcular las cargas eléctricas en las placas de cada condensador y la diferencia de potencial entre las placas.

ii) Idem que en caso anterior, cuando se introduce una placa conductora plana en uno de los condensadores llenando la mitad del espacio entre sus placas.



- iii) ¿Hay una diferencia de energía electrostática almacenada entre ambas situaciones? Explique.
 b) La batería se mantiene conectada entre puntos a y b .
 Repita todos los cálculos y explicaciones de la parte (a).

CD-11 Se tienen tres monedas dispuestas con sus caras paralelas y muy próximas entre sí. La separación de dos caras contiguas es s y βs entre las otras dos. Las monedas de los extremos se someten a una diferencia de potencial V_0 mediante una batería (considere potencial nulo para la moneda del extremo derecho). Determinar el potencial de la moneda del centro y graficarlo como función de β .



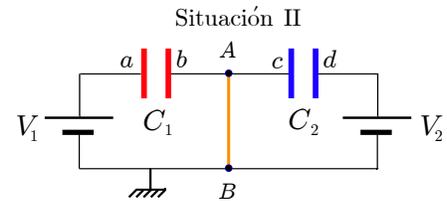
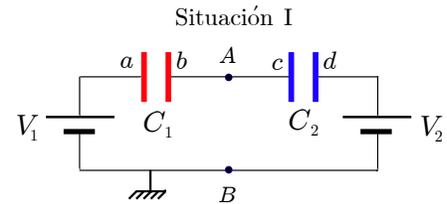
CD-12 (C1.5-2022P/1968) Se tienen dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 que se conectan a baterías con fuerza electromotriz V_1 y V_2 ($V_1 > V_2$), en las formas indicadas en las figuras (situaciones I y II). La línea AB representa un conductor ideal. Las respuestas a las preguntas siguientes deben justificarse para obtener puntaje.

En situación I:

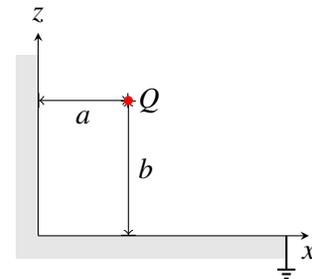
- a) indique el signo de la carga en cada una de las placas;
 b) calcule la carga en cada una de las placas.

En situación II:

- c) indique el signo de la carga en cada una de las placas;
 d) explique si a través del conductor AB se ha transferido o no carga eléctrica y, en caso afirmativo, en qué sentido se ha movido dicha carga ($A \rightarrow B$ o $B \rightarrow A$);
 e) calcule la carga en cada una de las placas.
 f) Si el conjunto se desconecta de tierra, variarían sus respuestas a las preguntas (a) \rightarrow (e) anteriores?



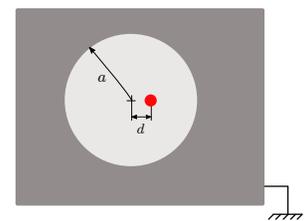
CD-13 Una carga puntual Q se localiza en el punto $(a, 0, b)$ entre dos semiplanos conductores perpendiculares entre sí, tal como se muestra en la figura de este problema. Calcule la densidad de carga superficial en cada semiplano conductor y la fuerza que experimenta la carga puntual.



CD-14 (C1-2017P) Una cavidad esférica, de radio a , se extrae de un bloque de metal conductor que se mantiene conectado a tierra. Una carga Q se coloca a una distancia d del centro de la cavidad.

Determine la densidad de carga superficial inducida en el conductor y la fuerza que se ejerce sobre la carga Q .

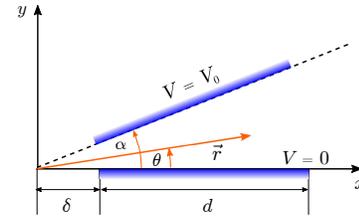
Respuesta (pág. 213)



CD-15 Dos placas conductoras cuadradas de lado d se ubican radialmente formando un ángulo α entre ellas. Uno de los extremos de ambas placas se encuentra a una distancia δ de la intersección entre los planos que las contienen. La separación entre ambas en el otro extremo es mucho menor que su longitud d .

Una de las placas se encuentra a potencial $V = 0$ y la otra a $V = V_0$. Encuentre:

- El campo eléctrico entre las placas.
- La densidad superficial de carga sobre las placas.
- La capacidad C del sistema.

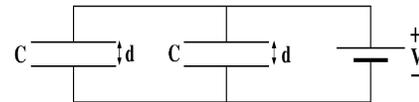


CD-16 (Examen-2020P) Dos condensadores con aire entre sus placas, cada uno con capacidad C , se conectan a una batería de voltaje V como se indica en figura. Las placas están separadas una distancia d . Expresar sus resultados en términos de los datos.

- ¿Cuál es la carga total en cada una de las placas?
- Indique el campo eléctrico (dirección y magnitud) entre las placas de cada condensador.

Sin hacer cambios (la batería permanece conectada), se llena el espacio entre placas del condensador a la izquierda con un dieléctrico de permitividad $\epsilon = 3\epsilon_0$.

- ¿Cuál es ahora la carga total en cada una de las placas (4 respuestas!)?
- Indique el campo eléctrico (dirección y magnitud) entre las placas de cada condensador.



CD-17 a) Dos planos paralelos que conforman un condensador de placas paralelas tienen una superficie S y separación $h \ll \sqrt{S}$. Encontrar la fuerza entre los planos en dos casos: El condensador aislado (como función de una carga Q constante) y el caso en que el condensador esté conectado a una fuente de voltaje V constante.

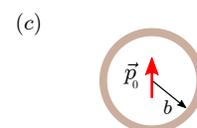
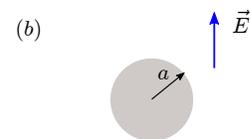
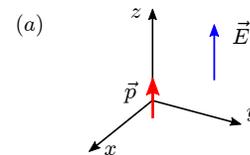
b) Se tiene una esfera conductora de radio a . Se pide encontrar la presión electrostática (fuerza por unidad de superficie) para los siguientes casos: la esfera tiene carga Q y está aislada; la esfera está conectada a una fuente de voltaje que la mantiene con un potencial V constante respecto al infinito.

CD-18 (C1-2021O) Un dipolo eléctrico \vec{p} se coloca en el origen de un sistema de referencia cartesiano, paralelo al eje z , en la presencia de un campo eléctrico uniforme \vec{E} , también paralelo al eje z (ver figura).

a) Determine el potencial electrostático total en un punto cualquiera, $V(\vec{r})$, con $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ su vector posición, tomando como referencia que el potencial es nulo en el plano $\{x, y\}$, es decir, $V_{\text{ref}}(x, y, 0) = 0$. Además del plano $\{x, y\}$, demuestre que hay otra superficie equipotencial de potencial nulo, la cual corresponde a una esfera y calcule su radio.

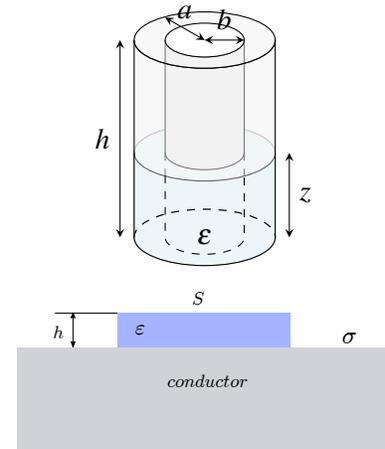
Usando el resultado de punto (a), encuentre el potencial eléctrico en todo el espacio para:

- una esfera conductora de radio a se coloca en un campo eléctrico uniforme \vec{E}_0 ;
- un dipolo \vec{p}_0 se coloca en el centro de una cáscara conductora esférica de radio b .



CD-19 Se tienen dos conductores cilíndricos concéntricos de radio a y b (con $a > b$) ambos de altura h . Entre los dos cilindros existe una diferencia de potencial V_0 constante.

Si al medio entre los cilindros (vacío inicialmente) se le agrega un material con constante dieléctrica ϵ_r hasta una altura z , calcule la fuerza sobre el material en función de su altura.



CD-20 (C2-2020P) Un bloque dieléctrico, de permitividad ϵ , espesor h y superficie $S \gg h$, está en contacto con una superficie plana conductora que tiene una densidad superficial de carga σ , uniforme, como se indica en figura. Efectos de borde son despreciables.

a) Calcular el campo eléctrico en todo el espacio.

b) Calcular las densidades superficiales de carga de polarización en las superficies del dieléctrico.

c) ¿Cómo cambian las respuestas para los casos a) y b) si el bloque dieléctrico se mueve una distancia $d < h$ desde el plano conductor? ¿Cómo depende de d la energía electrostática del sistema? ¿Hay una fuerza entre el bloque y el conductor?

Respuesta (pág. 213)

CD-21 (C2-2018P) Considere un una esfera conductora cargada, de radio a , rodeada de un medio aislante uniforme, de radio b ($b > a$) y permitividad ϵ . Para $r > b$ se tiene el vacío. Se conoce que el conductor tiene un potencial $V(r = a) = V_0$ y se ha elegido como referencia un potencial nulo en puntos lejanos ($V(\infty) = 0$). En la interfaz correspondiente a $r = b$, la carga libre es nula.

Determine la carga eléctrica libre total en la esfera conductora y la función potencial en todo el espacio.

CD-22 a) Considere una esfera de radio a con una polarización constante en una sola dirección \vec{P} , calcule el campo eléctrico en todo el espacio.

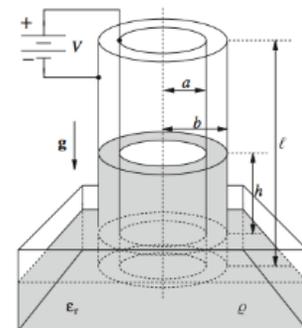
b) Luego a la misma esfera con polarización constante se le hace un agujero esférico concéntrico de radio $b < a$, encontrar el campo eléctrico en todo el espacio.

CD-23 (C2-2018P) La superficie de cierto material aislante, homogéneo e isótropo (constante dieléctrica ϵ_r), tiene una densidad de carga libre σ_f . El material está en contacto con el aire (ϵ_0).

Tomando como referencia la normal (\hat{n}) que define la superficie del medio, determinar el campo eléctrico, el vector desplazamiento y la polarización en puntos cercanos y a ambos lados de la superficie de separación. Comente la consistencia de sus resultados.

CD-24 Una forma interesante de medir la constante dieléctrica de un líquido es considerando la siguiente situación: Tenemos un condensador cilíndrico con radio interno a y radio externo b , con un largo $l \gg b$, así que los efectos de los extremos son despreciables. El eje del condensador es vertical y en su parte inferior está inmersa en un recipiente que contiene un líquido con densidad de masa ρ y permitividad eléctrica relativa $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, todo esto en presencia del campo gravitacional.

Cuando una fuente de voltaje mantiene una diferencia de potencial V entre los dos cascarones cilíndricos, el líquido sube una altura h en la zona intermedia del condensador. Mostrar que podemos evaluar ϵ_r a partir de obtener h .

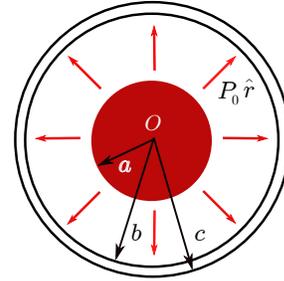


CD-25 (E4-2016P) Una esfera conductora maciza, de radio a , está encerrada por una cáscara conductora esférica de radio interior b y exterior c . Ambos conductores están descargados y aislados. El espacio entre ellos está lleno con un material que posee una polarización permanente $\vec{P} = P_0 \hat{r}$ (\hat{r} es la dirección radial).

a) Calcular las densidades de carga libre y de polarización que aparecen en las superficies esféricas $r = a$, $r = b$ y $r = c$. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los conductores?

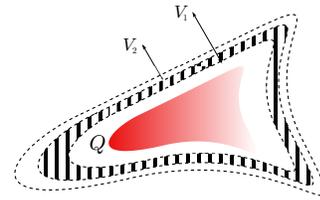
b) Ambos conductores se interconectan mediante un hilo metálico fino. Repita los cálculos de (a) en estas nuevas condiciones.

Respuesta (pág. 213)

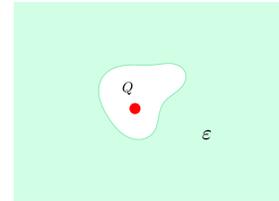


CD-26 (C2-2016P) Un conductor de forma arbitraria se encuentra cargado con Q . Las superficies equipotenciales (superficies de potencial eléctrico constante) que lo rodean se indican en la figura.

Si el espacio entre las superficies equipotenciales V_1 y V_2 se llena con un medio de permitividad eléctrica ϵ , calcular la energía gastada en polarizar el dieléctrico.



CD-27 Calcule la carga superficial de polarización inducida por una carga libre Q colocada al interior de un dieléctrico hueco, de permitividad eléctrica ϵ . Expresar resultado en función de la permitividad relativa (o constante dieléctrica) $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ del medio.



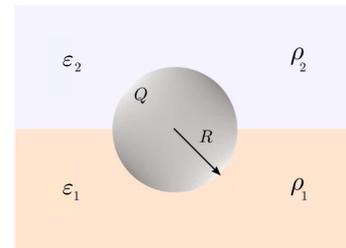
CD-28 En el centro de una cavidad esférica de radio a , practicada en un bloque de material dieléctrico de permitividad eléctrica ϵ , se coloca una carga puntual q . Calcule el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio. Demuestre que la suma de las cargas inducidas y la carga original es q/ϵ , independiente de a .

CD-29 Una esfera conductora de densidad de masa ρ y radio R flota en un líquido de densidad $\rho_1 > 2\rho$ y permitividad dieléctrica ϵ_1 en presencia de un campo gravitacional. Sobre este líquido hay un medio gaseoso con densidad de masa $\rho_2 \ll \rho$ con permitividad dieléctrica ϵ_2 . La esfera tiene carga Q tal que la mitad de su volumen se encuentra sumergida. Encuentre:

a) el campo eléctrico en todo el espacio, la densidad superficial de carga libre sobre la esfera y las densidades de carga de polarización en ambos dieléctricos;

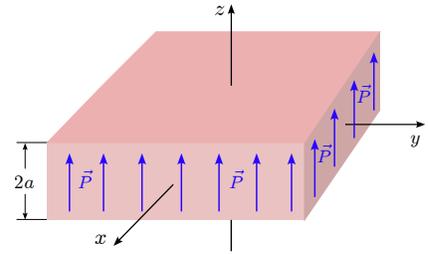
b) el valor de Q .

Respuesta (pág. 213)



CD-30 (C1.4-2022P) Una lámina dieléctrica de espesor $2a$ tiene extensión infinita en el plano $\{x, y\}$ y una polarización permanente $\vec{P} = P_0 \hat{z}$.

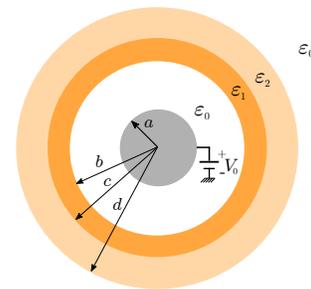
- ¿Densidades de carga de polarización σ_p y ρ_p ?
- Calcule el campo eléctrico y el vector desplazamiento en todo el espacio.
- Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio.



CD-31 (C2-2021O) Se dispone de la siguiente configuración: una esfera conductora (conductividad infinita) de radio a rodeada por dos cáscaras dieléctricas, concéntricas a la esfera central; la primera de permitividad ϵ_1 y limitada por los radios b y c y la segunda de permitividad ϵ_2 y ubicada entre los radios c y d .

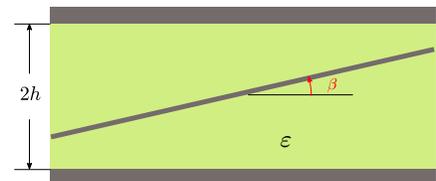
La esfera conductora se conecta a una batería que la mantiene a un potencial V_0 constante con respecto a infinito ($V(\infty) = 0$)

- Determine el campo y el potencial eléctrico en todo el espacio. Indique los detalles de su cálculo.
- Graficar la magnitud del campo eléctrico y el potencial eléctrico, como función de la distancia r al centro de la esfera conductora, indicando con claridad el valor que toman en los puntos relevantes (cambio de medio). Identifique si hay discontinuidades en el campo eléctrico y, en caso afirmativo, explique porqué ocurrirían. ¿Cómo explica el comportamiento del potencial eléctrico según sus comentarios previos?
- Considere dos situaciones iniciales diferentes: una, como en las preguntas previas, con el conductor conectado a un potencial constante V_0 ; la otra, dándole una carga Q_0 constante al conductor aislado. Calcule la energía eléctrica (W_e) almacenada por el sistema y compárela a aquella que se almacena cuando no existen los dieléctricos (W_{e0}). Indique si W_e es mayor, igual o menor que W_{e0} y porqué ocurre, para cada caso por separado.



CD-32 Se quiere estudiar el efecto que tendría insertar, en forma oblicua, una placa plana perfectamente conductora entre las placas planas de un condensador. El condensador tiene placas cuadradas de lados $a \times a$ separadas un distancia $2h$ ($h \ll a/2$), con la placa inferior conectada a un potencial $V = V_0$ mientras que la placa superior tiene un potencial $V = 0$. El material entre placas es un material dieléctrico de permitividad ϵ . El eje central de la placa oblicua es equidistante a cada placa paralela, formando un ángulo β con horizontal (figura). Despreciando efectos de borde, calcule

- la función potencial eléctrico entre las placas, los campos eléctricos y los vectores desplazamientos;
- las densidades superficiales de carga libre y de polarización;
- la capacidad del condensador con la placa oblicua en función de β .



CD-33 Una esfera conductora descargada de radio R y masa M flota sobre un líquido de permitividad eléctrica ϵ y densidad (de masa) ρ_ℓ , de modo que $3/4$ de su volumen está sumergido. Encontrar el potencial V_0 al que debe mantenerse la esfera para asegurar que la mitad de su volumen estará sumergido.

CD-34 Considere dos esferas conductoras (ideales), de radios a y b , que se cargan con cargas q_a y q_b respectivamente, y ubicadas a una distancia L entre sus centros ($L > a + b$)

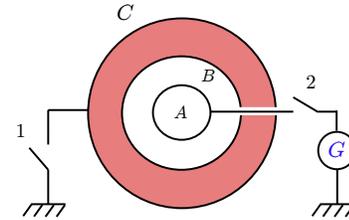
- Determine, en forma aproximada o exacta, la densidad de carga superficial en cada esfera.
- ¿Cuál es la fuerza electrostática entre ellas?

CD-35 Tres cascarones conductores esféricos concéntricos A, B y C tienen radios respectivamente $r_A = 3\text{ cm}$, $r_B = 6\text{ cm}$ y $r_C = 9\text{ cm}$. Entre los conductores B y C hay un dieléctrico caracterizado por una permitividad $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$, donde la susceptibilidad $\chi = (\beta r^3 - 1)$ y r es la distancia medida desde el centro (en cm) y $\beta = 0,01\text{ cm}^{-3}$. Una carga $Q_0 = 2\text{ }\mu\text{C}$ se coloca inicialmente en el conductor B, después se cierra el interruptor 1, dejando al conductor C conectado a tierra. Determinar:

- el potencial V_A del conductor A;
- las cargas de polarización presentes.

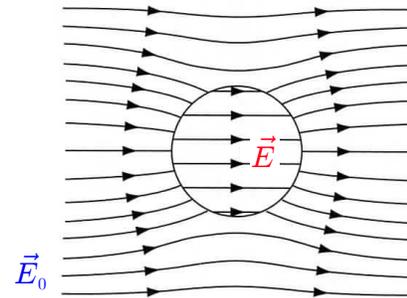
Luego, se abre el interruptor 1, el conductor A se conecta mediante un interruptor 2 a un generador que inyecta en A una carga Q_x y aumenta su potencial a $V'_A = 2V_A$. Determinar:

- las cargas presentes en los conductores A, B y C;
- el trabajo realizado por el generador.



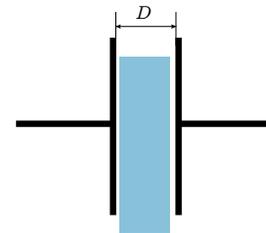
CD-36 Una esfera sólida, hecha de un material dieléctrico lineal e isotrópico, se coloca en una región del espacio con un campo eléctrico uniforme \vec{E}_0 .

Encuentre el campo eléctrico dentro de la esfera utilizando el siguiente método de aproximaciones sucesivas: primero, suponga que el campo dentro de la esfera es simplemente \vec{E}_0 , y con esto, obtenga la polarización asociada \vec{P}_0 . Esta polarización genera un campo \vec{E}_1 por sí sola, que modifica la polarización en una cantidad \vec{P}_1 , la cual modifica el campo en un monto \vec{E}_2 , y etcétera. El campo resultante es, por superposición, $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$. Podría tener que resolver alguna serie.



CD-37 Se tiene un condensador de placas planas separadas en D y superficie cuadrada de ancho a . Entre las placas se dispone una esponja dieléctrica (ϵ) de espesor D la cual oscila verticalmente con frecuencia angular ω . La masa de la esponja es M y la gravedad local es g .

Determine la carga del condensador.

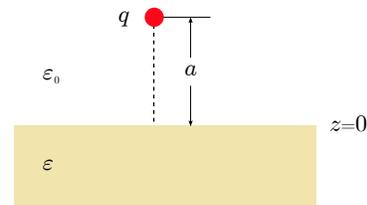


CD-38 En un material dieléctrico homogéneo e isotrópico (ϵ) hay una burbuja de aire (ϵ_0) de radio R . Muy lejos de la burbuja, el campo eléctrico es uniforme (\vec{E}_m).

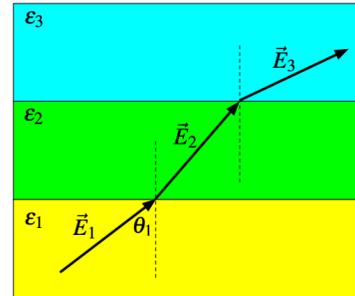
Calcule el campo eléctrico al interior de la burbuja.

CD-39 Una carga puntual q se ubica en el vacío, a una distancia a de la superficie plana de un material dieléctrico semi-infinito con permitividad ϵ , como muestra la figura.

Determine el potencial eléctrico en el vacío y en el material dieléctrico.



CD-40 Tres láminas dieléctricas de permitividades ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 están apiladas como muestra la figura. El campo eléctrico \vec{E}_1 forma un ángulo θ_1 con la normal en la interfase entre los medio 1 y 2. Suponga que los campos eléctricos permanecen constantes en magnitud y dirección al interior de cada medio.



a) Encuentre el ángulo θ_3 que forma un campo \vec{E}_3 con la normal cuando emerge en el medio 3. Suponga que no hay densidades de carga superficial libre en la interfase entre los medios dieléctricos.

b) Encuentre la densidad de carga superficial libre que habría que poner en la interfase entre los medios 2 y 3 para que el campo \vec{E}_3 sea paralelo a \vec{E}_1 .

CD-41 (C1.3-2022P) Se tienen dos planos conductores infinitos, paralelos al plano $\{y, z\}$ y ubicados en $x = \pm d$. El espacio entre ambos se llena con un material dieléctrico cuya permitividad depende de la posición,

$$\epsilon = \epsilon(x) = \frac{4\epsilon_0}{\left(\frac{x}{d}\right)^2 + 1},$$

con ϵ_0 la permitividad del vacío.

Al aplicar a los conductores un potencial $V(x = d) = V_0$ y $V(x = -d) = 0$, una densidad de carga σ aparece en las placas.

Calcule, en función de σ , ϵ_0 y d :

a) El campo eléctrico $\vec{E}(x)$ en la región entre placas y fuera de ellas ($-\infty \leq x \leq \infty$).

b) El potencial eléctrico $V(x)$ ($-\infty \leq x \leq \infty$).

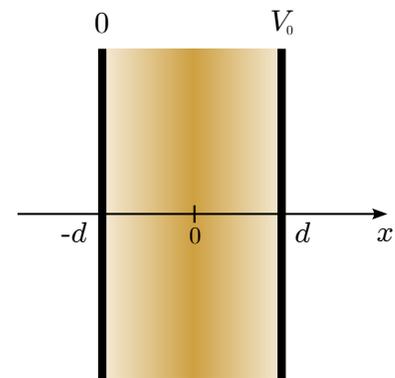
c) Calcule la densidad superficial σ en función de ϵ_0 , V_0 y d .

Si la polarización \vec{P} es proporcional al campo eléctrico \vec{E} , calcule en función de ϵ_0 , V_0 y d :

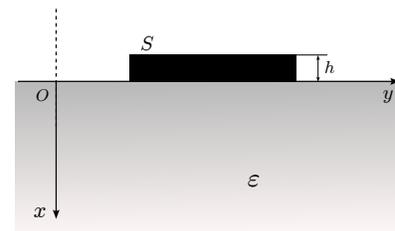
d) Las densidades de carga de polarización en volumen ρ_p y en superficie σ_p . ¿Qué relación tienen con σ ? Suponiendo que los planos son finitos de área A y despreciando los efectos de borde, calcule en función de ϵ_0 , V_0 , d y A :

e) La capacidad del sistema.

f) La fuerza entre las placas.



CD-42 (C1-2023P) Una placa conductora de superficie $A = a^2$ y espesor $h \ll a$ está en contacto con un material aislante de permitividad ϵ . El material tiene dimensiones mucho mayores que la placa, de manera que es razonable suponer que ocupa el semiespacio $x > 0$ donde se deposita la placa (ver figura). La placa conductora tiene una carga total (libre) Q y puede suponer despreciable los efectos de borde.



a) Considerando los casos en que la placa está en contacto con el dieléctrico y en que está desplazada en $\xi \ll a$ sobre el dieléctrico, encontrar las densidades superficiales de carga libre en ambas superficies de la placa, las densidades de carga de polarización en la superficie y el volumen del dieléctrico y el campo eléctrico en todo el espacio.

b) Calcule la fuerza electrostática que actúa sobre la placa conductora.

c) ¿Cómo cambian los resultados previos si el medio dieléctrico tiene un espesor finito d en la dirección x ?

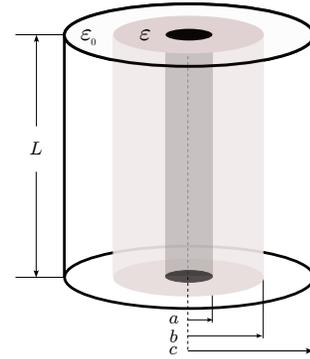
Respuesta (pág. 213)

CD-43 (C1-2023P) Se tiene un condensador cuyas placas conductoras son un cilindro interno de radio a y un casquete cilíndrico de radio c coaxial con el cilindro interior (ver figura). Ambas placas tienen un largo L . El condensador está parcialmente relleno con una lamina dieléctrica cilíndrica desde el radio a hasta b , con $a < b < c$, y cuya permitividad depende linealmente del radio,

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \frac{r}{\lambda}$$

donde λ es una constante con dimensiones de longitud. El resto del espacio entre las placas es vacío.

- Determine la capacitancia (capacidad) del condensador.
- Calcule el trabajo requerido para extraer el dieléctrico cuando el condensador se encuentra conectado a una batería que provee una diferencia de potencial V_0 entre las placas.



Corrientes eléctricas

4.1. Conceptos

4.1.1. Conducción eléctrica

Trata de la descripción del fenómeno asociado al movimiento de las cargas eléctricas en un medio.

cargas en movimiento \equiv Corriente eléctrica

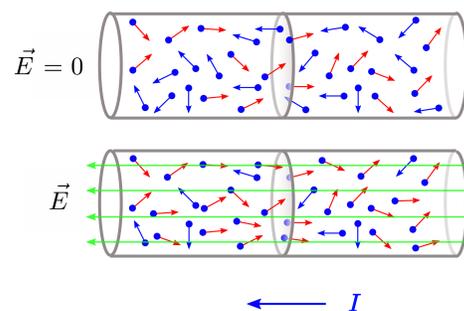
- Requerimientos para su existencia:
- * portadores de carga eléctrica
 - * fuente energía externa (\vec{E})

¿Portadores?

- principalmente electrones, en materiales conductores metálicos. Los protones en el núcleo de los átomos están fijos a la red cristalina que constituye el conductor.

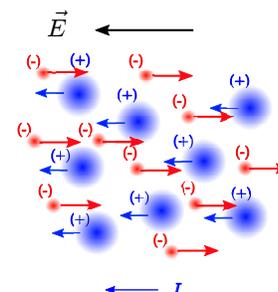
$\vec{E} = 0$ movimiento de electrones no genera una corriente neta en una sección dada;

$\vec{E} \neq 0$ movimiento resultante de carga en dirección contraria al campo (signo de electrones)



¿Otros portadores?

- iones, en sistemas biológicos, en fluidos (electrolitos) o gases ionizados
- agujeros (vacancia de un electrón), importantes en física de semiconductores (en componentes electrónicas como diodos, transistores, etc)



Conclusiones:

- * Movimiento de cargas desaparece si $\vec{E} = 0$
- * Movimiento neto en la dirección del \vec{E} : tanto carga positiva como carga negativa generan un traslado neto de carga en la misma dirección
- * **CONVENCIÓN:** la dirección de la corriente (del movimiento de cargas) corresponde a la dirección del movimiento de la carga eléctrica positiva (+).

4.1.2. Caracterización

Intensidad $I(t)$ de la corriente eléctrica es la medida de la cantidad de carga eléctrica en movimiento. Se define como la tasa de variación de la carga neta transportada en un punto del espacio por unidad de tiempo,

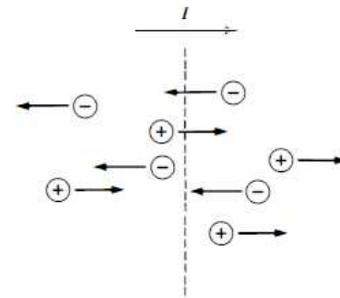
$$I(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

con $\Delta q(dq)$ el elemento infinitesimal de carga eléctrica neta en el punto. La corriente varía, en general, en el tiempo t .

En un conductor real, la definición de la corriente I corresponde a la carga neta que, por unidad de tiempo, pasa a través de una sección del material en un punto del espacio (ver figura). Para una corriente hacia la derecha,

$$dq = dq_+ (\text{der}) - dq_- (\text{iz})$$

donde $dq_+ (\text{der})$ es la carga de portadores positivos moviéndose hacia la derecha y $dq_- (\text{iz})$ es la carga de portadores negativos moviéndose hacia la izquierda. El resultado es que ambos portadores contribuyen a la corriente en un mismo sentido (der)

**Unidad de corriente eléctrica**

$$[I] = \frac{\text{carga}}{\text{tiempo}} = \frac{C}{s} \equiv A \text{ [Ampere]}$$

Ejemplo: calcular la corriente que se genera en los casos siguientes.

- Atomo de Hidrógeno

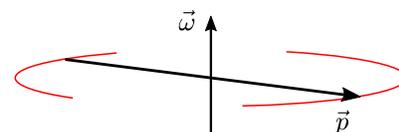
el electrón orbita alrededor del protón del núcleo (que permanece fijo aprox.) en un punto de la órbita, supuesta circular, pasa un electrón cada periodo $T = 2\pi/\omega$, con ω la frecuencia angular uniforme del movimiento; luego

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \rightarrow \quad I = \frac{|e|}{T} = \frac{|e|\omega}{2\pi}$$



Estime el valor de ω de sus conocimientos de Mecánica y la magnitud de la corriente.

- Dipolo eléctrico \vec{p} que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$. demuestre que $I = 0$



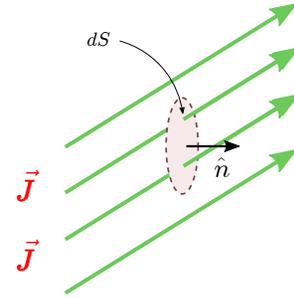
La intensidad de corriente I introducida previamente está definida en un punto del espacio. En términos más generales, se requiere definir la cantidad de carga eléctrica a través de una superficie en el espacio.

Densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r};t)$: si $d\vec{S}$ es un área infinitesimal en el punto \vec{r} del volumen, entonces $\vec{J}(\vec{r};t) \cdot d\vec{S}$ es la carga neta por unidad de tiempo que pasa a través de $d\vec{S}$,

$$dI(t) = \vec{J}(\vec{r};t) \cdot d\vec{S}$$

y la corriente (en general dependiente del tiempo) por una superficie S será,

$$I(t) = \int_S \vec{J}(\vec{r};t) \cdot d\vec{S} \quad d\vec{S} = dS \hat{n}$$



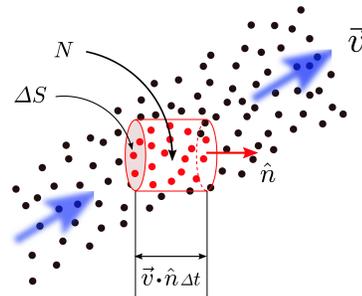
Unidades: $[J] \equiv \frac{[A]}{[L^2]} = \frac{\text{carga}}{\text{tiempo} \cdot \text{m}^2} = \frac{A}{\text{m}^2}$

Caso de interés físico especial:

- * - **Densidad de corriente para un conjunto de N partículas por unidad de volumen, cada partícula con carga q y velocidad \vec{v} .**

$$\vec{J} = Nq\vec{v} = \rho\vec{v}$$

donde $\rho = Nq$ es la densidad de carga del conjunto.



- * Se obtiene de calcular la corriente infinitesimal que atraviesa el elemento de superficie ΔS ,

$$\Delta I = \vec{J} \cdot \Delta \vec{S} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta q = Nq[\vec{v} \cdot \hat{n} \Delta t] \Delta S \\ \Delta q = Nq\vec{v} \cdot \Delta \vec{S} \Delta t \\ \implies \text{resultado esperado} \end{array} \right.$$

4.1.3. Ecuación de continuidad

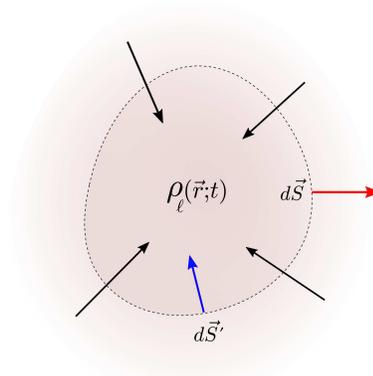
Es la manifestación matemática de la conservación de la carga eléctrica.

Considerar volumen de materia, con una densidad de carga libre que varía en el tiempo (y el espacio) debido a que entra o sale carga a través de la superficie S que la encierra.

- Suponer que aumenta la carga encerrada en S ($\frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} > 0$)
- La corriente que entra al volumen encerrado por S será

$$I = \oint_S \vec{J}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{S}' = - \oint_S \vec{J}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{S} = \frac{dq_\ell}{dt}$$

$$\Rightarrow - \int_{V(S)} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}; t) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(S)} \rho_\ell(\vec{r}; t) dV$$



Ecuación de continuidad: $\forall V \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}; t) + \frac{\partial \rho_\ell(\vec{r}; t)}{\partial t} = 0$

* **Regimen estacionario** (no hay variación temporal de la carga)

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{no hay fuente o sumidero de carga})$$

4.2. Conducción en medios materiales

4.2.1. Conducción metálica (ley de Ohm)

En un material buen conductor se encuentra, empíricamente, que la densidad de corriente es aproximadamente proporcional al campo eléctrico en el medio,

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E} = \frac{1}{\rho_c} \vec{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_c \equiv \text{conductividad del material} \quad \left[\frac{S}{m} \right] \quad S \equiv \text{Siemens} \\ \rho_c \equiv \text{resistividad del material} \quad \left[\Omega m \right] \quad \Omega \equiv \text{Ohm} \end{array} \right.$$

La relación mostrada es válida para un gran número de materiales conductores comunes. En general, la relación entre densidad de corriente y el campo eléctrico es

$$\vec{J} = \sigma_c(\vec{E}) \vec{E}$$

con la magnitud de la conductividad dependiendo del campo aplicado.

La conductividad es el inverso de la resistividad y vice-versa. Se ha introducido $[\Omega] \equiv \text{Ohm}$ que corresponde a la unidad en que se expresa la resistencia eléctrica de un medio (a la circulación de corriente). La unidad $[S]$ es el recíproco del Ohm.

Físicamente, la conductividad eléctrica se relaciona con las fuerzas de roce viscoso (colisiones) que experimentan los electrones en su tránsito a través del medio cuando un campo externo es aplicado. Un modelo mecánico del transporte de carga a través del material indica que, para fuerzas viscosas del tipo $\vec{F}_R^{(vis)} = -\kappa_{vis} \vec{v}$, la conductividad eléctrica es una medida de la velocidad de arrastre de los electrones en el medio,

$$v_{\text{arras}} = \frac{|e|}{\kappa_{vis}} \|\vec{E}\| \quad \longrightarrow \quad \sigma_c = N \frac{|e|^2}{\kappa_{vis}}$$

donde $|e|$ es la magnitud de la carga eléctrica del electrón y N es la densidad electrónica en volumen de electrones casi libres en el medio conductor.

Algunos números:	conductor ideal	$\sigma_c \rightarrow \infty$	$\rho_c \rightarrow 0$
	buen conductor	$\sigma_c \sim 10^8 \left[\frac{S}{m} \right]$	
	buen dieléctrico	$\sigma_c \sim 10^{-15} \left[\frac{S}{m} \right]$	
	dieléctrico ideal	$\sigma_c \rightarrow 0$	$\rho_c \rightarrow \infty$

Tabla de conductividades eléctricas a 20°C
(Science Notes)

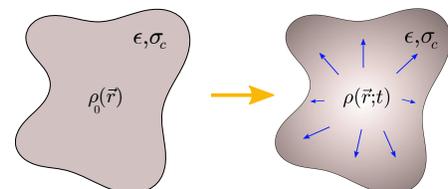
	material	conductividad $\sigma_c \left[\frac{S}{m} \right]$
Conductor	Plata	$6,30 \times 10^7$
	Cobre	$5,96 \times 10^7$
	Oro	$4,10 \times 10^7$
	Aluminio	$3,50 \times 10^7$
	Tungsteno	$1,79 \times 10^7$
	Litio	$1,08 \times 10^7$
	Platino	$9,43 \times 10^6$
	Acero	$1,45 \times 10^6$
	Agua de mar	4,8
	Agua de beber	5×10^{-4} a 5×10^{-2}
Semiconductor	Germanio	2,17
	Silicio (puro)	$1,56 \times 10^{-3}$
Dieléctrico	Madera (húmeda)	10^{-4} a 10^{-3}
	Madera (seca al horno)	10^{-16} a 10^{-14}
	Vidrio	10^{-11} a 10^{-15}
	Aire	3×10^{-15} a 8×10^{-15}
	Teflón	10^{-25} a 10^{-23}

4.2.2. Tiempo de relajación

Considerar un medio caracterizado por una conductividad σ_c y una permitividad ϵ .

Interesa conocer como evoluciona, en el tiempo, una densidad volumétrica de carga $\rho_0(\vec{r})$ que se coloca en el volumen del material. En el caso límite de un medio conductor perfecto (o ideal), se espera que la carga volumétrica desaparezca rápidamente y se distribuya en la superficie del medio y tal que el campo eléctrico interior sea nulo. ¿Es, en realidad, cierto?

- $\rho(\vec{r};t) \longrightarrow \vec{E}(\vec{r};t) \longrightarrow \vec{J}(\vec{r};t)$
- en el medio,

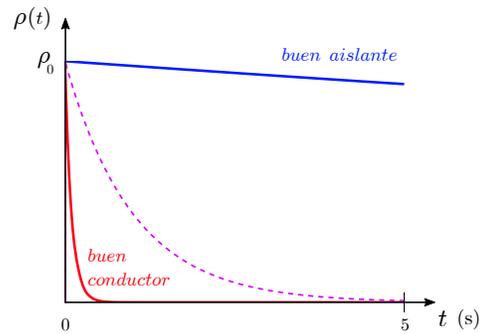


$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_\ell \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{J} &= \sigma_c \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{solución: } \rho(\vec{r}; t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma_c} \equiv \text{tiempo de relajación del medio}$$

Evolución de la carga en un medio conductor

El comportamiento eléctrico de un medio que se carga con una densidad de carga volumétrica ρ_0 dependerá de la naturaleza onductora o aislante que tiene. Para una σ_c alta, el tiempo de relajación τ del material tiende a 0 y la carga eléctrica migra rápidamente desde el volumen del cuerpo a su superficie. Si la conductividad es pequeña, $\tau \rightarrow \infty$ y la carga puede tomar un tiempo considerable en migrar a la superficie.



Para pensar: el campo eléctrico externo al medio, ¿se modifica durante la migración de la carga?

Conductor (ideal) inmerso en medio conductor

Considerar un conductor perfecto, que inicialmente está cargado con la carga libre Q_0 distribuida en forma de una densidad de carga superficial σ_0 , inmerso en un medio de conductividad σ_c y permitividad ε . Interesa conocer como evoluciona la carga libre en el conductor ideal, $Q(t)$, a partir de $Q(0) = Q_0$. ¿Qué ocurre?

La carga del conductor genera un campo eléctrico, el cual permite la existencia de una densidad de corriente que transporta carga desde el conductor al medio, alejándose hacia el infinito.

$$\oint_{S(V)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{1}{\tau} \vec{D}$$

$\sigma_c/\varepsilon = 1/\tau$, el tiempo de relajación en el medio.

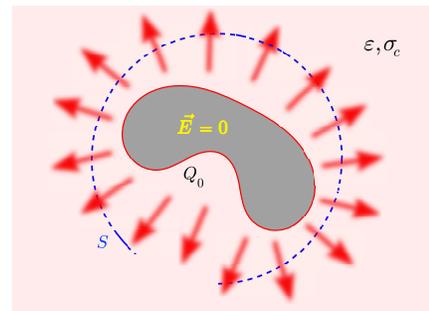
La ecuación de continuidad establece

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{D} + \tau \frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} = 0$$

Integrando en el volumen V encerrado por S se concluye

$$Q(t) + \tau \frac{dQ(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$$

El conductor se descarga hacia el medio que lo rodea. Ocurre rápida o lentamente dependiendo de τ .

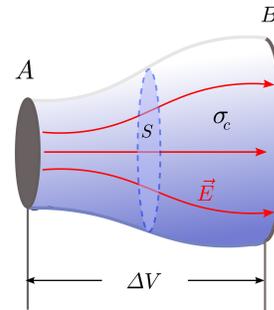


4.2.3. Resistencia eléctrica

Considerar un material conductor de conductividad σ_c y geometría conocida.

- Se aplica una diferencia de potencial ΔV (provista por una fuente externa de energía) entre los planos A y B que limitan al conductor (A y B podrían ser puntos entre los cuales se aplica la diferencia de potencial). Existe, entonces, un campo \vec{E} entre los extremos del conductor y una densidad de corriente \vec{J} fluye de A a B ,

$$\left. \begin{aligned} \Delta V \equiv V_A - V_B &= - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ I &= \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta V \sim$$



- Resistencia (R):

$$R = \frac{\Delta V}{I} \quad (\text{Ley de Ohm})$$

mide la relación que se establece entre la diferencia de potencial aplicada entre dos puntos A y B y la corriente que circula entre ellos. La resistencia es independiente de la condición eléctrica: depende sólo del material conductor y la geometría del objeto.

Formalmente, la resistencia de un objeto conductor se calcula a partir de:

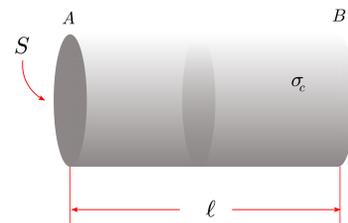
$$R = \frac{1}{\sigma_c} \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

- Unidades:

$$[R] = \frac{[V]}{[I]} = \frac{V}{A} = [\Omega] \equiv \text{Ohm} \quad \Rightarrow \quad [\sigma_c] = \frac{1}{\Omega \text{m}}$$

- Resistencia de conductor lineal
(largo ℓ , sección S , conductividad σ_c)

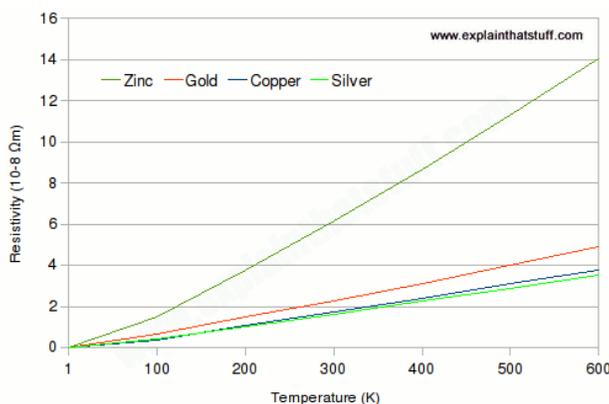
$$\left. \begin{aligned} \Delta V \equiv V_A - V_B &= \|\vec{E}\| \ell \\ I &= \sigma_c \|\vec{E}\| S \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\ell}{\sigma_c S} = \rho_c \frac{\ell}{S}$$



- Resistencia y temperatura

La resistencia de un conductor depende de la temperatura del material conductor.

El aumento de temperatura de una red cristalina (el material) significa un incremento de la energía cinética de los portadores de carga, aumentando su movimiento y haciendo más difícil para los electrones desplazarse a través del medio. Ello se traduce en un aumento de la resistencia eléctrica del material.

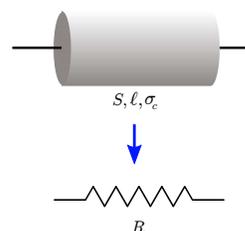


Así como la resistencia aumenta con la temperatura, también disminuye cuando ésta disminuye. Hay materiales para los cuales la resistividad desaparece a temperatura muy bajas (pocos grados Kelvin): materiales **superconductores**. A través del tiempo, el diseño de materiales más elaborados ha permitido obtener superconductividad a temperaturas del orden de 100° K. Recientemente se ha obtenido un superconductor a **temperatura ambiente** (pero bajo presiones del orden de 270 gigapascales).

- Conexión de resistencias

Resistencias son parte integral de todo tipo de circuitos eléctricos y electrónicos.

Genéricamente, el dispositivo físico tiene la representación indicada en figura. Las características materiales y geométricas quedan representadas por el valor R .

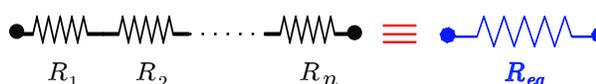


Resistencias equivalentes

- Resistencias en serie

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$$

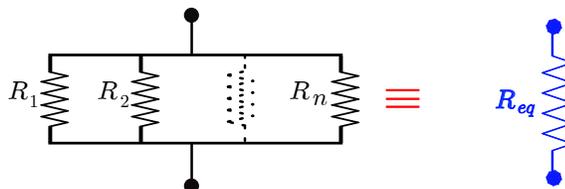
Resistencias en serie



- Resistencias en paralelo

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

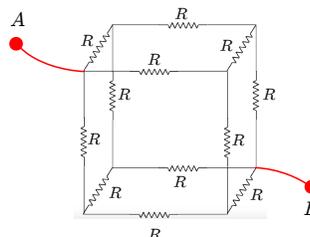
Resistencias en paralelo



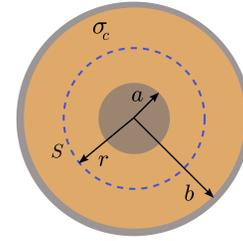
4.2.4. Ejemplos

* La figura muestra 12 resistencias, cada una de valor R [Ω], ordenadas según las aristas de un cubo.

¿Cuál es la resistencia entre las esquinas opuestas A y B del cubo?



* Considere 2 esferas conductoras concéntricas, de radios a y b . El medio entre las esferas tiene una conductividad σ_c . Interesa conocer la resistencia entre la esfera conductora central y el casquete exterior.



La resistencia buscada es aquella que limita el paso de la corriente desde la esfera interior al casquete externo (o viceversa) para una diferencia de potencia entre ambas.

- Suponer que la esfera interior tiene un potencial V y el casquete está conectado a tierra. De sus conocimientos de Electrostatica puede calcular el campo eléctrico entre las esferas,

$$\vec{E} = V \frac{ab}{b-a} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad a \leq r \leq b$$

- La densidad de corriente en el medio permite calcular la corriente total (a través de una esfera de radio $a < r < b$) que fluye desde conductor interior al casquete.

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E} \quad \implies \quad I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sigma_c V \frac{4\pi ab}{b-a} \quad R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sigma_c} \frac{b-a}{4\pi ab}$$

4.2.5. Disipación de energía en conductores

Los portadores de carga (electrones) en un medio conductor tienden a perder energía cinética en su movimiento a través del material, por colisiones con estructuras y otros portadores presentes (calor). Para mantener una corriente, la fuente externa (batería) debe proveer suficiente energía para compensar por las pérdidas en el medio.

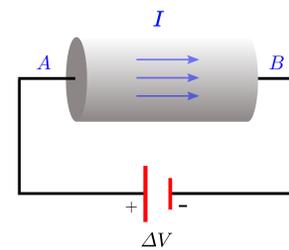
La medida de esa energía disipada en forma de calor en un conductor es el **efecto Joule**.

- Conductor conectado a una batería externa $\implies \Delta V$.

- Trabajo infinitesimal a realizar (por fuente) para transportar un elemento de carga δq de A a B

$$\delta W = \delta q \Delta V$$

- Por unidad de tiempo, podemos calcular la potencia P disipada en conductor (calor)



$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta W}{\delta t} \equiv P = \Delta V \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta q}{\delta t} \implies P = I \Delta V$$

cuando está sometido a una diferencia de potencial ΔV y circula una corriente I .

En conductor lineal

$$\Delta V = RI \quad \implies \quad P = I \Delta V = RI^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

Caso general

Para un medio de conductividad σ_c conocida, donde existe un gradiente de potencial eléctrico, la potencia disipada en el medio puede calcular a partir de (**demostrar!!**)

$$P = \int_{V \text{ medio}} \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

con \vec{E} el campo eléctrico en el medio y \vec{J} la densidad de corriente.

Unidades

$$[P] = \left[\frac{J}{s} \right] \equiv \text{Watt} = [W] = [VA]$$

Energía total disipada en un intervalo $[t_0, t]$:

$$W_{[t_0, t]} = \int_{t_0}^t P(t') dt'$$

4.2.6. Condiciones de borde

En estudio de corrientes eléctricas, hay que garantizar el correcto comportamiento de las densidades de corriente al pasar de un medio a otro de características conductoras y aislantes diferentes. Las condiciones a satisfacer son:

- las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico y el vector desplazamiento

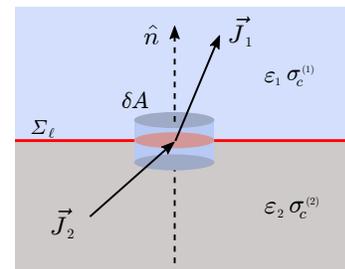
$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} D_{1n} - D_{2n} = \Sigma_\ell \quad \text{discontinuidad en la componente normal de } \vec{D} \\ E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad \text{continuidad en la componente tangencial de } \vec{E} \end{array}$$

según figura adjunta. Se supone la existencia de una densidad superficial de carga libre Σ_ℓ en la superficie de separación.

- la ecuación de continuidad (regimen estacionario)

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{1n} - J_{2n} = 0$$

es decir, se conserva la componente normal de la densidad de corriente al cambiar de medio.



Comportamiento de \vec{J} en interfaz entre medios

Análisis

- Suponer que no existe densidad de carga libre en superficie de separación ($\Sigma_\ell = 0$)

$$\Rightarrow \quad D_{1n} = D_{2n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\epsilon_1}{\sigma_c^{(1)}} J_{1n} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_c^{(2)}} J_{2n} \quad ?$$

Esta relación difícilmente se cumple, al ser iguales las componentes normales de la densidad de corriente.

- Debe existir una densidad superficial de carga libre Σ_ℓ .

Llamando $J_{1n} = J_{2n} \equiv J_n$

$$\Sigma_\ell = \left[\frac{\epsilon_1}{\sigma_c^{(1)}} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_c^{(2)}} \right] J_n$$

para satisfacer las condiciones de borde en superficie de separación.

- ¿Qué ocurre con las componentes tangenciales de \vec{J} ?

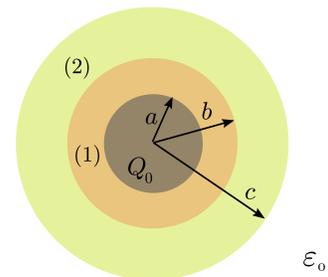
La conservación de las componentes tangenciales del campo eléctrico en la superficie de separación significa

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \implies \quad \frac{J_{1t}}{\sigma_c^{(1)}} = \frac{J_{2t}}{\sigma_c^{(2)}} \quad \implies \quad J_{1t} \neq J_{2t} \quad \text{no se conserva}$$

resultado que permite concluir que $\nabla \times \vec{J} \neq 0$.

Ejemplo:

Una esfera conductora (perfecta) de radio a está cargada inicialmente con Q_0 . Se encuentra rodeada de un medio (1) esférico de radio b , conductividad $\sigma_c^{(1)}$ y permitividad ϵ_1 , ambas constantes. Rodeando al medio (1) hay un medio (2) de radio c , conductividad $\sigma_c^{(2)}$ y permitividad ϵ_2 , también constantes. Más allá del medio (2) hay vacío.



Interesa conocer como se descarga la esfera conductora en el tiempo. Se sugiere,

- estudiar la evolución de la carga libre en cada una de las superficie del problema y graficar (esquemáticamente) su comportamiento en el tiempo;
- estudiar las cargas de polarización en cada medio;
- calcular el campo eléctrico en todo el espacio;
- describir la situación estacionaria que alcanza el sistema. ¿Cuánta energía se disipó?

4.3. Fuerza electromotriz (fem)

Es el nombre genérico asignado a una fuente externa que provee energía a un sistema electromagnético para su funcionamiento. Usualmente la fem tiene la función de compensar las pérdidas energéticas que ocurren en conductores y así mantener corrientes en circulación. En otras situaciones, transfiere energía a un dispositivo eléctrico y esa energía es almacenada por él en forma de energía electrostática (por ejemplo, cargar un condensador) por su posterior utilización.

Problema:

Un campo electrostático \vec{E} no puede mantener una corriente en una trayectoria cerrada C .

$$\text{razón:} \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \implies \quad \text{no hay movimiento resultante de carga en } C$$

Una solución

Considerar puntos A y B de la trayectoria cerrada y expresar

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

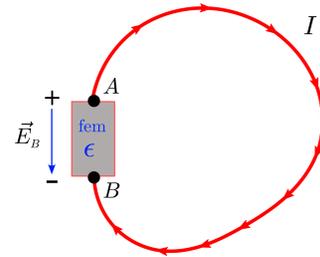
donde se han explicitado 2 caminos para la integral de línea, $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow A$.

La idea de la fuerza electromotriz **fem** es modificar el campo electrostático en un segmento de la trayectoria cerrada para cambiar su naturaleza conservativa,

$$\vec{E} \longrightarrow \vec{E}_B \quad \text{en tramo } B \rightarrow A$$

con \vec{E}_B un campo eléctrico que actúa como fuente y de origen ajeno al campo electrostático \vec{E} responsable del movimiento de cargas en los conductores. Se define:

$$\text{fem} \equiv \mathcal{E} = \int_A^B \vec{E}_B \cdot d\vec{r}$$



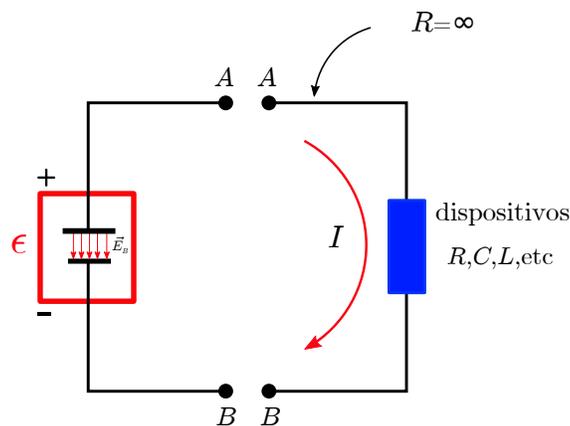
que corresponde a la diferencia de potencial entre A y B, $\mathcal{E} = [V_A - V_B]_{\text{fuente}}$.

Conclusión:
$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = [V_A - V_B]_{\text{circuito}} = [V_A - V_B]_{\text{fuente}} = \mathcal{E}$$

Representación de un sistema eléctrico

Esquemáticamente, en un sistema eléctrico distinguimos,

$$\text{Sistema} \implies \begin{cases} \text{Fuente} & \equiv \text{batería, condensador cargado, inducción, etc} \\ \text{Carga de sistema} & \equiv \text{Resistencias, Condensadores, Inductancias, etc} \end{cases}$$



Ejemplos de fuentes externas

Las fuentes de energía externa o fuentes de fem son de variada índole.

- **Baterías**

Son dispositivos que, conceptualmente, tienen un medio entre sus placas que permite, mediante una reacción química, reponer la carga en las placas y mantener constante la diferencia de potencial.

Finalmente, la capacidad de funcionamiento (mover carga eléctrica) de esta fuente dependerá de la energía almacenada entre sus placas.

- **Condensador cargado**

Puede actuar como fuente ya que tiene una cierta cantidad de energía inicialmente almacenada. La diferencia de potencial entre las placas permite que una corriente circule por la resistencia conectada a él. Pero, debido al transporte de carga de una placa a la otra del condensador (y las consiguientes pérdidas Joule), la diferencia de potencial inicial entre las placas disminuye hasta que finalmente la fuente se descarga.

- **Fenómeno de inducción electromagnética** Lo discutiremos en detalle más adelante. Básicamente, la variación temporal de un flujo magnético enlazado por una superficie genera un campo eléctrico, y por consiguiente una fem, en la trayectoria que encierra a la superficie.

Batería real

El papel de una batería es algo más complicado que el planteado previamente. Ello es producto del hecho que la batería está hecha de elementos conductores (placas, conectores, etc) que se representan por una resistencia interna (r_i) a la circulación de la corriente. El efecto resultante es que el potencial entre los bornes de la batería es diferente a la fem propia de la batería.

Considerar esquema de batería que alimenta una resistencia R :

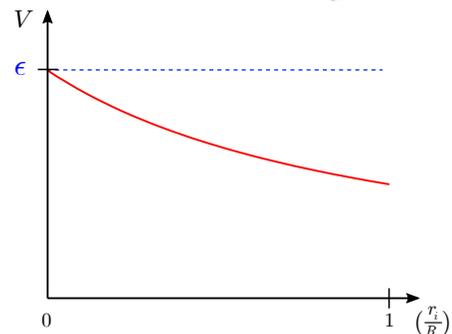
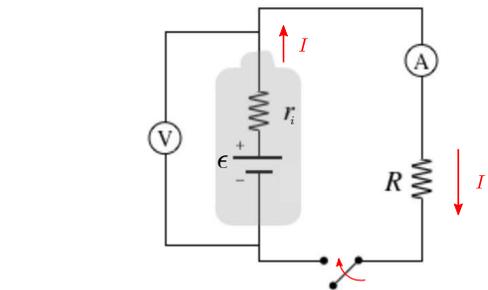
- Corriente I que circula

$$I = \frac{1}{R + r_i} \epsilon$$

- Diferencia de potencial V entre los bornes de batería

$$V = \epsilon - r_i I = \frac{R}{R + r_i} \epsilon < \epsilon$$

Cuanto mayor es la carga R disminuye el efecto de la resistencia interna y $V \rightarrow \epsilon$. El efecto se ilustra en la figura adjunta, donde se presenta una comparación entre diferencia de potencial que suministra una batería real y la fem en función de la razón entre la resistencia interna de la fuente y la resistencia de carga.

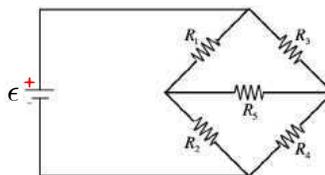


4.4. Redes eléctricas

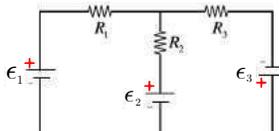
La conexión eléctrica de fuentes de energía (baterías) y dispositivos (resistencias, condensadores, etc) forman los circuitos eléctricos.

Podemos identificar circuitos de diferentes características (por ahora).

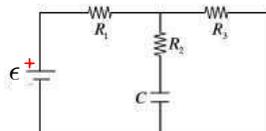
circuito resistivo



circuito varias baterías



circuito con resistencias y condensadores



En todo circuito identificamos:

- * **rama:** elemento del circuito que incluye un dispositivo o una fuente;
- * **nodo:** punto de encuentro de 2 o más ramas;
- * **mall:** trayectoria cerrada en un circuito.

Leyes de Kirchoff

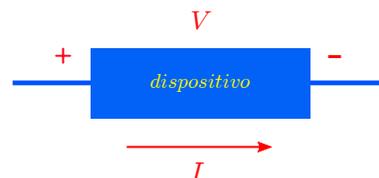
son las reglas fundamentales que gobiernan las redes (o circuitos) eléctricas. Son manifestación de propiedades básicas del fenómeno eléctrico.

* Ley de nudo $\implies \sum_k I_k = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{suma de corrientes que} \\ \text{concurren a un nodo es nula} \end{array} \right.$

* Ley de malla $\implies \sum_k [V_k - \epsilon_k] = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{suma de caídas de potencial en cada rama} \\ \text{de una trayectoria más las presentes en las} \\ \text{fem existentes en la trayectoria es nula} \end{array} \right.$

Análisis de circuitos

Convención: una corriente I por un elemento de circuito, en un sentido dado, produce una caída (bajada) de potencial V en el mismo elemento - corriente circula de punto de (+) \rightarrow (-) potencial.



En una fem, si I viaja de (-) \rightarrow (+), se tiene una subida de potencial ($-\epsilon$).

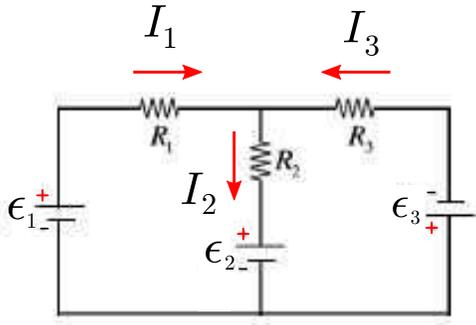
$V=RI$ en resistencia R
 $V=Q/C$ en condensador C

Ecuaciones independientes

Si $n + 1 =$ número de nodos $\implies n$ ecuaciones independientes de nodo
 Si $r =$ número de ramas $\implies m = r - n$ ecuaciones independientes de malla

Circuitos de corriente continua (estacionarios)

Corresponden a circuitos eléctricos puramente resistivos, formados sólo por resistencias conectadas en diferentes combinaciones, además de baterías de voltaje uniforme que las alimentan. Las corrientes y voltaje en las resistencias son también constantes.



Ejemplo

$$n + 1 = 2 \implies n = 1$$

$$r = 3 \implies m = 3 - 1 = 2$$

Se necesitan 1 ecuación de nodo y 2 ecuaciones de malla independientes.

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_2 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0 \\ R_3 I_3 + R_2 I_2 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \end{cases}$$

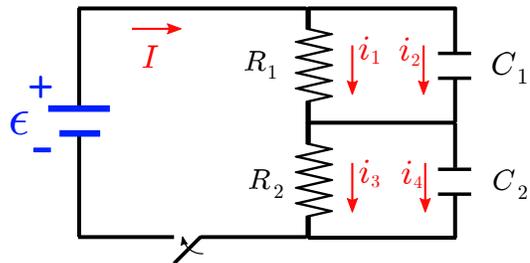
$$I_2 = \frac{R_3 \varepsilon_1 - (R_1 + R_3) \varepsilon_2 - R_1 \varepsilon_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad \text{etc}$$

Transiente en circuitos de corriente continua

Corresponden a circuitos eléctricos resistivos y capacitivos, formados sólo por resistencias y condensadores conectadas en diferentes combinaciones, además de baterías de voltaje uniforme que las alimentan. Las corrientes y voltaje varían en el tiempo desde una situación estacionaria inicial a una final.

Ejemplo

Considerar circuito de la figura, con los condensadores inicialmente descargados y la fuente desconectada. Al conectar la fuente ε circula una corriente I desde la fuente al conjunto de resistencias y condensadores.



Problema: determinar corrientes indicadas.

Ecuaciones independientes:

$$n + 1 = 3 \implies n = 2$$

$$r = 5 \implies m = 5 - 2 = 3$$

Se necesitan 2 ecuaciones de nodo y 3 ecuaciones de malla independientes.

$$\text{ecs. de nodo} \implies \begin{cases} I = i_1 + i_2 \\ i_1 + i_2 = i_3 + i_4 \end{cases} \quad \text{ecs. de malla} \implies \begin{cases} R_1 i_1 + R_2 i_3 - \varepsilon = 0 \\ R_1 i_1 = \frac{q_2}{C_1} \\ R_2 i_3 = \frac{q_4}{C_2} \end{cases}$$

Combinando las ecuaciones encontramos, por ejemplo, que la carga q_2 ($i_2 = \frac{dq_2}{dt}$) en el condensador C_1 es solución de la siguiente ecuación diferencial lineal, inhomogénea, de primer orden,

$$\frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{T} q_2 = \frac{T_1}{T} \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} \quad \text{con} \quad \begin{cases} T_1 = R_1 C_1 & T_2 = R_2 C_2 \\ T = \frac{R_2 T_1 + R_1 T_2}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

Solución: $q_2(t) = \frac{T_1}{R_1 + R_2} \varepsilon + A e^{-t/T}$ $A \equiv$ constante de integración

Se deja al lector determinar la constante de integración después de analizar que ocurre en el instante posterior al cierre del interruptor.

Se recomienda terminar de resolver el ejercicio determinando:

- corrientes por las diferentes ramas en función del tiempo;
- analizar situación $t \rightarrow \infty$
- graficar, por ejemplo, corrientes i_1 e i_2 como función del tiempo.

4.5. Problemas

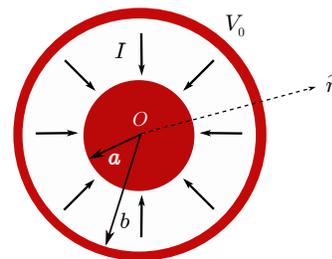
I-1 En la superficie de la Tierra (supuesta esférica, radio 6.400 Km) hay un campo eléctrico promedio $\vec{E} = E_r \hat{r}$ ($E_r \approx -100$ [V/m] y \hat{r} es la dirección radial) y una densidad de corriente $\vec{J} = J_r \hat{r}$ ($J_r \approx -3,5 \times 10^{-12}$ [A/m²]) que lleva electrones desde la Tierra hacia las capas altas de la atmósfera. La diferencia de potencial entre la Tierra y la zona alta de la atmósfera es 400 kV.

- a) ¿Cuál es la corriente total que llega a la superficie terrestre?
- b) ¿Qué potencia se requiere para mantener esta corriente?
- c) ¿Cómo se compara esta potencia a la capacidad de una planta generadora de electricidad*? La carga eléctrica en la superficie de la Tierra está siendo restablecida continuamente por medio de las descargas eléctricas (relámpagos), quienes llevan carga negativa desde la zona alta de la atmósfera hacia la superficie. Un relámpago típico alcanza una corriente máxima de 10^4 [A] y mueve una carga de 20 [C] en una fracción de segundo.
- d) Estime el número de relámpagos que ocurren cada segundo, en promedio, en todo el mundo.

I-2 (E6-2016P) Un conductor ideal esférico, de radio a , está rodeado por otro conductor también ideal, concéntrico, de radio $b > a$. El espacio entre los conductores está lleno con un material cuya conductividad varía con el radio, $\sigma_c = \frac{c}{r}$, con c una constante de las dimensiones adecuadas.

Si la esfera exterior se mantiene a un potencial V_0 [V] y una corriente total I [A] fluye radialmente entre los conductores, determine

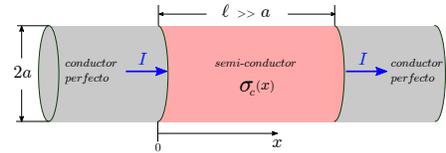
- a) El potencial eléctrico a una distancia r arbitraria ($b > r > a$ y $r > b$) desde el centro;



* Para su conocimiento, la mayor planta generadora de electricidad en el mundo está en China (3 Gorges Damm, hidroeléctrica, 22.500 MW). En Chile, las de mayor capacidad (~ 5) están en el rango de 700-800 MW (Ralco, hidro; Atacama y San Isidro, gas; Guacolda, carbón). La mayor de origen solar alcanzará una potencia de 200 MW (Cerro Dominador, termosolar). La capacidad instalada en el país es del orden de 30.000 MW en la actualidad.

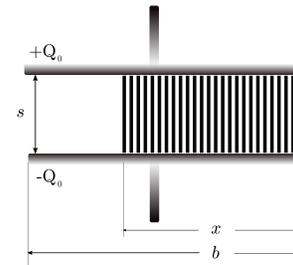
- b) Densidades de carga (o carga total) en los conductores y en el medio entre los conductores;
 c) La resistencia eléctrica del medio entre los conductores y la potencia que en él se disipa.
 Respuesta (pág. 214)

I-3 Una corriente estacionaria fluye por un cilindro de largo l y radio $a \ll l$ hecho de un material semiconductor que obedece la ley de Ohm y cuya conductividad viene dada por $\sigma_c(x) = \sigma_0 e^{x/l}$, donde x es la distancia a lo largo del eje del cilindro, mientras que σ_0 es una constante conocida. Ambos extremos están conectados a cilindros conductores perfectos del mismo radio que el semiconductor. Suponga, además, que $V(0) = V_0$ y $V(l) = 0$, y que la densidad de corriente es uniforme.



- a) Calcule la resistencia del semiconductor y la corriente que lo atraviesa.
 b) Encuentre el potencial como función de la posición $V(x)$.
 c) Determine las cargas libres presentes en el sistema.
 d) Durante el régimen estacionario, ¿existe variación de energía electrostática almacenada en el sistema? Discuta su respuesta. ¿Existe energía disipada a lo largo del tiempo? Si su respuesta es positiva, ¿a dónde va esta energía? ¿De dónde viene esta energía? Discuta su respuesta.
 e) Si la fuente externa se desconectara, explique cualitativamente qué pasaría con las cargas libres del sistema.
 f) Durante el periodo transitorio, determine cuál sería la variación de energía electrostática almacenada en el sistema. ¿Cuánta energía se disiparía por efecto Joule durante este periodo? Discuta cómo se relacionan ambas cantidades.

I-4 (C2-2017P) Considere un condensador de placas paralelas, con lados b cada placa, separadas por una distancia s y tal que $s \ll b$. El espacio entre placas se llena parcialmente con un material de permitividad ϵ y conductividad σ_c . Inicialmente, el condensador tiene $\pm Q_0$ en cada placa.



- a) Calcule el tiempo que demora el condensador en disminuir a la mitad la carga en sus placas.
 b) Determine la fuerza sobre el dieléctrico.
 c) Compare la energía inicial del condensador con la que tiene después de transcurrido un tiempo largo. Explique qué sucedió.

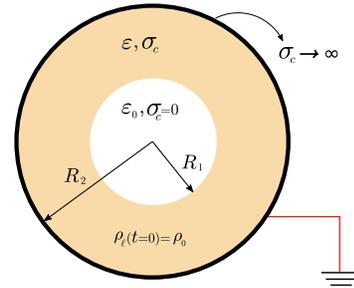
Respuesta (pág. 214)

I-5 Una esfera conductora de radio a y conductividad σ_c tiene una carga neta Q . En un tiempo $t = 0$ la carga está uniformemente distribuida en el volumen de la esfera, con una densidad de carga volumétrica $\rho = 3Q/4\pi a^3$. Como las condiciones estáticas de un conductor aislado solo permiten que las cargas se ubiquen en su superficie, para un tiempo $t > 0$ la carga progresivamente migrará hacia la superficie.

- a) Evaluar la evolución temporal de la distribución de carga en la esfera, y el campo eléctrico en todo el espacio. Estime numéricamente el tiempo característico de relajación τ para el caso de un buen conductor (cobre por ejemplo, buscar su conductividad).
 b) Evaluar la evolución temporal de la energía electrostática en la esfera durante la redistribución de las cargas.
 c) Mostrar que la energía disipada mediante el efecto Joule es igual a la pérdida de la energía electrostática.

I-6 (Examen-2020P) Una capa dieléctrica disipativa cilíndrica, $R_1 < r < R_2$, con una constante dieléctrica ϵ_r y conductividad σ_c (g), se carga uniformemente a un tiempo $t = 0$ con una densidad volumétrica de carga libre $\rho_\ell(t = 0) = \rho_0$. La región para $0 < r < R_1$ es vacío con permitividad ϵ_0 y nula conductividad.

Suponga que la densidad de carga superficial en $r = R_1$ es nula todo el tiempo, $\sigma_s(r = R_1, t) = 0$. La superficie $r = R_2$ es un cilindro perfectamente conductor conectado a tierra. Se supone que los cilindros son muy largos, de manera que se desprecian efectos de tamaño.



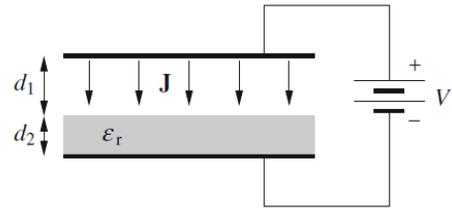
- ¿Cuál es el campo eléctrico en el espacio vacío, $0 < r < R_1$, como función del tiempo?
- ¿Cuál es la densidad de carga volumétrica y el campo eléctrico dentro de la capa dieléctrica, $R_1 < r < R_2$, como función de la distancia radial r y del tiempo?
- ¿Cuál es la densidad de carga superficial en la interfaz en $r = R_2$?

Respuesta (pág. 214)

I-7 (C2-2018P) Dos electrodos (objetos metálicos, muy buenos conductores, de forma arbitraria y volumen finito) se encuentran inmersos en un medio de conductividad σ_c (ó g) y constante dieléctrica ϵ_r .

- Encuentre una relación entre la capacidad y la resistencia que existe entre los electrodos.
- Se conecta una batería entre los electrodos, con lo cual se cargan y quedan con una diferencia de potencial V_0 entre ellos. Encuentre como varía la diferencia de potencial en el tiempo luego que se desconecta la batería.

I-8 Cada placa de un condensador de placas paralelas tiene una superficie S y están separadas una distancia d . El espacio entre las placas está dividido en dos capas, de grosor d_1 y d_2 respectivamente, con $d_1 + d_2 = d$. La capa de grosor d_1 está rellena con un gas de constante dieléctrica equivalente al vacío, mientras que la capa de grosor d_2 está rellena de un material con permitividad eléctrica ϵ_r . La diferencia de potencial entre las placas es V y se mantiene constante por una fuente externa.



- Encuentre el campo eléctrico en el condensador.

Una descarga ionizante comienza en la capa llena de gas en $t = 0$ y éste comienza a ser un conductor. Asumimos para aquello que, en $t > 0$, el gas ionizado puede ser considerado como un conductor ohmico de resistividad constante y uniforme ρ .

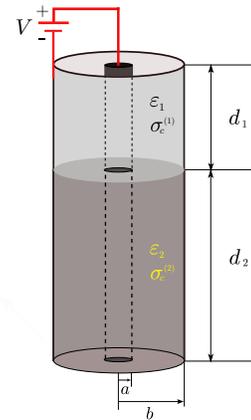
- Luego de un tiempo suficientemente largo, observamos que la corriente deja de fluir en el gas, y el sistema llega a un estado estacionario (o sea, todas las cantidades físicas son constantes). Encuentre el campo eléctrico en estas condiciones y la densidad de carga libre entre las dos capas.
- Encuentre la dependencia del tiempo del campo eléctrico en la fase transiente ($t > 0$), y el tiempo de relajación que necesitó el sistema para llegar al estado estacionario.

I-9 Un conductor AB , de $50 [Km]$ de largo, tiene una falla y resulta necesario localizarla. Si el extremo A se conecta a una batería y su potencial se mantiene a $200 [V]$, mientras el otro extremo B se aísla, se encuentra que el potencial de B es $40 [V]$ una vez que se estabiliza. Similarmente, cuando A se aísla, el potencial al cual se debe aumentar B , para tener un potencial estable en A de $40 [V]$, es $300 [V]$. Determine la distancia a la que se encuentra la falla desde el punto A .

I-10 (C2-2016P) Se tiene un cable coaxial formado por dos cilindros metálicos concéntricos, de longitud $(d_1 + d_2)$ y radios a y b . El espacio entre ambos conductores se llena con dos medios dieléctricos no ideales, caracterizados por permitividades y conductividades $(\epsilon_1, \sigma_c^{(1)})$ en una zona de largo d_1 y $(\epsilon_2, \sigma_c^{(2)})$ en una zona de largo d_2 , respectivamente.

Manteniendo una diferencia de potencial V constante entre los cilindros conductores, calcule:

- la densidad de corriente en el espacio entre los conductores ($a < r < b$);
- la resistencia y la capacidad del cable coaxial;
- la energía almacenada y la potencia disipada por el cable.

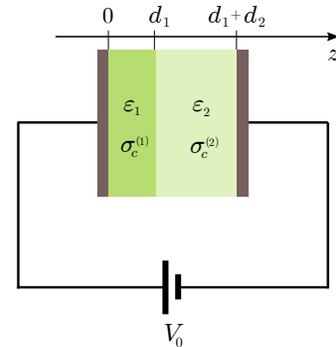


Indicación: Considere que $(d_1 + d_2) \gg a, b$, lo que le permite suponer simetría radial. Desprecie las corrientes que circulan por los conductores.

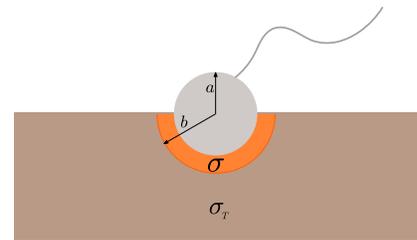
Respuesta (pág. 214)

I-11 Considere un condensador de placas planas paralelas cuyo espacio interno se llena con dos bloques de materiales distintos cuyas permitividades y conductividades valen respectivamente $(\epsilon_1; \sigma_c^{(1)})$ y $(\epsilon_2; \sigma_c^{(2)})$ como se indica en la figura.

- Si entre las placas se establece una diferencia de potencial V_0 , calcule la densidad de cargas libres superficiales en la región interfacial en régimen permanente.
- Suponga ahora que, después de haberse establecido el régimen permanente, se desconecta la batería y cada placa se conecta a tierra. Determine la evolución temporal de la densidad de carga en la región interfacial.



I-12 La figura muestra un cable conectado a la Tierra (de conductividad σ_r) a través de una esfera conductora de radio a que se encuentra semienterrada. La capa de tierra inmediatamente adyacente a la esfera, de espesor $(b - a)$, posee una conductividad σ . Encuentre la resistencia entre el final del cable y un punto ubicado en las profundidades de la Tierra.



I-13 En un cable submarino de resistencia por unidad de longitud R_ℓ [Ω/m] se pierde una fracción de la corriente que por él circula debido a la conductividad del agua en la que está instalado. Suponga que el agua tiene una resistencia por unidad de longitud del cable r_ℓ [Ω/m].

Considerando que, con respecto a un punto de referencia, a una distancia x en el cable la corriente es $i(x)$ y el potencial es $V(x)$,

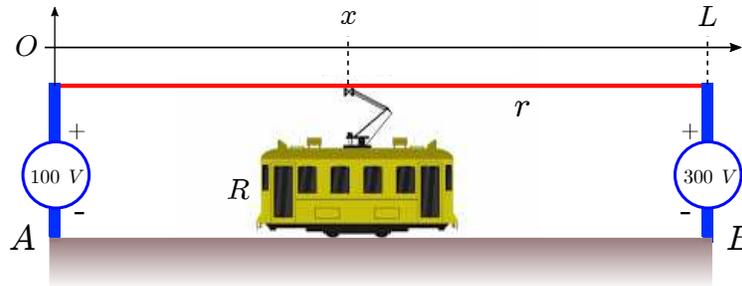
a) demostrar que

$$\frac{dV(x)}{dx} = -R_\ell i(x) \quad \text{y} \quad \frac{di(x)}{dx} = -\frac{V(x)}{r_\ell};$$

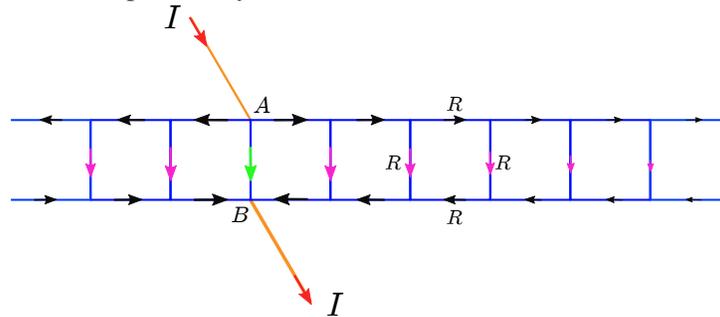
b) considerando que el cable es de longitud L [m] y los extremos están a potenciales $V(x = 0) = V_0$ y $V(x = L) = 0$, determine el potencial eléctrico en el cable como función de la posición x . Grafique su resultado.

I-14 El tranvía de la figura está alimentado, desde la estación A por una fuente continua de voltaje $V_A = 100$ [V] y desde la estación B por una fuente $V_B = 300$ [V], a través de una línea conductora cuya resistencia es r [Ω/m]. Las estaciones están separadas L [m].

Si el tranvía representa una carga resistiva de R [ω], calcular a qué distancia de la estación A se produce el máximo consumo de potencia en el tranvía. Discutir su resultado.



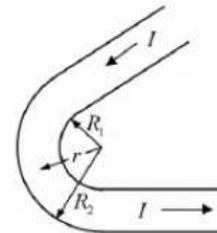
I-15 Dos largos cables conductores rectos, paralelos, están cruzados por conductores del mismo material a distancias iguales, formando un escalera infinita de cuadrados en que cada lado tiene una resistencia R . Una corriente I entra y sale del circuito en los extremos A, B de uno de los conductores cruzado. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos A y B .



I-16 Preguntas conceptuales sobre cables curvados.

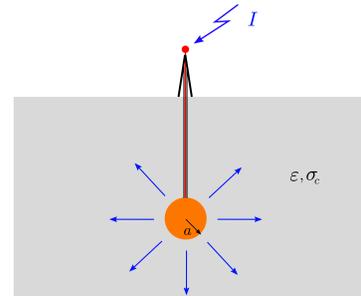
a) Por un cable de conductividad σ_c pasa una corriente estacionaria I . Demuestre que la carga total acumulada en la superficie del cable en el entorno inmediato a una curvatura en 90° del mismo es $Q \approx \epsilon_0 \frac{I}{\sigma_c}$. Haga un dibujo del cable indicando las posiciones aproximadas y signos de las cargas superficiales. Explique los orígenes físicos de los signos de éstas.

b) Una diferencia de potencial V genera una corriente I a través de un cable óhmico de conductividad σ_c y sección transversal circular. Una porción del cable posee la forma de un arco circular de radio interno R_1 y radio externo R_2 , como se muestra en figura. Encuentre la dependencia de la densidad de corriente J y el radio local r definido en el diagrama.



I-17 Un pararrayos está formado por una esfera de Cu de radio a , enterrada a una gran profundidad en la tierra y conectada a través de un conductor aislado a un elemento (en forma de punta) que sobresale de la superficie terrestre (figura).

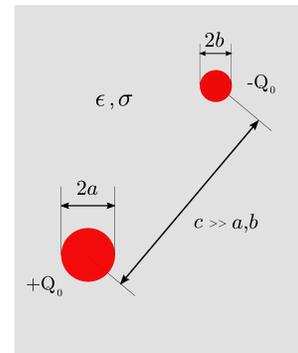
En un día de tormenta se produce una descarga eléctrica a través del pararrayos, que lleva un corriente I [C/s] durante un tiempo T . Considerando que la conductividad de la esfera de Cu es muy alta y que la tierra tiene una conductividad σ_c constante, además de su permitividad ϵ , entonces las cargas se redistribuirán instantáneamente sobre la superficie de la esfera y de allí pasarán a la tierra donde se distribuyen con simetría esférica.



Durante el tiempo que dura la descarga,

- Calcular la diferencia de potencial que existe entre la esfera de Cu y un punto situado a una distancia r del centro de la esfera.
- Graficar $V(r)$ en función de r . Calcular $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r)$.
- Calcular la resistencia entre la esfera de Cu y una esfera concéntrica de radio R , tal que $R \gg a$. ¿Qué ocurre cuando $a \rightarrow 0$?
- A partir del momento en que cesa la descarga, grafique $V(r)$ en función del tiempo.

I-18 (C2-2017P) Un condensador consiste en dos esferas metálicas de radios a y b , sumergidas en un líquido de conductividad σ_c muy pequeña y permitividad ϵ . La conductividad de ambas esferas es mucho mayor que σ y la distancia c entre sus centros es muy grande en comparación a los radios a o b ($c \gg a, b$).



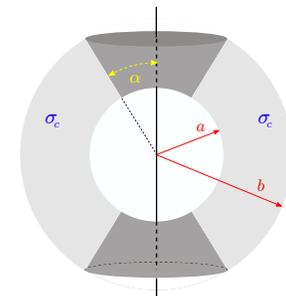
- Calcule la capacidad del condensador.
- Demuestre que la resistencia del condensador es

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

- Si el condensador se carga inicialmente con $\pm Q_0$, ¿cuál es su energía en el tiempo ?

Respuesta (pág. 214)

I-19 Dos electrodos perfectamente conductores en forma de tronco de cono (cáscaras) están rodeados de un material conductor no polarizable de conductividad σ_c (figura).



Determine la resistencia eléctrica del sistema.

Analice su resultado para el caso límite de un cascarón esférico: $a \rightarrow b$ y $\alpha \rightarrow 0$.

I-20 (C2.6-2022P) Una esfera metálica de radio a está rodeada por una esfera metálica concéntrica de radio interior $b > a$. El espacio entre las esferas está lleno con un material cuya permitividad es ϵ y su conductividad eléctrica varía con la intensidad del campo eléctrico $E = \|\vec{E}\|$ según la relación $\sigma_c = \kappa E$ (κ es una constante conocida). Una diferencia de potencial V (constante) se mantiene entre las dos esferas. ¿Cuál es la corriente entre las esferas? ¿Cuál es la resistencia del sistema? ¿Existe una densidad de carga libre entre las esferas?

Respuesta (pág. 214)

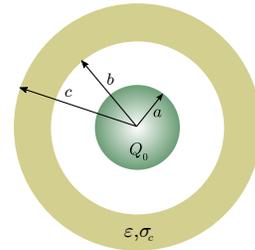
I-21 (C2-2021P) a) Explique físicamente porqué la capacidad de un condensador con dieléctrico de permitividad ϵ aumenta en ϵ con respecto a la capacidad del condensador en vacío. ¿Qué importancia tiene ese hecho?

b) Considere que el dieléctrico tiene impurezas, representadas por pequeñas esferas conductoras distribuidas en forma más o menos uniforme en el volumen del medio. ¿Cambia (mayor, menor o igual) la capacidad del condensador en relación a tener un dieléctrico ideal entre sus placas?

c) Un conductor esférico, de radio a , tiene una carga $Q_0 > 0$. El espacio entre dos esferas de radios b y $c > b$ se llena con un medio homogéneo de permitividad ϵ y conductividad σ_c . Determine la carga eléctrica total en las superficies del medio material y los campos eléctricos en todo el espacio.

d) Compare la energía inicial (conductor sólo) y final (conductor rodeado de dieléctrico) del sistema.

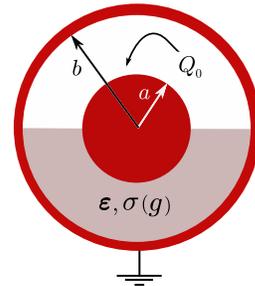
Respuesta (pág. 215)



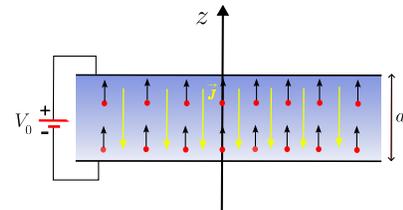
I-22 (C2-2016P) Se tienen dos cascarones esféricos conductores (ideales) de radios a y b . El conductor interior se carga con Q_0 [C] mientras que el exterior se mantiene conectado a tierra. Considerando que la mitad del espacio entre ambos conductores está lleno con un material de constante dieléctrica ϵ_r y conductividad σ (también llamada g), determine:

a) la evolución temporal de la carga en la esfera interior;

b) la energía total disipada por el medio material.



I-23 (C2.1-2022P) Un electrodo plano es capaz de emitir un número ilimitado de partículas con carga $-e$ y de masa m cuando se le aplica algún campo eléctrico externo. Las partículas abandonan el plano estando inicialmente en reposo, luego son aceleradas en dirección hacia otro electrodo paralelo al primero que se encuentra a una distancia a . La diferencia de potencial entre los electrodos es V_0 . La emisión de partículas continúa hasta que el campo eléctrico producido por la carga espacial ubicada entre $z = 0$ y $z = a$ contrarresta el efecto del campo externo en la superficie del primer electrodo. Encuentre la densidad de corriente estacionaria \vec{J} que se establece en el sistema, en términos de V_0 , m , e y a .



Magnetostática

5.1. La corriente eléctrica

La carga eléctrica es fuente del fenómeno eléctrico, descrito por el campo eléctrico \vec{E} . La relación entre fuente y efecto del fenómeno eléctrico - al menos en su límite estático - queda descrito por las ecuaciones de Maxwell

$$\text{cargas eléctricas estáticas } (\rho_\ell) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell & (\vec{D} = \epsilon \vec{E}) \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Cuando las cargas adquieren movimiento por acción de fuerzas eléctricas presentes, el fenómeno queda representado por las corrientes eléctricas. Esquemáticamente, se tiene

$$\text{cargas eléctricas en movimiento} \quad \longrightarrow \quad \text{corrientes } (\vec{J}) \quad \Longrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_\ell}{\partial t}$$

¿Qué sugieren estas ecuaciones?

(además de describir distribuciones de campos eléctricos y corrientes)

Combinando las ecuaciones asociadas a la divergencia de \vec{D} y \vec{J} se observa que

$$\nabla \cdot \left[\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{existe } \vec{H} \text{ tal que} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

es decir, podría existir un nuevo fenómeno, asociado a la existencia de las corrientes eléctricas.

Experimento

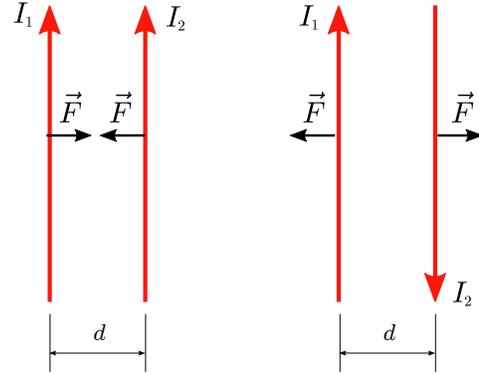
La idea es verificar si existe una nueva física asociada a la presencia de corrientes (cargas eléctricas en movimiento). Con ese propósito, analicemos el experimento siguiente:

- alambres sin carga eléctrica neta, en cercanías uno del otro, conectados a una fem;

- al circular corrientes se observan fuerzas sobre los alambres: atractivas si corrientes en la misma dirección y repulsivas en caso contrario:

- los alambres experimentan fuerzas porporcionales a la magnitud de las corrientes que circulan e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d de separación:

Conclusión: $\|\vec{F}\| \sim \frac{I_1 I_2}{d^2}$



5.1.1. Ley de fuerza magnética (Ampere)

Definiciones:

- * **Espira:** conductor que forma una trayectoria cerrada por donde puede circular una corriente.
- * **Elemento (infinitesimal) de corriente:** producto de la corriente I que circula por un elemento de trayectoria $d\vec{r}$ en la dirección que lleva la corriente ($\equiv I d\vec{r}$)

Considerar 2 espiras de longitudes C y C' :

-Experimentalmente, se mide que existe una fuerza infinitesimal sobre el elemento de corriente $I d\vec{r}$ en la espira C debido al elemento de corriente $I' d\vec{r}'$ en la espira C'

$$d\vec{F}_{C(C')} = K \frac{(I d\vec{r}) \times [(I' d\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

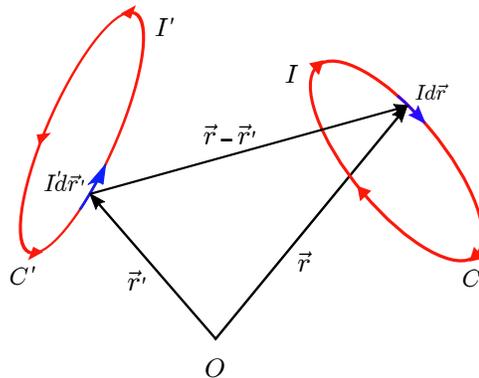
La constante de proporcionalidad K queda determinada por el sistema de unidades. En sistema SI

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} \equiv 10^{-7} \left[\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right]$$

μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío.

La fuerza resultante que la espira C' ejerce sobre la espira C :

$$\vec{F}_{C(C')} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{(I d\vec{r}) \times [(I' d\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



y satisface, en acuerdo con los principios de ma Mecánica, el principio de acción y reacción,

$$\vec{F}_{C(C')} + \vec{F}_{C'(C)} = 0$$

Generalización

Es necesario explicitar las formas alternativas que puede tomar un elemento de corriente, dependiendo del espacio donde se distribuye la corriente:

* **en una trayectoria:**

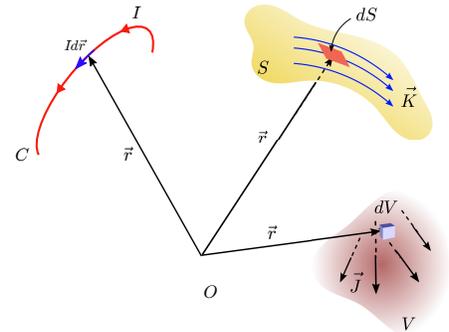
elemento de corriente $\equiv I d\vec{r}$ $[I] = A$
 donde I es la intensidad de corriente;

* **en una superficie:**

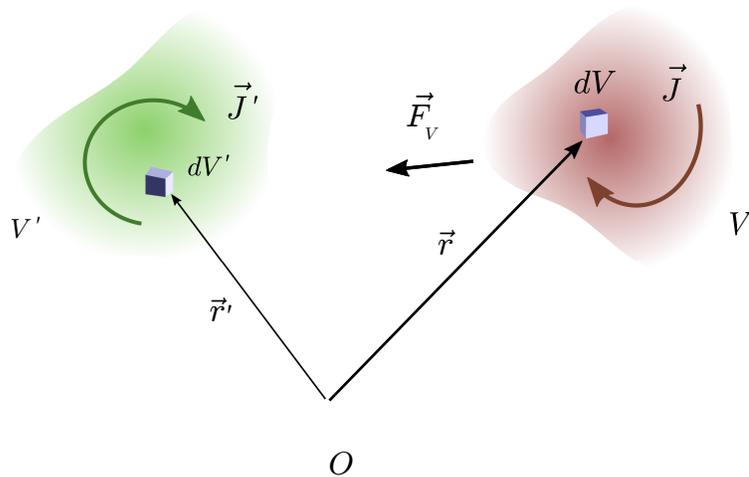
elemento de corriente $\equiv \vec{K} dS$ $[|\vec{K}|] = A/m$
 donde \vec{K} es una densidad de corriente lineal;

* **en un volumen:**

elemento de corriente $\equiv \vec{J} dV$ $[|\vec{J}|] = A/m^2$
 donde \vec{J} es una densidad de corriente superficial.



Entonces, para dos volúmenes V y V' en el espacio por donde existen densidades de corrientes \vec{J} y \vec{J}' , la fuerza sobre el volumen V debido a la densidad de corriente \vec{J}' en el volumen V' está dada por



$$\vec{F}_{V(V')} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}) \times [\vec{J}'(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] dV' dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Ejemplo de fuerza magnética

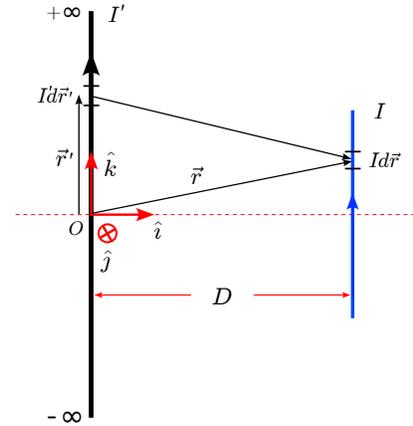
Calcular la fuerza magnética que un alambre muy largo, que lleva una corriente I' , ejerce sobre un alambre finito de largo $2L$, paralelo al anterior y por el que circula una corriente I en el mismo sentido. La distancia de separación entre alambres es D .

Se trata de una aplicación de la ley de fuerza. Sobre el alambre de largo finito se ejerce una fuerza magnética dada por

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^L (I d\vec{r}) \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(I' d\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}.$$

En sistema cartesiano de referencia,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= D\hat{i} + z\hat{k} \quad \longrightarrow \quad d\vec{r} = dz\hat{k} \quad -L \leq z \leq L \\ \vec{r}' &= z'\hat{k} \quad \longrightarrow \quad d\vec{r}' = dz'\hat{k} \quad -\infty \leq z' \leq \infty \\ \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3 &= [D^2 + (z - z')^2]^{3/2} \\ d\vec{r} \times [d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] &= -D dz dz' \hat{i} \end{aligned}$$



con lo cual se integra directamente la expresión para la fuerza obteniéndose,

Se concluye:

$$\vec{F} = -\mu_0 \frac{II'}{\pi D} L \hat{i}.$$

- * la fuerza entre los alambres es atractiva;
- * la expresión final para la fuerza es simple (debido al alambre ∞) y sólo depende de la distancia entre alambres;
- * la magnitud de la fuerza por unidad de largo entre los alambres, cuando ambos son muy largos, correspondería a

$$F_\ell = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{F}{2L} \right) = \mu_0 \frac{II'}{2\pi D}$$

5.2. El campo magnético

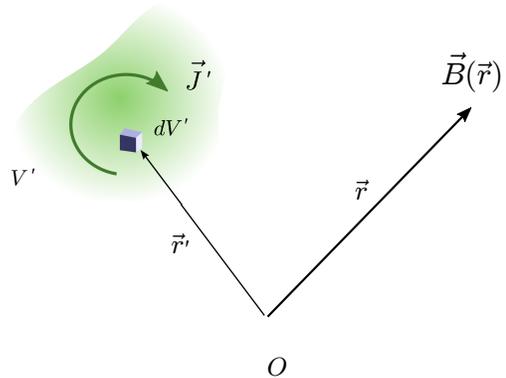
5.2.1. Introducción

Una distribución de corriente \vec{J}' que ocupa un volumen V' genera, en todo el espacio, un efecto que llamamos el campo magnético,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$

con unidades

$$[B] = \frac{[F]}{[I][L]} = \frac{N}{A \cdot m} \equiv \text{Tesla} \quad [T]$$



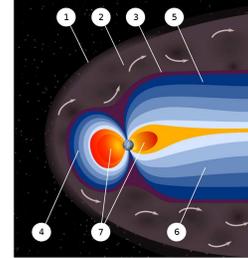
En presencia de un campo magnético \vec{B} , partículas cargadas en movimiento o distribuciones de corriente espaciales (\vec{J} , \vec{K} o I) experimentan una fuerza magnética

$$\vec{F} = \int_{\text{Vol}} \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dV \quad \longrightarrow \quad \int_{\text{Sup}} \vec{K}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dS \quad \longrightarrow \quad \int_c I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Valores típicos:

$$B_{\text{terrestre}} \sim 25 - 65 \mu T \quad B_{\text{buen imán}} \sim 1 T$$

Para ilustrar la distribución espacial que puede tener el campo magnético, se presenta una visualización del **campo magnético terrestre**



5.2.2. Espiras en campo magnético

Una distribución de corriente, ubicada en presencia de un campo magnético, experimenta una fuerza magnética que tiene que ser consistente con la ley de fuerzas (Ampere).

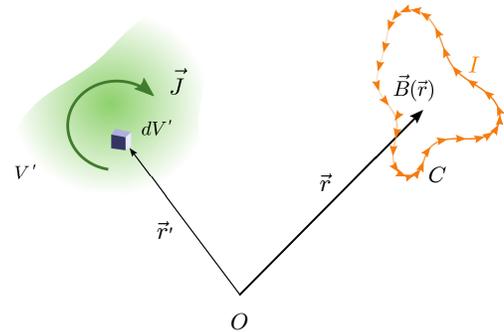
- Espira, con corriente I , en campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$

La fuerza sobre la espira es

$$\vec{F}^{(\text{espira})} = I \oint_c d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

El torque sobre la espira, tomado con respecto al origen del vector posición, es

$$d\vec{\tau}_o^{(\text{espira})} = \vec{r} \times d\vec{F}^{(\text{espira})} \quad \longrightarrow \quad \vec{\tau}_o^{(\text{espira})} = I \oint_c \vec{r} \times [d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})]$$



Usando la descomposición

$$\vec{r} \times [d\vec{r} \times \vec{B}] = \frac{1}{2} \left\{ d \left[\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B}) \right] + (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B} - \left[\vec{r} \times (\vec{r} \times d\vec{B}) \right] \right\}$$

permite tener una expresión alternativa para el torque,

$$\vec{\tau}_o^{(\text{espira})} = \frac{1}{2} I \oint_c (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) - \frac{1}{2} I \oint_c \vec{r} \times [\vec{r} \times d\vec{B}(\vec{r})]$$

Un campo magnético, en general no uniforme, dificulta el cálculo de fuerzas y torques sobre espiras. Los resultados previos se simplifican cuando $\vec{B}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{B}_0$, un campo magnético uniforme.

- Espira, con corriente I , en campo magnético uniforme \vec{B}_0

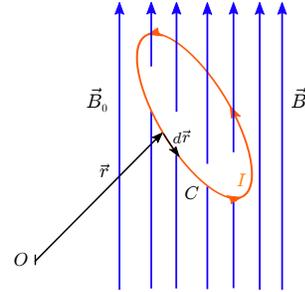
* La fuerza neta sobre la espira es nula

$$\vec{F}^{(\text{espira})} = I \left(\oint_C d\vec{r} \right) \times \vec{B}_0 = 0$$

e independiente de la forma de la espira.

* El torque neto sobre la espira existe siempre. Se puede escribir como

$$\vec{\tau}_O^{(\text{espira})} = I \left(\frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{r} \right) \times \vec{B}_0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\tau}^{(\text{espira})} = I \vec{A} \times \vec{B}_0 \quad (\text{para una espira plana de área } \vec{A})$$



El cálculo del torque sobre la espira se simplifica cuando la espira es plana. En ese caso, la integral entre paréntesis corresponde al área de la superficie de la espira plana y su dirección determinada por la regla de la mano derecha. Además, se ha omitido la referencia al origen O en el torque, ya que puede ser cualquier punto en el plano de la espira.

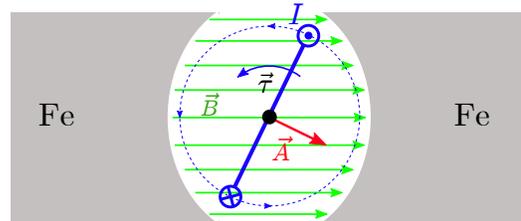
Conclusión: En un campo magnético uniforme, una espira plana por la que circula una corriente, no se desplaza pero rota en torno a un eje normal al área \vec{A} y el campo \vec{B}_0 .

Principio funcionamiento motor eléctrico

Una aplicación del comportamiento de una espira plana en presencia de un campo magnético uniforme es el motor eléctrico de corriente continua. Se trata de un dispositivo de enorme importancia en el desarrollo tecnológico-industrial.

- **Motor eléctrico corriente continua:**

Se trata de un imán (o electroimán) de material de hierro (Fe) que, entre sus polos, genera un campo magnético aproximadamente constante. En el entrehierro, de forma casi cilíndrica hay una espira (muchas en realidad) plana, rectangular, por la que circula una corriente continua provista por una fuente externa. La espira es solidaria a un eje (punto negro en la figura) de rotación.



Al tener la espira con corriente en presencia del campo magnético, se ejerce un torque $\vec{\tau}$ que hace rotar la espira hasta que su vector de área (\vec{A}) sea paralelo al campo \vec{B} . Justo en el momento del alineamiento (torque nulo) se invierte el sentido de circulación de la corriente en la espira, lo que permite cambiar el sentido de \vec{A} y que el torque continúe actuando sobre la espira en el mismo sentido de rotación.

En el proceso, la energía eléctrica suministrada por la fuente externa para hacer circular la corriente y hacer rotar la espira (excluyendo las pérdidas), se transforma en energía mecánica de rotación a través del eje solidario a la espira, para ser usado en muy diferentes tipos de aplicaciones.

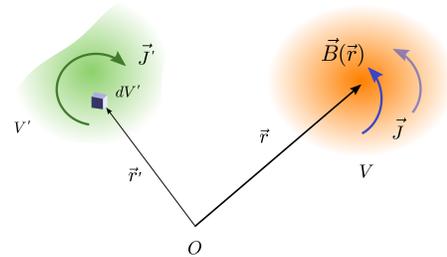
5.2.3. Fuerza de Lorentz

Otro caso interesante de estudio es analizar el comportamiento de una distribución de corriente \vec{J} en presencia de un campo magnético \vec{B} . La fuente de \vec{B} es, usualmente, otra distribución de corriente, como se indica en figura.

En este caso, la fuerza sobre la corriente contenida en un volumen V es

$$\vec{F}_V = \int_V \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dV$$

Formas específicas dependerán de la forma explícita que tiene $\vec{J}(\vec{r})$.



- Caso especial importante:

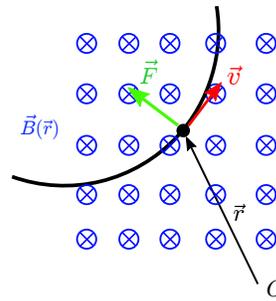
Corresponde a una partícula de masa m y carga eléctrica q , que se mueve con velocidad \vec{v} en un campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$. Entonces, la densidad de corriente $\vec{J} = \rho \vec{v}$ para una densidad de carga ρ que se mueve con velocidad \vec{v} conduce a

$$\vec{J}dV = dq\vec{v} \implies d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B}$$

que corresponde al infinitésimo de fuerza que experimenta el elemento de carga dq .

Para una partícula, la fuerza será

$$\vec{F}_{partícula} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{fuerza de Lorentz})$$



Propiedades de fuerza de Lorentz

La dinámica de la partícula cargada en el campo magnético y en ausencia de otras interacciones queda descrita por Newton,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{comparar con fuerza de Corioles en S.R. no-I.})$$

Consecuencias:

* La energía cinética de la partícula se conserva

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \implies K \equiv \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = \text{constante}$$

Esto significa que la fuerza de Lorentz no realiza trabajo sobre la partícula bajo ninguna circunstancia y, por consiguiente, su rapidez se mantiene constante durante el movimiento en el campo magnético.

* Trayectoria helicoidal de la partícula

La trayectoria descrita por la partícula es una hélice cuando $\vec{B} = \vec{B}_0$ constante.

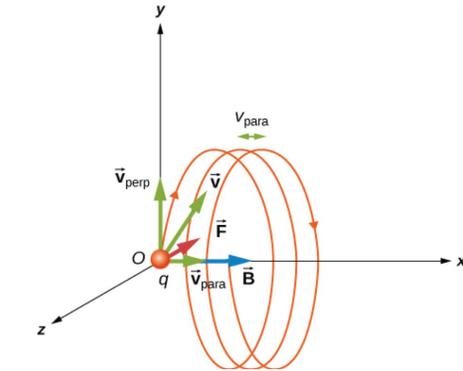
$$m\vec{B} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \implies \vec{B}_0 \cdot \vec{v} = \text{constante} = \vec{B}_0 \cdot \vec{v}_i$$

con \vec{v}_i la velocidad inicial de partícula al entrar a la zona del campo magnético. El resultado indica que la tangente a la trayectoria de la carga hace siempre un ángulo constante con la dirección del campo, característica propia de las trayectorias helicoidales.

En general, el movimiento en el campo constante es la superposición de un movimiento circular alrededor del eje definido por el campo \vec{B}_0 y un movimiento uniforme en la dirección del campo.

* Partícula entra ortogonal al campo \vec{B}_0 .

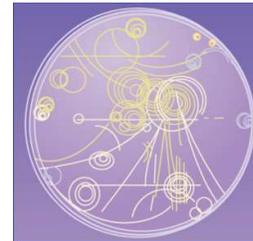
$$\vec{v} \cdot \vec{B}_0 = 0 \implies \text{movimiento es circular uniforme}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{frecuencia angular: } \vec{\Omega} = \frac{q}{m} \vec{B}_0 \\ \text{radio trayectoria: } R = \frac{\|\vec{v}\|}{\Omega} \end{array} \right.$$

Ejemplo: **Cámara de burbujas**

Se trata de un volumen que contiene un medio que es ionizado al paso de partículas cargadas. Existe un campo magnético normal al plano de la figura y la carga entra con su velocidad contenida en el plano. Se observan las trayectorias circulares que dejan las partículas, de donde se puede medir el radio y determinar la carga, su signo y su relación con la masa.



Ejemplo: **Auroras boreales**

Partículas cargadas provenientes del sol (principalmente) son atrapadas en el campo magnético terrestre. Esas partículas, en movimiento helicoidal en torno al campo magnético, radían energía. El fenómeno es observable y se conoce como auroras boreales.



5.2.4. Ejemplos

* **Campo magnético de una partícula puntual en movimiento.**

Una partícula de carga q , descrita en el espacio por el vector posición \vec{r}' y que se mueve con velocidad $\vec{v} = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ constante, genera un campo magnético en un punto del espacio descrito por el vector posición \vec{r} ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$

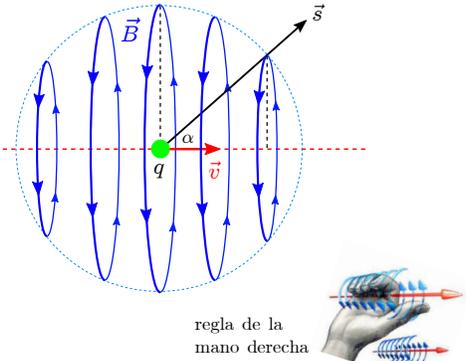
En este caso, $\vec{J}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') \rightarrow \vec{J}(\vec{r}') dV' = dq(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') \implies \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

Observar que el campo magnético es independiente del origen de coordenadas. En efecto,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \hat{s}}{s^2} \quad \text{para} \quad \vec{s} = s \hat{s} = (\vec{r} - \vec{r}')$$

y \vec{S} mide un punto del espacio con respecto a la carga en movimiento.

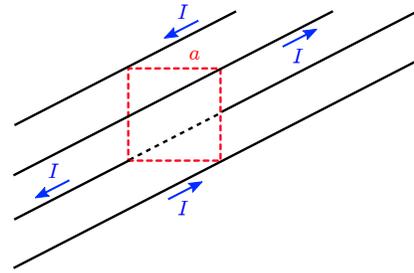
La figura adjunta muestra las líneas del campo magnético producido por la carga en movimiento. El campo \vec{B} es siempre tangente al círculo perpendicular a la velocidad \vec{v} de la partícula, las líneas de campo son cerradas y, para una distancia s desde la carga, el campo es máximo en el plano normal a \vec{v} que pasa por la carga y nulo en la dirección del movimiento de la carga.



Este cálculo simple muestra el comportamiento genérico de \vec{B} a partir de una carga en movimiento (o una corriente). Da origen a la **regla de la mano derecha** para estimar la dirección del campo conocida la dirección en que se mueven las cargas (y vice-versa).

*** Conductores paralelos.**

Considere los 4 alambres (muy largos) paralelos de la figura, que llevan todos la misma corriente pero en los sentidos indicados, que pasan por los extremos de cuadrado (lado a).
 - \vec{B} por el centro del cuadrado?
 - Fuerza por unidad de largo sobre uno de los alambres?



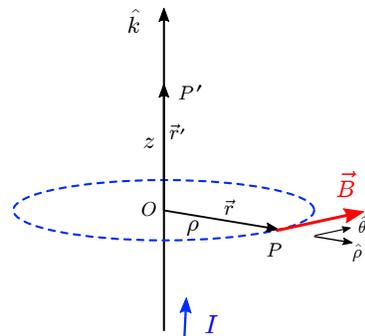
La solución requiere conocer el campo magnético que produce un alambre muy largo, por el que circula una corriente I , en el espacio. Luego, vía el principio de superposición, calcular el campo resultante en el centro del cuadrado.

El campo magnético \vec{B} producido por un alambre recto a distancia ρ se calcula a partir de

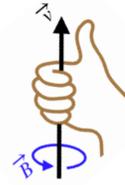
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I d\vec{r}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rightarrow \vec{B}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_0 I}{\rho} \hat{\theta}$$

Usando coordenadas cilíndricas (para aprovechar la simetría que presenta el problema) se obtiene

$$\vec{B}(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_0 I}{\rho} \hat{\theta}$$



El cálculo ilustra la relación entre el sentido en que circula la corriente y la dirección del campo magnético que produce (regla de la mano derecha).



Comparar el resultado con problema discutido previamente.

El campo magnético resultante en centro del cuadrado (C) corresponde a la superposición de los campos magnéticos producidos por las corrientes que circulan por los 4 alambres rectos.

El campo producido por un alambre en C es:

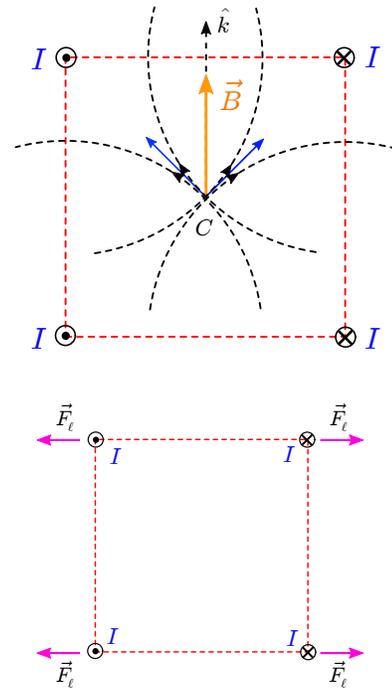
$$\text{para } \rho = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \vec{B}^{(C)} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{\mu_0 I}{a} \hat{\theta}$$

luego, el campo resultante en C (ver figura) tiene una dirección privilegiada (\hat{k}),

$$\vec{B}_R^{(C)} = \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0 I}{a} \hat{k}$$

Finalmente, la fuerza por unidad de largo sobre un alambre (cualquiera) es

$$\vec{F} = \int I d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \|\vec{F}_\ell\| = \frac{\mu_0 I^2}{\pi a} \quad \text{repulsiva}$$



* Anillo cargado que gira con velocidad angular $\vec{\omega}$ uniforme

Sea R el radio del anillo y Q la carga eléctrica distribuida uniformemente según su longitud. Se requiere calcular y comparar los campos eléctricos y magnéticos sobre el eje de simetría del anillo.

- Campo eléctrico:

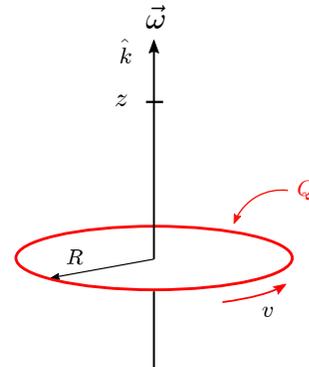
$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

- Campo magnético:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\omega R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

- Comparación:

$$\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} = \frac{c^2}{v} \frac{z}{R} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} & \text{velocidad de la luz en vacío} \\ v = \omega R & \text{rapidez de la carga en anillo} \end{cases}$$



Observar que campo eléctrico es nulo en el plano del anillo mientras que el campo magnético es finito en ese punto, $\vec{B}(0) = (\mu_0 Q \omega)/(4\pi R)$. El campo magnético desaparece si la carga deja de rotar.

Analizar ahora el movimiento de partícula de una de carga q y masa m colocada en el eje a una distancia z_0 del plano del anillo. Su ecuación de movimiento es

$$m\ddot{z} = q\vec{E}(z) + q(\dot{z}\hat{k}) \times \vec{B}(z)$$

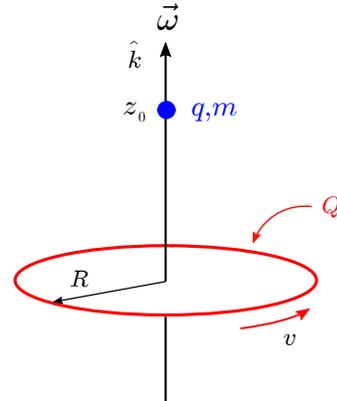
Fuerza magnética es nula para partícula moviéndose según eje z . Luego, en este caso la dinámica de la partícula está gobernada por la fuerza eléctrica, aproximándose al anillo (q y Q diferente signo) o alejándose de él (cargas del mismo signo).

Por ejemplo, calcule la velocidad con que la partícula cruza el plano si parte de z_0 con velocidad nula (cargas de diferente signo).

Para hacer y pensar:

- Estudiar el caso de la partícula ubicada inicialmente fuera (pero cerca) del eje. Puede decir algo, cualitativamente, sobre el movimiento y la velocidad a la que llegaría al plano del anillo?

- ¿Qué ocurre con sus conclusiones previas si por el anillo circula una corriente I - provista por una batería - de magnitud $I = (Q\omega)/(2\pi)$? (no rota y está descargado)



*** Barra cargada gira con velocidad angular $\vec{\omega}$ uniforme**

Considere barra de longitud $2a$, con carga uniformemente distribuida λ por unidad de longitud, que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$.

Calcular \vec{B} en un punto del eje de rotación.

Distintos esquemas de resolución.

- Densidad superficial de corriente \vec{K}

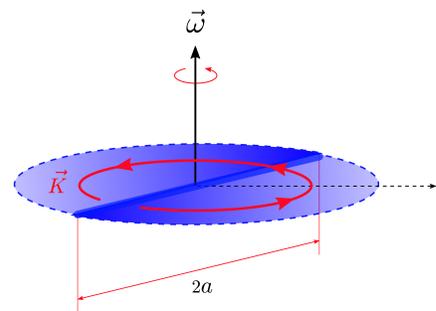
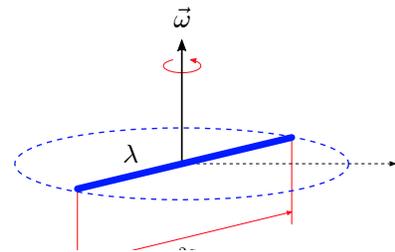
La barra cargada genera, en su rotación, una densidad de corriente superficial como se muestra en figura. Luego, en un punto de la barra identificado por \vec{r} ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dS'$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r} = z\hat{k} \quad \vec{r}' = \rho\hat{\rho} \quad \vec{K} = K\hat{\theta} \quad dS' = \rho d\rho d\theta$$

El cálculo de la corriente superficial \vec{K} significa



$$\text{En un punto de radio } \rho: \left\{ \begin{array}{l} + \text{ elemento de carga que pasa} \quad dq = \lambda d\rho \\ + \text{ en el intervalo de tiempo} \quad dt = \frac{1}{2} T = \frac{\pi}{\omega} \\ + \text{ elemento de corriente} \quad dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda \omega}{\pi} d\rho \\ \implies K = \frac{dI}{d\rho} = \frac{\lambda \omega}{\pi} \end{array} \right.$$

El campo magnético será

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \lambda \omega \int_0^a \frac{\rho^2 d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{k}$$

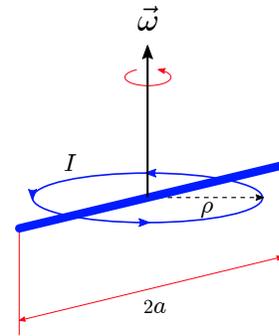
Terminar integral y estudiar situaciones límites (por ej., caso $z \rightarrow \infty$).

- Corriente infinitesimal $di(\rho)$

La idea es hacer uso de un resultado conocido: el campo en el eje de simetría de una espira de radio ρ por la que circula una corriente I :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\rho^2}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Para aplicarlo al caso de la barra que gira,



$$\left. \begin{array}{l} I \longrightarrow di(\rho) \\ \vec{B}(z) \longrightarrow d\vec{B}(z) \end{array} \right\} d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 di(\rho)}{2} \frac{\rho^2}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$\text{con } di(\rho) = \frac{\lambda \omega}{\pi} d\rho \implies \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} \int_0^a \frac{\rho^2 d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{k}$$

el mismo resultado anterior.

5.3. Propiedades del campo magnético

¿Existen las cargas magnéticas?

La pregunta es si existe algún tipo de carga no-eléctrica que sea fuente de campo magnético, análoga a la carga eléctrica como fuente del campo eléctrico. Ello significa investigar la divergencia de \vec{B} :

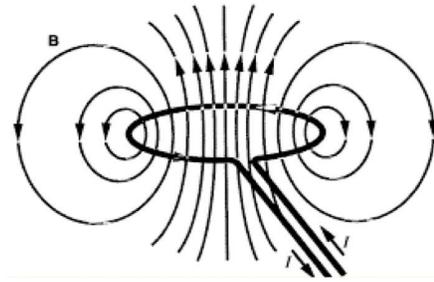
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \right]$$

que indica que el campo magnético satisface

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (3a \text{ ecuación de Maxwell})$$

Conclusiones:

- No existen cargas magnéticas que sean origen (o sumidero) de campo magnético.
- Las líneas de campo magnético son cerradas.
La figura muestra un ejemplo de las líneas de campo magnético generadas por corriente que circula por anillo circular.



La corriente y el campo magnético

Una característica importante que emerge de los ejemplos de cálculos de campos magnéticos es su comportamiento rotacional (líneas de campo son cerradas) alrededor de la distribución de corriente o de cargas en movimiento que actúan como fuentes.. En forma general, esa propiedad puede analizarse estudiando el rotor de \vec{B} ,

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] dV'$$

Usando la identidad vectorial

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) \equiv (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

e identificando

$$\vec{A} \equiv \vec{J}(\vec{r}') \quad \vec{B} \equiv \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad \nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

se obtiene

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla') \left[\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \left(\nabla \cdot \left[\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] \right) dV'$$

Afortunadamente, esta relación para el rotor se simplifica considerablemente al considerar que

$$\nabla \cdot \left[\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} 0 & \vec{r} \neq \vec{r}' \\ \text{finito} & \vec{r} = \vec{r}' \\ \int_V F(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = F(\vec{r}) \end{cases}$$

Además, es directo demostrar que

$$\int_V (\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla') \left[\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] dV' = \sum_{k=1}^3 \hat{x}_k \oint_{S(V)} \frac{(x_k - x'_k)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' - [\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')] \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

y las direcciones unitarias \hat{x}_k representan las direcciones $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ en base cartesiana de coordenadas. Sobre el valor que toman ambos términos:

- la integral de la corriente neta a través de una superficie que encierra la distribución de corriente **se anula** para $\|\vec{r}\| \rightarrow \infty$;
- ecuación de continuidad: para distribuciones estáticas de corrientes (no varían en el tiempo) la divergencia de la densidad de corriente en cualquier punto del espacio **es nula** ($\nabla \cdot \vec{J} = -\partial \rho_e / \partial t \rightarrow 0$ en caso estático).

Conclusión (válido sólo en la Magnetostática):

De los cálculos previos se concluye que, en el caso estático ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$),

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad (4a \text{ ecuación de Maxwell} - \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0)$$

donde \vec{J} es la densidad de corriente de conducción que actúa como fuente del campo magnético. En presencia de variaciones temporales, la presencia de un campo eléctrico variable en el tiempo modificará la relación encontrada.

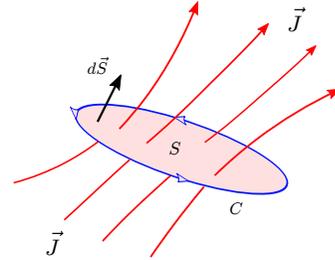
La ecuación diferencial vectorial para el campo magnético, además de describir la relación entre la fuente y el campo, permite deducir un resultado de gran utilidad práctica en casos que presenten gran simetría.

Forma integral:

Integrar la ecuación diferencial para \vec{B} en una superficie S limitada por trayectoria C y hacer uso del teorema de Stokes para obtener,

$$\int_S \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \oint_{C(S)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I \quad (\text{Ley circuital de Ampere})$$



- a la izquierda, se tiene la integral de línea de \vec{B} a lo largo de C ;
- I es la corriente neta a través de superficie S encerrada por C .

A pesar que la expresión integral de Ampere es general, su utilidad se manifiesta cuando es posible identificar una trayectoria C (que encierra una superficie S a través de la cual fluye corriente) sobre la cual la proyección del campo magnético se mantiene constante. Es el análogo magnético al teorema de Gauss discutido para los campos eléctricos.

5.3.1. Potencial magnético vector

La inexistencia de cargas magnéticas como fuente de campo eléctrico está descrito por la propiedad

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0.$$

Sugiere un campo \vec{B} derivable de una función vectorial $\vec{A}(\vec{r})$, el **potencial magnético vector**, definido por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

y consistente con $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (la divergencia de un operador rotacional es idénticamente nula).

La introducción del potencial magnético vector es en analogía con campo eléctrico \vec{E} y la función potencial eléctrico V ($\vec{E} = -\nabla V$) visto en Electroestática.

* Significado de \vec{A}

Analizando las dimensiones del potencial magnético se observa

$$[A] = [B][L] = \frac{[F]}{[I]} = \frac{[F][T]}{[Q]} \equiv \left[\frac{N \cdot s}{C} \right] \implies \left[\frac{A}{s} \right] = [E] \equiv \text{campo eléctrico}$$

Se obtiene el interesante resultado que, dimensionalmente, el potencial magnético vector por unidad de tiempo correspondería a un campo eléctrico. De verificarse, estaríamos en presencia de un nuevo fenómeno que conecta variaciones del campo magnético con el campo eléctrico.

* El flujo magnético, es decir, la cantidad de campo magnético a través de una superficie S puede expresarse en términos del potencial magnético vector,

$$\Phi_m = \int_S \vec{B}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' \implies \Phi_m = \oint_{C(S)} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

es decir, la integral a lo largo de la curva C (que encierra superficie S) del potencial magnético vector es igual al flujo magnético a través de S . Esta relación provee una oportunidad para calcular \vec{A} cuando condiciones de simetría así lo aconsejan.

- En el caso en que la superficie S es plana,

$$d\vec{S}' = \frac{1}{2} \vec{r}' \times d\vec{r}' \implies \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{r}) \times \vec{r} \quad \forall S \text{ plana}$$

* **Invariancia de gauge:** el potencial magnético vector \vec{A} no es único.

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\phi \implies \vec{B} = \vec{B}'$$

es decir, el potencial magnético tiene una indeterminación dada por el gradiente de una función escalar ϕ pero, sin embargo, describe el mismo campo magnético \vec{B} . Diferentes elecciones para Φ generan diferentes descripciones de la teoría aunque la física permanece inalterada.

La determinación directa de \vec{A} a partir de la densidad de corriente se puede obtener de la ecuación de Ampere,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \implies \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \equiv \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Para su resolución, se puede hacer uso de la indeterminación que existe para \vec{A} y elegir, arbitrariamente, un valor para la divergencia (que no está definida). La elección intuitivamente más simple es

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{gauge de Coulomb})$$

Alternativas son posibles ya que siempre es posible encontrar la función escalar ϕ que modifica a \vec{A} . Con la condición indicada, la ecuación de Ampere conduce a

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

que corresponde a una ecuación de Poisson para cada una de las componentes de \vec{A} . Una ecuación de Poisson para la función potencial eléctrico V generada por una distribución finita de carga eléctrica ρ era,

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{con solución} \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} dv'$$

En el caso del potencial magnético vector, para una distribución finita de corrientes (se anulan en el infinito), se tiene que

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad \Longrightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} dv'$$

solución que genera el campo magnético asociado a la densidad \vec{J} ,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \Longrightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$

* Situaciones interesantes:

cuando la densidad de corriente tiene una dirección privilegiada constante, $\vec{J}(\vec{r}) = J(r) \hat{n}$, entonces \vec{A} tiene la dirección de la corriente (\vec{A} paralelo con \vec{J}).

Ejemplos:

- En el caso particular de una partícula cargada que viaja con velocidad \vec{v} siguiendo una trayectoria $\vec{r}(t)$,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{\|\vec{r}-\vec{r}(t)\|} \quad \vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$$

y el potencial magnético vector y la partícula siempre tienen la misma dirección.

- Alambre recto, de largo $2L$ ($L \rightarrow \infty$), por el que circula corriente I constante en dirección \hat{k} .

Demostrar que el potencial magnético vector y el campo magnético resultante son

$$\vec{A}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{2L}{\rho}\right) \hat{k} \quad \Longrightarrow \quad \vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

con ρ la distancia perpendicular al alambre y $\hat{\phi}$ es la dirección azimutal alrededor de eje \hat{k} .

* **Potencial magnético escalar**

La cuarta ecuación de Maxwell indica que el rotor del campo magnético es nulo en todo punto del espacio en que la densidad de corriente también lo es. Cuando ocurre, en tales zonas espaciales el campo magnético se puede escribir como el gradiente de una función escalar, el potencial magnético escalar, que en este caso se define por

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\nabla V_m(\vec{r})$$

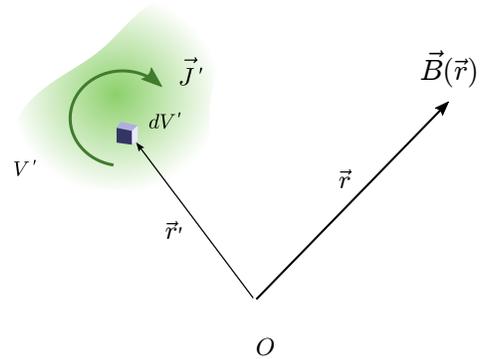
y automáticamente satisface $\nabla \times B = 0$. Como, además, el campo magnético satisface $\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$ por la ausencia de cargas magnéticas, entonces V_m satisface una ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V_m(\vec{r}) = 0$$

Este resultado indica que gran parte del conocimiento de electrostática puede aplicarse directamente, en varias situaciones físicas, para calcular V_m en magnetostática y los campos magnéticos correspondientes. Sin embargo, hay que tener cuidado con las condiciones de borde del problema magnético.

5.4. Expansión multipolar

A menudo no es necesario hacer el esfuerzo por calcular exactamente el campo magnético en el espacio. Ello puede ocurrir para distribuciones complicadas de corrientes y/o cuando lo interesante ocurre a distancias alejadas de las fuentes. En estos casos, es conveniente tener un esquema que permita calcular por aproximaciones sucesivas el campo magnético que se necesita.



*** Expansión multipolar**

La idea es trabajar con el potencial magnético vector \vec{A} y después calcular el campo $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Recordando

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Para puntos alejados de la fuente, $r \equiv \|\vec{r}\| \gg \|\vec{r}'\| \equiv r'$, se puede expandir

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \begin{cases} = \frac{1}{r} \left[1 - 2 \left(\frac{r'}{r}\right) \hat{r} \cdot \hat{r}' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right]^{-1/2} \\ \simeq \frac{1}{r} \left[1 + \hat{r} \cdot \hat{r}' \left(\frac{r'}{r}\right) + \frac{1}{2} [3(\hat{r}' \cdot \hat{r})^2 - 1] \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \dots \right] \end{cases}$$

Ello permite expandir el potencial magnético vector en potencias decrecientes de r ,

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \left[\int_v \vec{J}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{r^2} \int_v \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{J}(\vec{r}') dV' + \dots \right]$$

Se observa,

- La primera integral es nula para una distribución finita de corriente, **manifestación directa de la inexistencia de cargas magnéticas**;
- El integrando en la segunda integral se puede re-escribir como

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{J} = \frac{1}{2} \left[\vec{J} \cdot \vec{r} \vec{r}' + \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{J} \right] + \frac{1}{2} \left[\vec{r}' \times \vec{J} \right] \times \vec{r}$$

Para la integral del primer término, reconocer que $dV' = d\vec{S}' \cdot d\vec{r}'$ y que $\vec{J} \parallel d\vec{r}'$. Entonces

$$\int_v \left[\vec{J} \cdot \vec{r} \vec{r}' + \vec{r} \cdot \vec{r}' \vec{J} \right] dV' = \int_v \left[d\vec{r}' \cdot \vec{r} \vec{r}' + \vec{r} \cdot \vec{r}' d\vec{r}' \right] d\vec{S}' \cdot \vec{J} = \int_v d \left[\vec{r}' \cdot \vec{r} \vec{r}' \right] d\vec{S}' \cdot \vec{J} = 0$$

para una distribución finita de corriente. Se concluye que, a primer orden,

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV' \right) \times \vec{r} + \dots \right]$$

La aproximación dipolar

Introducir una cantidad vectorial, el **momento dipolar magnético** \vec{m} , que mide a primer orden la distribución espacial de corriente que produce el campo magnético,

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

El potencial magnético vector, en su expansión multipolar, se escribe como la suma vectorial de términos provenientes de los diferentes multipolos de la distribución de corriente,

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \vec{A}_{\text{di-polo}}(\vec{r}) + \vec{A}_{\text{4-polo}}(\vec{r}) + \vec{A}_{\text{8-polo}}(\vec{r}) + \dots$$

donde

$$\vec{A}_{\text{di-polo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

y se han omitido las expresiones de orden multipolar mayor para no complicar en exceso la descripción del campo. En analogía con el caso estático, se puede introducir un potencial magnético escalar para puntos lejanos que tomaría la forma

$$V_m^{(\text{di-polo})}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Conclusión:

- * Para puntos lejanos, el término dominante del potencial magnético vector es el término dipolar (a menos que sea nulo), decreciendo como $\frac{1}{r^2}$ con la distancia a la fuente,

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \vec{A}_{\text{di-polo}}(\vec{r}) \quad \text{para} \quad r \rightarrow \infty$$

- * **Campo magnético en aproximación dipolar**

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \implies \quad \vec{B} \simeq \vec{B}_{\text{di-polo}} + \vec{B}_{\text{4-polo}} + \dots$$

donde

$$\vec{B}_{\text{di-polo}} = \nabla \times \vec{A}_{\text{di-polo}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$

El término dipolar decae como $\frac{1}{r^3}$ con la distancia a la fuente.

En términos del potencial magnético escalar, el orden dipolar del campo magnético es

$$\vec{B}_{\text{di-polo}} = -\nabla V_m^{(\text{di-polo})}$$

que verifica el campo magnético obtenido a partir del potencial magnético vector.

* Alcance de \vec{E} vs \vec{B}

A grandes distancias de la fuente, el alcance del campo eléctrico es mayor que aquél del campo magnético.

$$r \longrightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{E}\| \sim \frac{1}{r^2} \\ \|\vec{B}\| \sim \frac{1}{r^3} \end{array} \right.$$

Modelo de un electrón.

Para ilustrar los conceptos previos, considere una esfera de masa M y carga Q , distribuidas uniformemente en un volumen de radio R , que gira con velocidad angular $\vec{\Omega}$ constante con respecto a un eje de simetría. Interesa determinar los campos eléctricos y magnéticos que produce en puntos alejados de las fuentes.

* Eléctricamente, es la carga Q la fuente del campo eléctrico.

Para puntos alejados, la distribución de carga aparece como una carga puntual ubicada en el centro de la esfera.

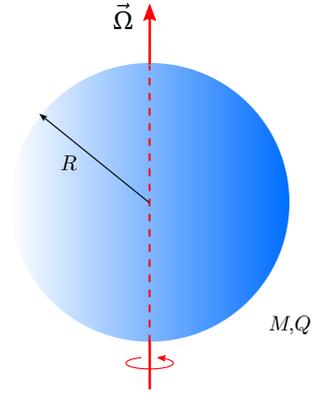
* Magnéticamente, la carga en movimiento genera una densidad de corriente \vec{J} alrededor del eje de rotación. En coordenadas esféricas y $\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$, se tiene

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \longrightarrow \vec{J} = \rho r \dot{\phi} \text{ sen } \theta \hat{\phi}$$

donde θ es el ángulo polar, ϕ es el ángulo azimutal y $\rho = 3Q/4\pi R^3$ es la densidad de carga volumétrica.

* Aproximación dipolar. Para puntos alejados de la fuente, basta calcular el momento dipolar magnético \vec{m} de la distribución de corriente \vec{J} ,

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{\text{esfera}} \vec{r} \times \vec{J} dV = \frac{1}{2} \rho \Omega \left(\int_{\text{esfera}} r^2 \text{sen}^2 \theta dV \right) \hat{k} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} Q R^2 \vec{\Omega}$$



Recordando que el momento angular de rotación de una esfera sólida de masa M y radio R con respecto a un eje de simetría es

$$\vec{L}_k = \mathcal{I}_{\text{eje}} \vec{\Omega} \quad \text{con} \quad \mathcal{I}_{\text{eje}} = \frac{2}{5} M R^2$$

Se concluye,

$$\vec{m} = \frac{Q}{2M} \vec{L}_k \longrightarrow \vec{m} = \Gamma \vec{L}_k$$

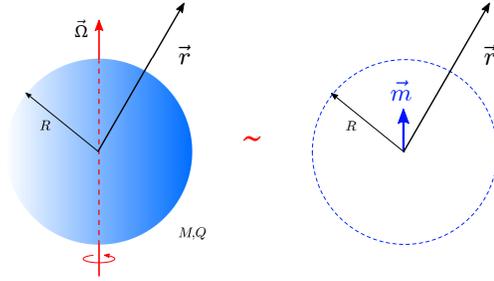
donde Γ es la razón giromagnética. Según la Mecánica Cuántica, el momentum angular de un electrón rotando es $\frac{1}{2}\hbar$, con \hbar la constante de Planck normalizada a 2π , lo cual conduce a que el electrón tiene (semiclassicamente) un momento magnético $\|\vec{m}\| = (e|\hbar)/(4m_e)$. Este resultado es erróneo por un factor casi exactamente 2.

* Los potenciales. Para puntos alejados de la fuente, el potencial eléctrico es exacto,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad r \equiv \|\vec{r}\| \geq R$$

y el potencial magnético vector, en su término dipolar dominante para $r \gg R$, es

$$\vec{A} \quad \longrightarrow \quad \vec{A}_{\text{di-polo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2} \text{sen } \theta \hat{\phi}$$



* Los campos eléctricos y magnéticos correspondientes son

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \text{y} \quad \vec{B}_{\text{di-polar}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} [3 \cos \theta \hat{r} - \hat{k}]$$

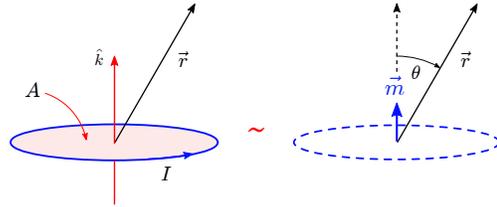
Claramente, el campo eléctrico es dominante sobre el campo magnético.

Dipolo magnético

Corresponde a una espira plana, de área A , por la que circula una corriente I .

* **Momento dipolar magnético**

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_c \vec{r}' \times (I d\vec{r}') \quad \longrightarrow \quad \vec{m} = I\vec{A}$$



con $\vec{A} = A\hat{k}$ el vector superficie de la espira cuya dirección tiene que ser consistente con la dirección de circulación de la corriente (regla de la mano derecha).

Conclusión:

Así, la bobina plana, de superficie \vec{A} y corriente I , es una representación física de la configuración dipolo magnético, de momento dipolar magnético $\vec{m} = I\vec{A}$.

$$\vec{A}_{\text{di-polo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \text{sen } \theta}{r^2} \hat{\phi} \quad r \longrightarrow \infty$$

Ejemplo:

Modelo de electrón clásico alrededor del núcleo de átomo.

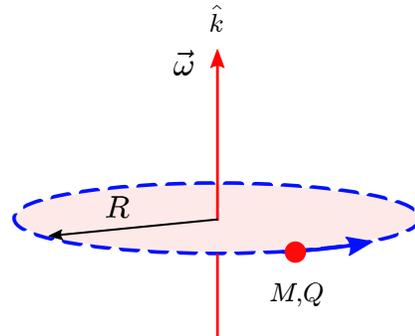
Se trata de una partícula de masa M y carga Q rota en órbita circular de radio R con velocidad angular $\vec{\Omega}$.

En este caso, el electrón está sometido a una fuerza central (Coulomb), por lo cual su trayectoria ocurre en el plano que contiene al centro de la fuerza. Para una órbita circular de área $\vec{A} = \pi R^2 \hat{k}$, el momento dipolar magnético es

$$\vec{m} = I\vec{A} = \left(\frac{Q\Omega}{2\pi}\right)(\pi R^2) \hat{k} = \frac{1}{2} QR^2 \vec{\Omega}$$

Además, el momentum angular orbital del electrón con respecto al origen es

$$\vec{\ell}_o = \vec{r} \times \vec{p} = MR^2 \vec{\Omega}$$



con lo cual, el momento dipolar magnético se expresa como

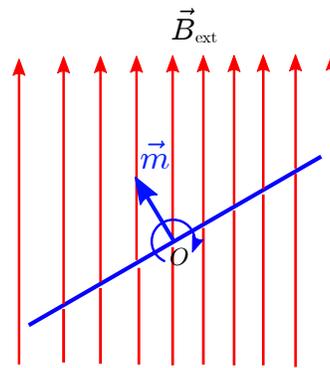
$$\vec{m} = \frac{Q}{2M} \vec{\ell}_o \quad \longrightarrow \quad \vec{m} = \Gamma_{\text{orbital}} \vec{\ell}$$

Observar la coincidencia con el resultado obtenido para una esfera cargada que rota en torno a un eje de simetría.

Fuerzas y torques sobre espiras planas

Por completitud, haremos conexión con una situación vista previamente: comportamiento de espiras planas, de geometría conocida y que llevan una corriente I, en presencia de campo magnético resultante (externo).

$$\vec{B}_{\text{ext}} \text{ uniforme: } \begin{cases} \text{(fuerza)} & \vec{F} = 0 \\ \text{(torque)} & \vec{\tau}_o = \vec{m} \times \vec{B}_{\text{ext}} \\ \text{(energía)} & W = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}} \end{cases}$$



El resultado general indica que, en presencia de un campo uniforme, no hay fuerza sobre la espira. Sin embargo, existe un torque que hará rotar la espira y su momento dipolar magnético tiende a alinearse con \vec{B}_{ext} . Ello se hace también explícito cuando se evalúa la energía de interacción W de la bobina con corriente I con el campo externo.

Hay varias aplicaciones de caracter práctico de los resultados establecidos. Uno de ellos, es el funcionamiento del motor eléctrico. Se recomienda investigar al respecto.

5.5. Aplicaciones

Alambre recto con corriente I

Considerar un alambre recto, radio a , donde circula una corriente I uniformemente distribuida en el medio conductor. ¿Cuál es el campo magnético en todo el espacio ?

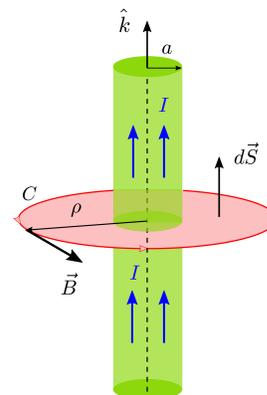
- Problema presenta simetría cilíndrica bajo suposición de alambre muy largo (∞). Luego, se espera un campo magnético

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho) \hat{\theta}$$

- Existe una densidad de corriente \vec{J} a lo largo del conductor la cual, bajo hipótesis de corriente I uniformemente distribuida,

$$\vec{J} = J\hat{k} \quad \text{con} \quad J = \frac{I}{\pi a^2}$$

- Un camino es calcular \vec{B} por integración directa.



- Alternativa: usar propiedad integral que satisface el campo y su relación con la corriente que lo genera

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \iff \oint_{C(S)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

- La clave es elegir la superficie adecuada y la curva que la limita para aprovechar las simetrías que presenta el campo magnético.

- Tomar un disco circular como superficie de integración de radio ρ ($S = \pi a^2$). Luego la trayectoria que limita al disco es $d\vec{r} = \rho d\theta \hat{\theta}$.

- Se distinguen 2 zonas: $\rho \leq a$. Entonces

$$\oint_{C(S)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} B(\rho) \rho d\theta = B(\rho) \rho 2\pi = \begin{cases} \mu_0 J \pi \rho^2 & \rho < a \\ \mu_0 J \pi a^2 & \rho > a \end{cases}$$

- **Conclusión:** $\vec{B} = B(\rho) \hat{\theta}$ con $B(\rho) = \begin{cases} \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi a^2}\right) \rho & \rho < a \\ \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi}\right) \frac{1}{\rho} & \rho > a \end{cases}$

El campo magnético crece linealmente en el interior, hasta la superficie del alambre. Luego decae con el inverso de la distancia al eje del alambre. Notar que el campo exterior al alambre es independiente del tamaño de la sección del alambre.

La variación de la magnitud del campo magnético con la distancia al alambre se muestra en la figura.

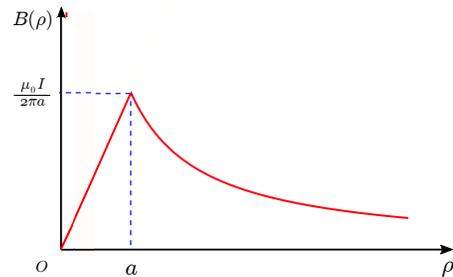


Lámina plana conductora con densidad \vec{K}

La idea es considerar una lámina plana muy grande (∞), espesor despreciable, recorrida por una densidad de corriente \vec{K} . Calcular el campo magnético en todo el espacio.

- Considere la lámina contenida en el plano (y, z) . Debido a que lámina donde circula la corriente es muy grande, se espera que el campo sólo dependa de la distancia al plano de la lámina (x) .

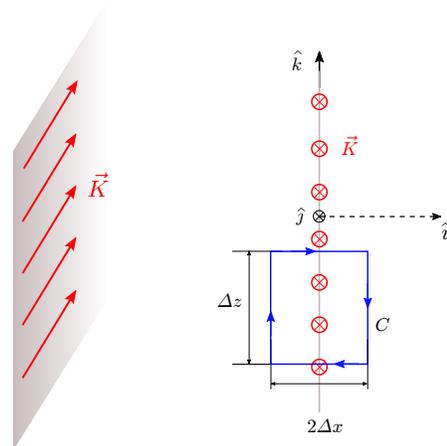
$$\vec{K} = K \hat{j} \implies \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(x) = B(x) \hat{k}$$

La dirección del campo sólo puede ser según \hat{k} . Caso contrario, las líneas de campo cortarían la lámina y, por consiguiente, la corriente (viola ecuaciones de Maxwell).

- Un breve análisis de la dirección del campo muestra que depende del lado en que se encuentra con respecto al plano,

$$B(-x) = -B(x)$$

- Usar ley circuital de Ampere para aprovechar simetría del problema. Elegir una superficie rectangular



(ver figura) centrada en eje \hat{k} ($d\vec{S} = dS \hat{j}$):

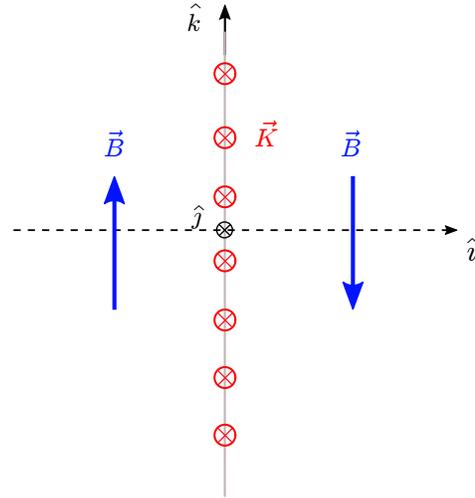
$$\oint_{C(S)} \vec{B}(x) \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \implies -B(\Delta x)\Delta z + B(-\Delta z)\Delta z = \mu_0 K \Delta z$$

Conclusión:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mu_0 K \hat{k} & x > 0 \\ \frac{1}{2} \mu_0 K \hat{k} & x < 0 \end{cases}$$

El campo es **uniforme** a ambos lados de la placa, pero con sentidos opuestos.

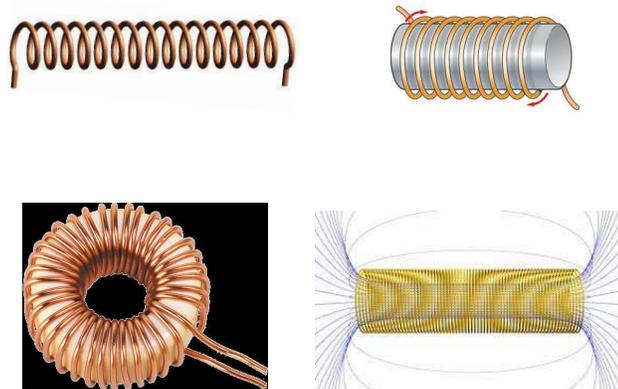
Un problema similar se puede plantear con una lámina de ancho finito δ por donde circula una densidad de corriente $\vec{J} = J \hat{j}$.



Solenoid recto (ideal)

Corresponde a una bobina o enrollado de un alambre conductor, muy larga, de geometría conocida (su radio o diámetro), de m vueltas por unidad de largo y por donde circula una corriente I . El enrollado puede estar en el vacío o usar un material como soporte (núcleo).

Especial interés existe con bobinas con un núcleo de material ferromagnético (Fe, Co, Ni, aleaciones), situación que estudiaremos más adelante.



El campo magnético, en coordenadas cilíndricas, está dado por

$$\text{para } \vec{J} = J \hat{\theta} \implies \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 m I \hat{k} & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$$

El campo es uniforme al interior del solenoide y nulo en su exterior (para bobina infinitamente larga). Para situaciones reales, es una buena aproximación.

¿Cómo se obtiene el resultado?

Aprovechando simetrías que presenta la bobina y aplicando juiciosamente ley circuital de Ampere.

- La magnitud de \vec{B} sólo puede depender de distancia ρ al eje de bobina. Y su dirección es según \hat{k} .

$$\vec{B} = B(\rho) \hat{k}$$

- Tomar superficie limitada por C_1 que pasa por eje de bobina:

$$B(\rho_2) \delta - B(\rho_1) \delta = 0 \implies B(\rho_2) = B(\rho_1) = B_{\text{ext}}$$

- El campo externo a la bobina es uniforme en todo del espacio fuera de bobina. Luego, debe coincidir con su valor para puntos muy alejados, que es nulo.

$$B_{\text{ext}} = 0$$

- Tomar superficie limitada por C_2 que pasa por eje de bobina, para tener comportamiento del campo al interior de la bobina. Como en el caso previo, se puede concluir

$$B(\rho) = B_{\text{int}} \quad \text{constante} \quad (\rho < a)$$

- Tomar superficie limitada por C_3 que pasa por eje de bobina, para tener el valor del campo al interior de la bobina.

$$B_{\text{int}} \delta = \mu_0 I m \delta \implies B_{\text{int}} = \mu_0 m I$$

- Caso especial

En lugar de tener una bobina de m vueltas por unidad de largo, llevando una corriente I , se podría tener una película metálica de espesor despreciable, con la misma geometría de la bobina, donde circula una densidad superficial de corriente $\vec{K} = K \hat{\theta}$. El campo producido es el mismo con el reemplazo $mI \rightarrow K$.

- Potencial magnético vector

Se plantea calcular \vec{A} a partir del conocimiento del campo magnético para un solenoide ideal. Considerando una superficie S encerrada por curva C ,

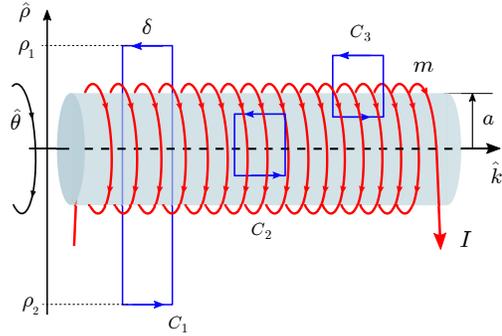
$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \implies \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{C(S)} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

es decir, el flujo magnético del campo a través de una superficie S es igual a la integral de línea de \vec{A} según la trayectoria que encierra a S .

Tomando S como un círculo de radio $\rho \leq a$ con $d\vec{S} = dS \hat{k}$, demostrar

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2} B_{\text{int}} \rho \hat{\theta} & \rho < a \\ \frac{1}{2} B_{\text{int}} a^2 \frac{1}{\rho} \hat{\theta} & \rho > a \end{cases}$$

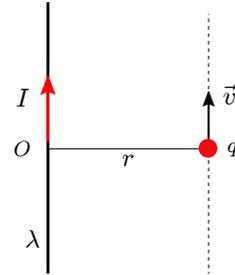
La existencia de \vec{A} en zona externa al solenoide, aunque $B_{\text{ext}} = 0$, es un resultado muy interesante. Más novedoso resultará en el caso que la corriente I dependa del tiempo.



5.6. Problemas

M-1 (Examen-2018P) Una partícula con carga q viaja con velocidad \vec{v} paralela a un alambre que tiene una distribución uniforme de carga por unidad de longitud λ . Por el alambre también circula una corriente I , como se muestra en la figura.

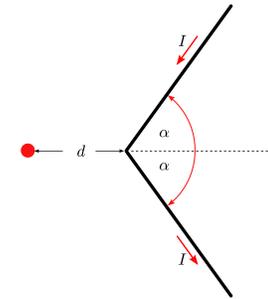
Determine cuál debe ser la velocidad de la partícula para que viaje en línea recta, paralela al alambre y a una distancia r de éste.



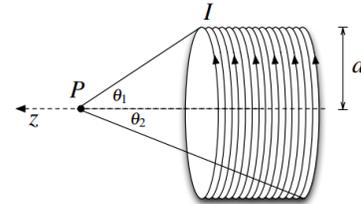
M-2 (C2-2017P) Biot y Savart, en 1819, derivaron su epónima fórmula manipulando una corriente que pasaba por un cable muy largo, doblado como se indica en figura. Seguro que Ud. puede verificarla !!

Calcule el campo magnético \vec{B} en el plano del cable, a una distancia d de la curva sobre su eje de simetría.

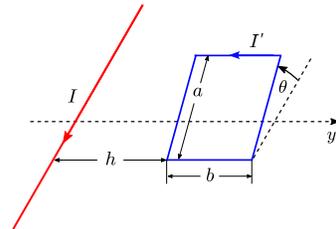
Respuesta (pág. 215)



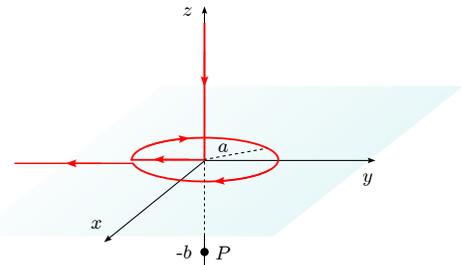
M-3 Encuentre el campo magnético en el punto P sobre el eje de una bobina cilíndrica de radio a con una densidad de n vueltas por unidad de largo que lleva una corriente I . Exprese su respuesta en términos de θ_1 y θ_2 (ver figura).



M-4 Un alambre conductor muy largo, que lleva corriente I , coincide con el eje x de un cierto sistema de coordenadas. Calcule el torque que el alambre ejerce sobre una espira conductora rectangular, de lados a y b , donde circula una corriente I' y cuyo plano forma un ángulo θ con el plano xy e intersecta al eje y en $y = h$ e $y = h + b$ (figura).

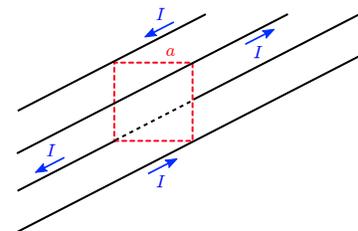


M-5 (C2.2-2022P) Se dispone de un conductor cuya forma es la indicada en la figura, prolongándose hasta $y = -\infty$ y $z = +\infty$. Por este conductor circula una corriente I en el sentido indicado. Calcular el campo magnético en el punto P de coordenadas $(0, 0, -b)$.



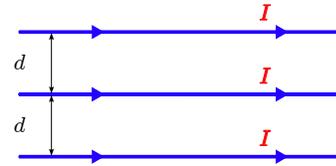
M-6 Cuatro alambres, infinitos y paralelos entre sí, pasan por los vértices de una sección cuadrada de lado a [m] como se indica en figura. Cada conductor lleva una corriente I [A] en las direcciones indicadas.

- a) Calcular el campo magnético en el centro del cuadrado.
- b) Calcular la fuerza por unidad de largo que actúa sobre uno de los alambres.

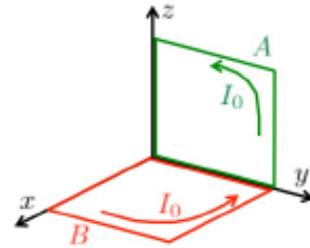


M-7 (C2.5-2022P) Considere 3 cables rectos paralelos, infinitamente largos, separados una distancia d entre ellos y cada uno con corriente I en la misma dirección.

- Determine los puntos donde el campo magnético es nulo.
- Esboce las líneas de campo magnético.
- Si el cable del centro es desplazado una pequeña distancia $x \ll d$, paralelo a los otros dos cables que permanecen fijos, describa cualitativamente el movimiento subsecuente del cable central.

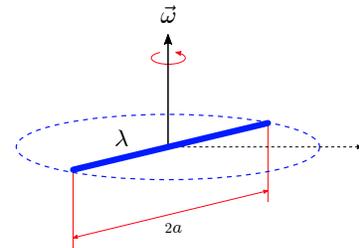


M-8 (C2-2023-P) Dos espiras cuadradas de lado L llevan corrientes de magnitud $I_0 (> 0)$, las que circulan como se indica en la figura. La espira A posee uno de sus vértices en el origen de coordenadas y sus aristas son paralelas a los ejes y y z . La espira B también posee uno de sus vértices en el origen de coordenadas y sus aristas son paralelas a los ejes x e y .

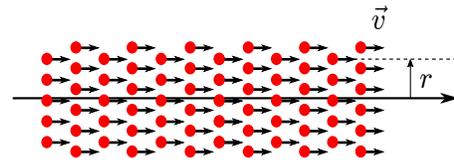


Si existe un campo magnético dado por $\vec{B} = B_0 (1 + \frac{x}{L}) \hat{z}$, encuentre las fuerzas y torques (con respecto al origen de coordenadas) que actúan sobre cada una de las espiras, sin hacer aproximaciones!

M-9 Determine el campo magnético en un punto del eje de rotación de una barra de longitud $2a$, con carga uniformemente distribuida λ por unidad de longitud, que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$.



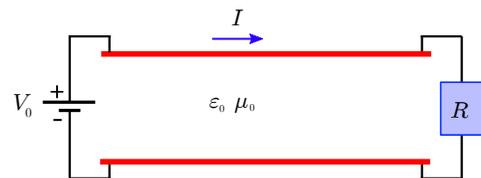
M-10 (C3-2016P) Se tiene un haz de partículas cargadas, uniformemente distribuidas alrededor de su eje de simetría, que se mueven con velocidad \vec{v} . Suponiendo que el haz mantiene su geometría cilíndrica, compare la fuerza eléctrica y la fuerza magnética (indique sus direcciones y calcule la razón entre sus magnitudes) que experimenta cada partícula. Le merece algún comentario su resultado?



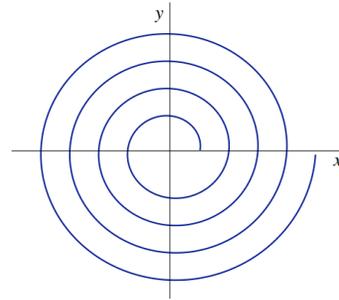
Indicación: Es libre de darse cualquier dato que considere relevante para encontrar su respuesta.

M-11 (Examen-2021O) Dos cables conductores alimentan un consumo eléctrico R cualquiera. Tienen una capacidad por unidad de largo C_ℓ [Farad/m] entre ellos y cuando se les aplica una diferencia de potencial V_0 , circula una corriente I por ellos.

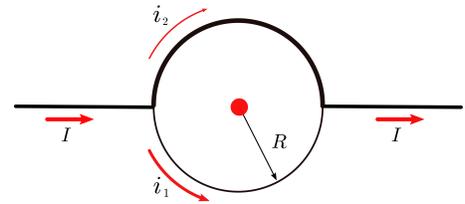
Suponiendo que el largo de los cables es mucho mayor que la separación entre ellos, determine la razón entre la diferencia de potencial V_0 y la corriente I en los conductores cuando la atracción electrostática entre los cables compensa su repulsión magnética. **Respuesta** (pág. 215)



M-12 Considere un alambre que ha sido doblado de la forma que se indica la figura, siguiendo la curva $r(\theta) = \frac{\theta}{2\pi} + 1$ en coordenadas cilíndricas dando n vuelta alrededor del origen. Si por el alambre se hace circular una corriente I en sentido anti-horario, determine el valor del campo magnético en el origen.



M-13 Un anillo conductor de radio R se conecta a dos cables como se indica en la figura. Los cables son rectos, semi-infinitos y cada uno lleva una corriente I . El anillo está hecho de 2 conductores semicirculares de resistencias $R_1 = 1 [\Omega]$ y $R_2 = 3R_1$ respectivamente. Determine el campo magnético \vec{B} en el centro del anillo.



M-14 a) Demuestre que la magnitud de campo magnético \vec{B} en el centro de una espira cuadrada, de lado ℓ [m] y por la que circula una corriente I [A], es

$$\|\vec{B}\| = \mu_0 \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) \left(\frac{I}{\ell} \right)$$

b) Generalice el problema para un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio a y demuestre que en, su centro,

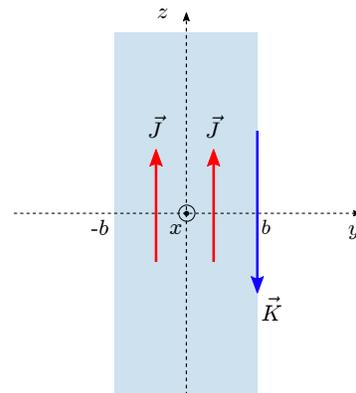
$$\|\vec{B}\| = \mu_0 \left(\frac{n}{2\pi} \right) \tan \frac{\pi}{n} \left(\frac{I}{a} \right)$$

c) Pruebe que la expresión previa se aproxima a la magnitud del campo magnético en el centro del círculo cuando $n \rightarrow \infty$.

M-15 (C3-2021O) Un bloque, de extensión infinita en el plano xz , tiene espesor $2b$ en la dirección y , estando dispuesto de forma que una cara coincide con el plano $y = +b$ y la otra con el plano $y = -b$. Una densidad de corriente volumétrica $\vec{J} = J_0 \hat{z}$ existe al interior del bloque (J_0 es constante). Adicionalmente, hay una corriente superficial $\vec{J}_s \equiv \vec{K} = -2bJ_0 \hat{z}$, en el plano $y = +b$.

- a) Encuentre el campo magnético en todo el espacio (dentro y fuera del bloque).
- b) Verifique explícitamente que dentro del bloque se cumple:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$



Respuesta (pág. 215)

M-16 Se enrolla un cable conductor en hélice de ángulo α en la superficie de un cilindro aislante de radio a , de modo que efectúa n vueltas completas en el cilindro. Si se hace circular una corriente I por el cable, pruebe que la magnitud del campo magnético resultante en el centro del cilindro es

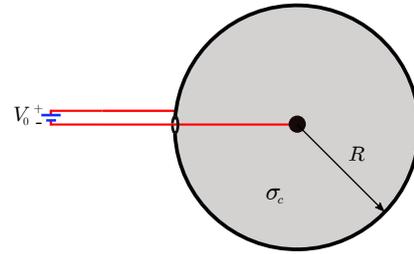
$$\|\vec{B}\| = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{n}{\sqrt{1 + [n\pi \tan \alpha]^2}} \right) \left(\frac{I}{a} \right)$$

M-17 (C2-2020P) El espacio entre dos superficies conductoras perfectamente esféricas (radios R y $r \ll R$) se llena con material de conductividad $\sigma_c (\equiv g)$. Mediante alambres conductores ideales (recubiertos con un material aislante perfecto y colocados muy cercanos) es posible conectar las superficies a una batería externa que provee una diferencia de potencial V_0 constante entre ellas. Interesa conocer,

- La corriente que circula por los alambres.
- El campo magnético en todo el espacio.

Importante: Suponga radial la distribución de la densidad de corriente entre las esferas (no es afectada por los alambres que van a la batería).

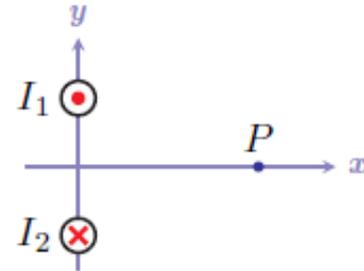
Respuesta (pág. 215)



M-18 (Examen-2020P) Dos conductores rectos muy largos, se extienden paralelos al eje z y llevan corrientes $I_1 = 3,2$ A hacia fuera de la página e $I_2 = 3,2$ A entrando a la página, respectivamente. La distancia entre conductores es $26,6$ cm y el punto P está en $x = +35$ cm.

- Encontrar las tres componentes del campo magnético en el punto P sobre el eje x .
- Si un electrón viaja en la dirección $+z$ a 5200 m/s, ¿cuál es la magnitud y dirección de la fuerza magnética que se ejerce sobre él cuando pasa por P ?
- ¿Qué campo eléctrico (establecer sus componentes) sería necesario aplicar al electrón de parte (b) para que la fuerza neta sobre él se anule?

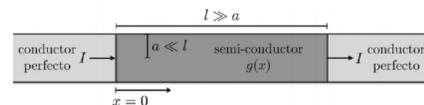
Respuesta (pág. 215)



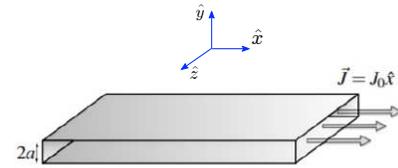
M-19 Considere dos cables coaxiales de radio a y b como muestra la figura, cuyo espacio interior se encuentra vacío. Los cables se encuentran separados a una diferencia de potencial V_0 y entre ellos existe un campo magnético homogéneo $\vec{B} = B\hat{z}$. Desde el cilindro interior se libera un electrón de carga $-e$ y masa m .

El objetivo del problema es encontrar el valor máximo de \vec{B} de modo que el electrón liberado no choque con el cilindro exterior (alcance a dar la vuelta perfectamente). Suponga que la velocidad del electrón tiene solamente componentes en el plano de la figura.

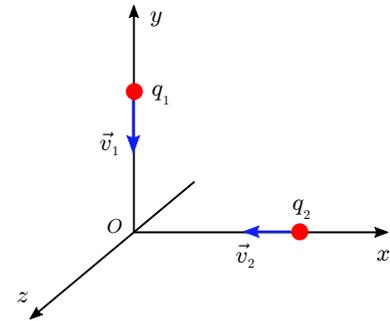
- Encuentre el momentum angular del electrón en función de carga e , el campo magnético B , y la distancia al eje del cilindro interior r y momentum angular inicial L_0 .
- Si los electrones salen con rapidez inicial $v_0 \approx 0$, encuentre la rapidez que tendrán en $r = b$.
- Mediante conservación de energía, encuentre otra expresión para la velocidad recién calculada. Entonces, encuentre el valor que debería tener B , para que a los más el electrón volviese en $r = b$.



M-20 Se tiene una lámina infinitamente larga, de espesor $2a$, que yace sobre el plano $\{x, z\}$ en la cual fluye una densidad de corriente $\vec{J} = J_0 \hat{x}$.



M-21 (Examen-2020P) Dos partículas, de masas y cargas $\{m_1, q_1\}$ y $\{m_2, q_2\}$ respectivamente, viajan sobre rieles que las restringe a tener un movimiento uniforme con velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 constantes, como se indica en figura.



a) Calcule la fuerza electromagnética neta (o total) que se ejerce sobre cada partícula y verifique explícitamente si se satisface el principio de acción y reacción de Newton.

b) En un sistema aislado de 2 partículas que interactúan se espera conservación del momentum mecánico total $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, con \vec{p}_i el momentum de la partícula i .

¿Existe contradicción con el resultado obtenido en (a)? ¿Algo nuevo se aprende del análisis?

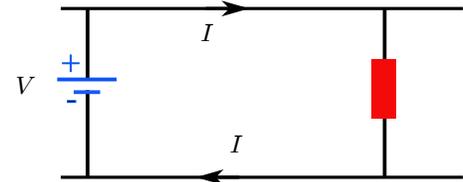
(Nota: $\vec{J}dV = \vec{v}dq$, con \vec{J} la densidad de corriente, dV el elemento de volumen y dq el elemento de carga.)

M-22 Se tienen dos cargas idénticas q que están a una distancia fija d unidas por una barra aislante sin masa ni carga. Por la unión entre las cargas, ambas se desplazan con velocidad \vec{v} . Estudiar:

a) La relación entre las fuerzas eléctrica y magnética entre las cargas.

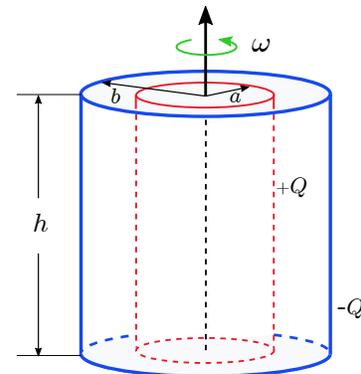
b) Ahora nos ubicamos en un sistema de referencia cuyo origen está en el punto medio de la barra que une las cargas. Determinar las fuerzas electromagnéticas en ese sistema de referencia, comente al respecto.

M-23 (Examen-2021O) Una línea de alta tensión, formada por dos cables paralelos, tiene una capacidad C_ℓ por unidad de largo. Un extremo de la línea se alimenta con una diferencia de potencial V , producto de lo cual circula una corriente I por el sistema.



Determine la razón entre la corriente I y la diferencia de potencial V de modo que la atracción electrostática compense la repulsión magnética entre los cables.

M-24 Los cascarones cilíndricos concéntricos de un condensador cilíndrico tienen radios a y $b > a$ y altura $h \gg a, b$. La carga en el cascarón interior es Q y $-Q$ en el exterior, como se muestra en la figura. Considere que el condensador completo rota entorno a su eje de simetría con velocidad angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Desprecie los efectos de borde.



a) Encuentre el campo magnético \vec{B} en todo el espacio.

b) Evalúe la fuerza magnética que sienten las cargas en las superficies conductoras del condensador y compárela con la fuerza electrostática.

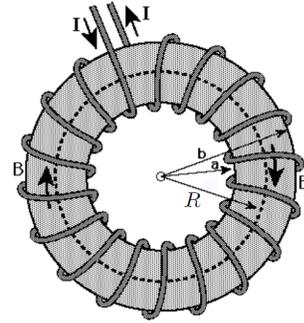
M-25 Un cilindro con polarización constante, de radio r y altura h , gira con velocidad angular ω_0 en torno a su eje de simetría. Calcular el campo magnético en el centro del cilindro en el caso que:

a) La polarización sea paralela al eje \hat{z} , o sea $\vec{P} = P\hat{z}$.

b) La polarización sea radial, o sea $\vec{P} = P\hat{r}$.

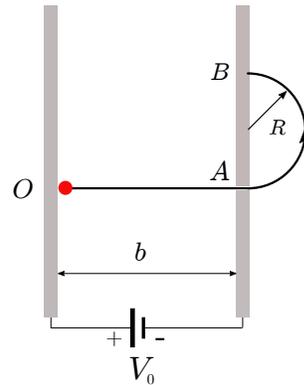
M-26 (E8-2016P) Considere una bobina toroidal, de radio interior a y exterior b , sección circular, con N vueltas de conductor y por la que circula una corriente I . Suponiendo que el enrollado es suficientemente compacto (N grande) y el radio medio de la bobina $R = \frac{1}{2}(a+b)$ es mucho mayor que el diámetro $(b-a)$ de su sección circular.

Calcular y graficar el campo magnético \vec{B} y el potencial magnético vector \vec{A} en todo el espacio.



M-27 (C3-2018P) Dos láminas conductoras, planas y paralelas, separadas una distancia b , se extienden infinitamente. Entre ambas láminas se aplica una diferencia de potencial V_0 . Si una partícula de carga q y masa m parte del reposo en una lámina, describe la trayectoria indicada en la figura, pasando a través de un orificio pequeño en la otra lámina. Determine la densidad de corriente superficial que deben circular en cada lámina, en magnitud y sentido.

Trayectoria: OA : recta perpendicular a las láminas; AB : semicircunferencia de radio R .



M-28 a) ¿Qué densidad de corriente puede producir un potencial vector de la forma $\vec{A} = k\hat{\phi}$ (donde k es una constante) en coordenadas cilíndricas?

b) Si un campo magnético es uniforme, muestre que un potencial magnético vector de la forma $\vec{A}(r) = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B})$ es válido. ¿Es este resultado único?

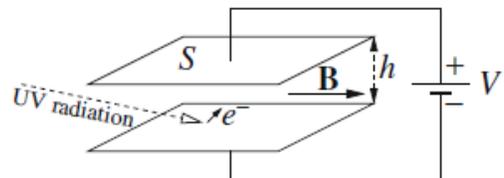
c) Encontrar el potencial vector en todo el espacio en presencia de una carga superficial $\vec{K} = K\hat{x}$ que vive en el plano $x-y$.

M-29 Una partícula con carga q y masa m está inicialmente en reposo en presencia de un campo eléctrico \vec{E} y uno magnético \vec{B} , ambos perpendiculares entre sí.

a) Describa el movimiento de la partícula debido a los campos.

b) Usar el resultado de la parte anterior para la siguiente situación: Se tiene un condensador de placas paralelas con superficie S , una separación entre las placas h y hay una diferencia de potencial V entre ellas.

Un campo magnético \vec{B} se aplica al condensador, de forma perpendicular al campo eléctrico del condensador (o sea, paralelo a las placas). La radiación ultravioleta causa que la placa con carga negativa emita electrones con velocidad inicial cero. Evaluar el valor del campo magnético tal que los electrones no puedan llegar a la placa positiva.

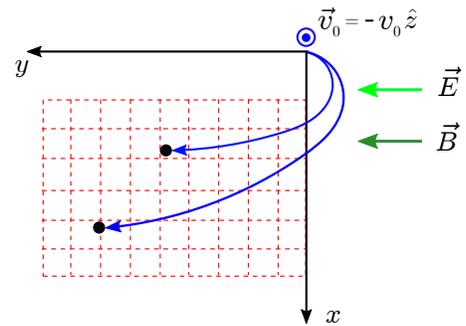


M-30 a) Se tiene un disco de radio R , que posee una densidad de carga σ y gira con una velocidad angular constante ω . Encontrar su momento dipolar magnético.

b) Encontrar el momento dipolar para un cascarón esférico cargado (de densidad de carga σ), que gira con una velocidad angular ω en torno a un eje vertical.

M-31 El espectrómetro de masas es un instrumento que separa iones según sus velocidades y sus razones entre carga y masa. Calcule la posición en que se recoge (plano xy) un ion de carga Q , masa M y velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0 \hat{z}$. Indique como sus resultados permiten identificar iones de diferente razón (Q/M) y de diferentes velocidades.

El dispositivo tiene campos eléctricos y magnéticos uniformes, $\vec{E} = E \hat{y}$ y $\vec{B} = B \hat{y}$, para $x > 0$ y $z < 0$.



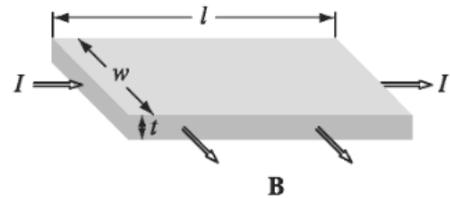
M-32 Una corriente I fluye hacia la derecha a través de una barra rectangular hecha de un material conductor, en presencia de un campo magnético \vec{B} que apunta en dirección perpendicular a la corriente (paralela al lado intermedio del rectángulo).

a) Si las cargas que se mueven son positivas, ¿En qué dirección son desviadas por el campo magnético?

Esta desviación de las cargas genera una acumulación de carga en las superficies superiores e inferiores de la barra, lo cual genera una fuerza eléctrica que se contrarresta con con la magnética. El equilibrio ocurre cuando las dos fuerzas se cancelan.

b) Encontrar la diferencia de potencial entre la superficie superior e inferior de la barra en términos de B , v (velocidad de las cargas) y las dimensiones de la barra.

c) ¿Cómo cambiaría su análisis si las cargas en movimiento fueran negativas?



M-33 Dos dipolos magnéticos \vec{m}_1 y \vec{m}_2 se encuentran en las posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 respectivamente.

a) Calcule el campo \vec{B} producido por \vec{m}_1 en el lugar donde se encuentra \vec{m}_2 .

b) Calcule la energía de interacción.

c) Finalmente calcule el torque entre los dipolos.

M-34 Una esfera de radio a [m], cargada con una densidad superficial uniforme σ [C/m²], gira alrededor de un eje que pasa por el centro con una velocidad angular constante $\vec{\omega}$ [rad/s].

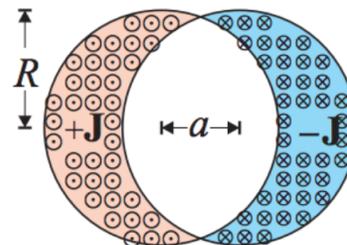
a) Calcular el campo magnético en el centro de la esfera.

b) Demuestre, por medio de la relación $\nabla \times \vec{B} = 0$ dentro de la esfera, que el valor calculado de \vec{B} corresponde a su valor en cualquier punto del volumen esférico.

M-35 Se tienen dos cilindros infinitamente largos y paralelos, cada uno de radio R . Por los cilindros circulan densidades de corriente uniformes $+J\hat{z}$ y $-J\hat{z}$, respectivamente. Los ejes de los cilindros distan una distancia $a < 2R$.

a) Demuestre que el campo magnético en la zona de intersección es constante. Determine el valor.

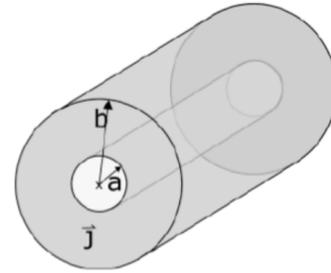
b) Calcule el campo magnético para puntos alejados de los dos cilindros.



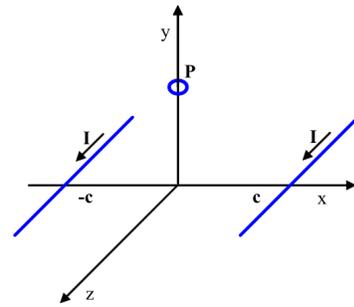
M-36 Considere un conductor cilíndrico infinito de radio interior a y radio exterior b . El conductor lleva una densidad de corriente no uniforme dada por,

$$\vec{J} = \frac{\alpha}{r} \hat{\theta} + \beta \hat{z},$$

donde α y β son constante y r es la distancia de un punto interior del conductor al eje de éste. Determine el campo magnético en todo el espacio.



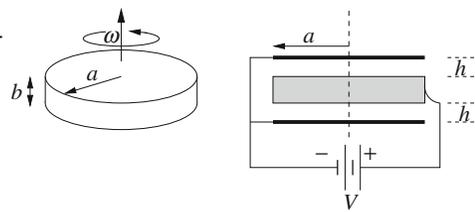
M-37 Dos alambres lineales indefinidos, paralelos al eje z , interceptan el eje x en los puntos de coordenadas $(\pm c, 0, 0)$, siendo $c = 0,1$ m. En los cables circula una corriente $I = 100$ A en la dirección del eje z . En punto $P = (0, a, 0)$, donde $a = 20$ cm, se coloca una pequeña espira circular, de radio $r = 1$ mm, en la cual circula una corriente $I_s = 2,0$ A. El plano de la bobina es paralelo al plano $x-z$ y la corriente I_s , observando la bobina desde arriba, circula en sentido anti-horario.



Calcular:

- las componentes del campo magnético generado por los dos alambres en el punto P ;
- el momento de la fuerza necesario para mantener la espira inmóvil;
- el trabajo realizado por las fuerzas externas al dar una vuelta de 180° a la espira;
- la fuerza total sobre la espira cuando se encuentra en la posición del punto a).

M-38 El experimento de Henry A. Rowland (1876) se proponía mostrar que las cargas en movimiento generan campos magnéticos. Un disco metálico de radio $a = 10$ cm y espesor $b \ll a$ está eléctricamente cargado y se mantiene rotando con una velocidad angular constante $\omega = 2\pi \times 10^2$ rad/s. El disco gira entre dos placas conductoras, la primera a distancia $h = 0,5$ cm por encima del disco, y la otra a la misma distancia h por debajo.



Las placas están conectadas a un mismo terminal de una fuente que mantiene una diferencia de potencial $V_0 = 10^4$ V, con respecto al disco (mediante un contacto deslizante).

Calcular:

- la densidad de carga superficial en las superficies del disco;
- el campo magnético \vec{B}_c cerca del centro del disco y la componente del campo magnético B_r paralela a la superficie del disco en un punto muy cercano a ésta, en función de la distancia r desde el eje del disco;

La componente B_r medida a una distancia $r = a$ puede ser medida orientando el dispositivo tal que la dirección radial r es perpendicular con el campo magnético terrestre $B_* = 5 \times 10^{-5}$ T, y midiendo la desviación de una aguja magnética cuando el disco gira. Encontrar,

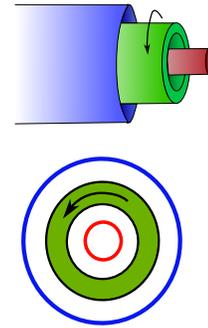
- la desviación, en ángulo, de la aguja.

Respuesta (pág. 215)

M-39 Entre dos electrodos cilíndricos coaxiales, de radio a y b ($b \gg a$), se aplica una diferencia de potencial constante V_0 . Un campo magnético constante \vec{B} se aplica entre los cilindros en dirección paralela a su eje. Si la magnitud del campo magnético $B = \|\vec{B}\|$ es mayor que un cierto valor crítico B_c , los electrones que parten con velocidad nula desde el cátodo ($r = a$) no alcanzan el ánodo ($r = b$). Encontrar el valor crítico B_c .

M-40 (C2.4-2022P) Se tienen dos superficies cilíndricas aislantes concéntricas muy largas de radios a y $4a$. La superficie interior almacena una carga con una densidad superficial σ uniformemente distribuida, mientras que la superficie exterior almacena carga con una densidad superficial $-\sigma$.

Un cilindro muy largo hecho de un material de permitividad eléctrica ϵ se encuentra concéntrico a las superficies aislantes y rota con una velocidad angular ω respecto a su eje. El cilindro dieléctrico tiene un radio interior $2a$ y radio exterior $3a$. Determine el campo eléctrico y el campo magnético en todo el espacio.



M-41 Una cavidad cilíndrica hueca no conductora, de largo $2L$ y radio R , tiene bobinas enrolladas en sus extremos y en la zona central y son alimentadas con corriente continua, de modo tal que en el interior del cilindro se establece un campo magnético estático dirigido en la dirección axial (ver figura). La componente axial del campo presenta una leve variación con la posición de la forma

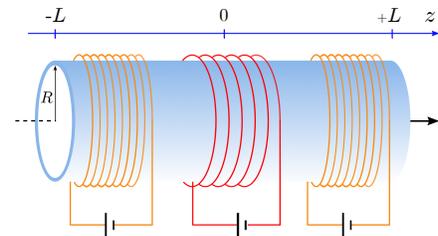
$$B_z(z) = B_0 e^{\frac{|z|}{10L}}.$$

Si en $t = 0$ se suelta una partícula de carga q y masa m con velocidad inicial

$$\vec{v}(0) = v_{z0} \hat{z} + v_{\phi0} \hat{\phi}$$

desde la posición $z = 0$, $\rho = a$ con $a \ll R$,

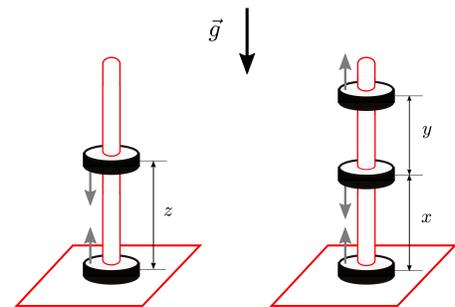
- muestre que, en primera aproximación, el flujo magnético enlazado por cada vuelta de la trayectoria helicoidal que describe q es constante;
- determine la relación entre v_{z0} y $v_{\phi0}$ para que la carga rebote en los extremos $z = \pm L$ de la cavidad y en consecuencia quede confinada a ella.



M-42 (C3-2017P) Un juguete relativamente famoso consiste en pequeños imanes con forma de anillo, que pueden deslizarse sin fricción en una barra vertical. Las escalas del sistema permiten considerar los imanes como dipolos de masa m_d y momento dipolar \vec{m} .

- Si se colocan dos imanes '*de espaldas*' en la barra, calcule la altura a la que levitará el imán superior.
- Si ahora se agrega un tercer imán (cuyo momento dipolar coincide con el imán de la base), ¿cuál es la razón entre las distancias que separan imanes consecutivos?

Respuesta (pág. 215)

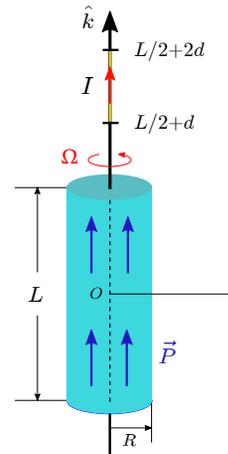


M-43 En la superficie de un conductor cónico hueco fluye una densidad de corriente \vec{K}_s desde el vértice hacia la base. El vector \vec{K}_s no tiene componente azimutal alrededor del eje del cono.

- Calcule la componente azimutal del campo magnético dentro y fuera del cono.
- Un haz de protones choca contra un blanco fijo colocado al interior del cono, justo en el vértice. En el choque se producen piones cargados (π^+ , π^-) que entran al cono y pueden atravesar libremente la superficie de éste. Indique si el campo magnético tiene el efecto de enfocar o desenfocar los piones de carga positiva.

M-44 (C2-2021P) Se tiene un cilindro de material dieléctrico, radio R y largo L , con una polarización permanente $\vec{P} = P_0 \hat{k}$ en el sentido axial (ver figura). El cilindro rota con velocidad angular constante $\vec{\Omega}$ en torno a su eje.

- Determinar el campo magnético en el eje del cilindro.
- Calcular la fuerza sobre un alambre de longitud d , por el que circula una corriente I , colocado en el eje del cilindro y a una distancia d de su cara superior.
- Si el alambre con corriente se ubica en el eje pero en puntos muy lejanos del centro del cilindro ($d \gg L$), ¿cuál es el campo magnético en aproximación dipolar y la fuerza correspondiente sobre el alambre?



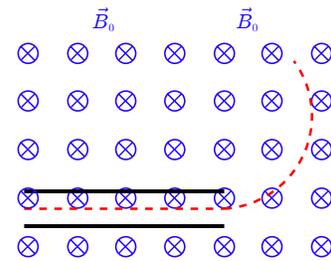
M-45 Considere una esfera maciza de radio R , con densidad de carga volumétrica $\rho(\vec{r}) = kr^2$, con r la distancia al centro de la esfera y k una constante. La esfera gira en torno al eje \hat{z} con rapidez angular ω .

- Discuta en que zonas es posible definir un potencial escalar magnético tal que $\vec{B} = -\nabla V_m$ y calcúlelo donde sea posible.
- Encuentre el campo magnético en todo el espacio.

M-46 Una esfera dieléctrica de radio R y polarización permanente \vec{P}_0 rota con velocidad angular constante ω_0 en torno a un eje central de dirección igual a la de su polarización.

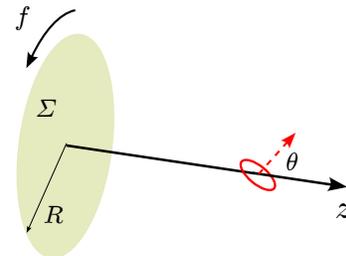
Calcule el campo magnético fuera de la esfera, el que está inducido por las cargas de polarización en movimiento en la esfera. Considere $\omega_0 R \ll c$ ($c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ es la velocidad de la luz).

M-47 Un condensador de placas planas se mantiene inmerso en un campo magnético uniforme \vec{B}_0 paralelo a las placas del condensador. Una partícula de carga q se propaga entre las placas. Este movimiento rectilíneo se logra calibrando adecuadamente la diferencia de potencial entre las placas del condensador (V_0). Cuando las partículas abandonan el condensador, éstas experimentan trayectorias circulares debido al campo magnético \vec{B}_0 . Si las trayectorias son de radio R , determine la masa de las partículas cargadas.



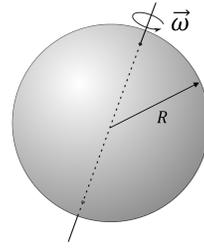
M-48 (C2-2023-P) Un disco de material aislante, radio R , está cargado con una densidad de carga superficial uniforme Σ y gira alrededor de su propio eje haciendo f revoluciones por segundo.

- Determine el campo magnético generado por el disco en un punto a la distancia z sobre el eje de rotación.
- Ahora, a una distancia $z = d$ sobre el eje del disco se pone una espira circular de radio $r = 1\%R$ en la cual circula una corriente eléctrica I . Determine el módulo y la dirección de la fuerza sobre la espira cuando se orienta en la dirección del eje z .

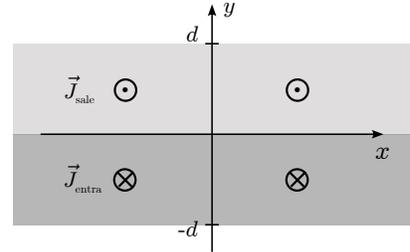


Respuesta (pág. 215)

M-49 Una esfera cargada de radio R con carga uniformemente distribuida Q se encuentra girando con velocidad angular $\vec{\omega}$ constante. Calcule el campo eléctrico y magnético que produce este sistema en todo el espacio.



M-50 (C2-2023-P) La figura muestra dos bloques de material por los que circula corriente. Ambos bloques tiene un espesor d en la dirección y y son infinitos en las direcciones $\{x, z\}$. El bloque superior tiene una corriente entre $0 < y < d$, cuya densidad conocida es uniforme $\vec{J} = J\hat{z}$ (hacia fuera de la página). El bloque inferior tiene una corriente entre $-d < y < 0$, cuya densidad también conocida es uniforme $\vec{J} = -J\hat{z}$ (hacia el interior de la página).



- Calcule el campo magnético en todo el espacio. Justifique en detalle su enfoque.
- Calcule la presión magnética (fuerza magnética por unidad de área) que cada bloque experimenta debido al otro.

Campos magnéticos en la materia

6.1. Magnetización del medio material

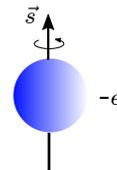
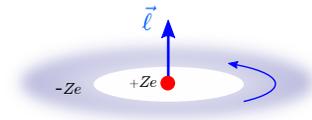
6.1.1. Fenomenología

En el estudio de los campos magnéticos, es natural preguntarse cómo ellos se modifican cuando se encuentran en presencia de un medio material.

La pregunta tiene que ver con la estructura atómica de la materia y su comportamiento en presencia de campos magnéticos externos. En los átomos, cada electrón orbita alrededor de su núcleo (con momento angular orbital $\vec{\ell}$) y rota alrededor de un eje interno (con spin \vec{s}), generando corrientes eléctricas que producen momentos dipolares magnéticos.

Así, asociado a $\vec{\ell}$ y \vec{s} existen en cada átomo,

$$\left. \begin{aligned} \vec{m}_\ell &= \Gamma_\ell \vec{\ell} \\ \vec{m}_s &= \Gamma_s \vec{s} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \vec{m} = \vec{m}_\ell + \vec{m}_s$$



con \vec{m} el momento dipolar magnético propio del átomo. En la gran mayoría de los materiales, los \vec{m} están distribuidos al azar con lo cual,

$$\sum_k \vec{m}_k = 0,$$

excepto en los llamados **materiales para y ferromagnéticos**.

Ejemplos de algunos átomos, sus momentos magnéticos y la estructura electrónica ($n\ell^m$) que los explican.

Atomo	Momento Magnético (10^{-24} A·m ²)	(estados electrónicos)
<i>H</i>	9,27	1s ¹
<i>He</i>	0	1s ²
<i>Li</i>	9,27	1s ² 2s ¹
<i>O</i>	13,9	1s ² 2s ² 2p ⁴
<i>Na</i>	9,27	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ¹
<i>S</i>	13,9	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁴

6.1.2. Vector magnetización y densidades de corriente

Para medir la densidad de momentos dipolares magnéticos que existen por unidad de volumen en el material, se introduce el vector magnetización, una magnitud macroscópica que mide por la cantidad de momentos dipolares que existen en un elemento de volumen $\Delta\tau$ por unidad de volumen $\Delta\tau$,

$$\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_k \vec{m}_k}{\Delta\tau} \right) = \frac{d\vec{m}}{d\tau}.$$

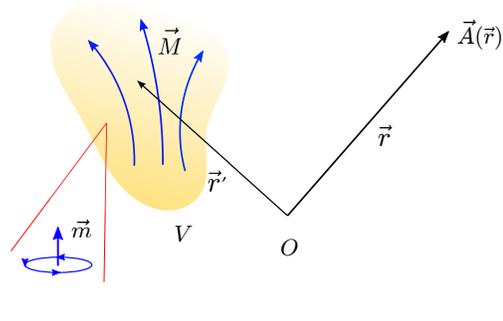
Claramente, el vector de magnetización así definido corresponde a una densidad volumétrica de momentos dipolares en el medio material. Si $\vec{M} = 0$, indica que los \vec{m}_k están distribuidos aleatoriamente.

Recordando que un momento dipolar magnético ubicado en el origen produce un potencial magnético vector \vec{A} en un punto del espacio (a partir del cual se puede calcular el campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$),

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

Entonces, un material magnetizado ($\vec{M} \neq 0$) genera en el espacio un potencial magnético vector que es la suma de las contribuciones de todos los momentos dipolares magnéticos presentes en el medio,

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{d\vec{m}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' \end{aligned}$$



Corrientes de magnetización

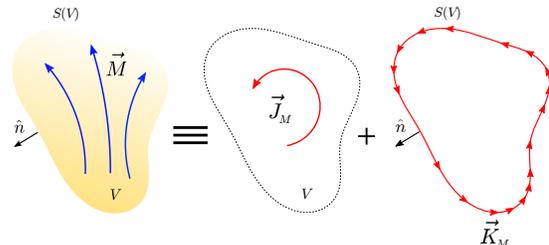
Después de algunas manipulaciones algebraicas, la expresión para el potencial magnético vector se puede escribir como la suma de dos términos,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S(V)} \frac{\vec{K}_M(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS'$$

donde se han introducido las densidades de corriente de magnetización en volumen y en superficie:

en volumen $\rightarrow \vec{J}_M(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$

en superficie $\rightarrow \vec{K}_M(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$
 ($\hat{n} \equiv$ normal a superficie)



Estas densidades de corriente reemplazan el efecto del volumen magnetizado para efectos del cálculo del campo magnético que se produce (analogía con densidades de carga de polarización en dieléctricos).

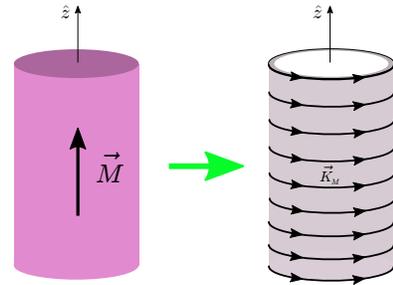
Ejemplo: **Campo magnético de un imán cilíndrico**

Modelo: El imán es un dispositivo hecho de un material (ferromagnético) que tiene una magnetización $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ uniforme.

- Usar coordenadas cilíndricas
- el medio magnetizado se reemplaza por las distribuciones de corrientes equivalentes,

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = 0 \quad \text{en volumen cilindro}$$

$$\vec{K}_M = \begin{cases} \vec{M} \times \hat{\rho} = M_0 \hat{\theta} & \text{en manto cilindro} \\ \vec{M} \times \hat{z} = 0 & \text{superficies superior e inferior} \end{cases}$$



Conclusión: El imán indicado genera un campo magnético equivalente al de una bobina (de largo finito) en cuyo manto circula una densidad de corriente superficial de magnitud K y en dirección azimutal. En la aproximación de bobina infinita,

$$\vec{B} \sim \begin{cases} \mu_0 M_0 \hat{z} & \text{(interior bobina)} \\ 0 & \text{(en su exterior)} \end{cases}$$

6.1.3. Vector intensidad del campo magnético

Para considerar el efecto del medio en la determinación de las ecuaciones de campo magnético observar que, además de las corrientes de conducción que puedan existir, hay que incluir las corrientes de magnetización equivalentes a la magnetización del medio,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 [\vec{J}_c + \vec{J}_M] \quad \implies \quad \nabla \times [\vec{B} - \mu_0 \vec{M}] = \mu_0 \vec{J}_c$$

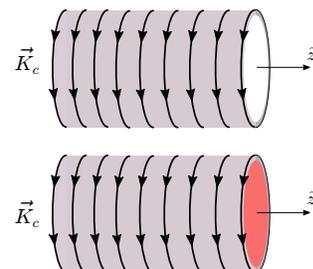
Es usual introducir una nueva cantidad, la intensidad de campo magnético \vec{H} ,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad \implies \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c \quad \implies \quad \oint_{C(S)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_c$$

el cual queda determinado por las corrientes de conducción que actúan como fuente del campo y de la geometría del material, **no de las propiedades del material.**

Ejemplo: 2 bobinas cilíndricas, largas, con la misma geometría, por las que circula la misma densidad de corriente superficial. El núcleo difiere en ambas bobinas. En la aproximación de bobina muy larga,

interior: $\vec{H} = \|\vec{K}\| \hat{z}$ para ambas bobinas
pero \vec{B} distinto (significa flujos magnéticos diferentes).



6.1.4. Condiciones de borde en Magnetostática

Interesa estudiar el comportamiento de los campos \vec{B} y \vec{H} al pasar de un medio (1) a otro medio (2), como se indica en la figura. La interfase puede ocurrir entre dos medios con propiedades magnéticas diferentes o entre un medio material y el vacío.

Para el campo magnético se integra $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ en un volumen representado por el cilindro recto de sección ΔA y altura despreciable,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \implies \oint_{S(V)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{B}_2 \cdot \Delta A \hat{n} - \vec{B}_1 \cdot \Delta A \hat{n} = 0$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

donde \hat{n} es la normal a la superficie de separación. Se concluye que se mantiene la componente normal de \vec{B} a la superficie de separación ($B_{2n} = B_{1n}$).

Integrando $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c$ a través de la superficie $abcd$ se tiene:

$$\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} \implies \oint_{C(S)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{H}_1 \cdot \Delta \vec{\ell} - \vec{H}_2 \cdot \Delta \vec{\ell} = \vec{J}_c \cdot \Delta \vec{\ell} \times (\vec{b}\vec{c})\hat{n}$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \Delta \vec{\ell} = \vec{K}_c \cdot \Delta \vec{\ell} \times \hat{n} \quad \left(\vec{K}_c = \lim_{b\vec{c} \rightarrow 0} [(\vec{b}\vec{c})\vec{J}_c] \right)$$

donde \vec{K}_c es una densidad de corriente superficial de conducción (ver figura). Se concluye que, en la interfaz, las componentes tangenciales (paralelas a la superficie) de los campos son en general discontinuas,

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_c$$

la discontinuidad dada por la magnitud de la corriente superficial que exista. En el caso que $\vec{K}_c = 0$, se conservan las componentes tangenciales de los campos ($H_{1t} = H_{2t}$).

6.2. Comportamiento de medios materiales

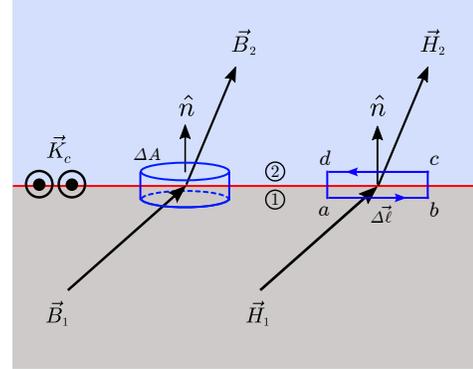
6.2.1. Modelo empírico

Experimentalmente se observa, en la gran mayoría de los medios materiales, que existe una relación lineal entre la magnetización del medio y la intensidad del campo magnético,

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \chi_m \equiv \text{susceptibilidad magnética}$$

Esta relación permite establecer la relación siguiente,

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$



con la **permeabilidad magnética** $\mu = \mu_0 [1 + \chi_m]$. La constante magnética del material corresponde a la permeabilidad magnética relativa $\mu_r = \mu/\mu_0$.

$$\text{En general: } \left\{ \begin{array}{ll} \mu \simeq \mu_0 & \text{gran mayoría de los materiales} \\ \mu = \mu(T) & \text{depende de la temperatura } T \rightarrow \text{Ley de Curie} \\ \mu \gg \mu_0 & \text{materiales ferromagnéticos} \rightarrow \mu = \mu(H) \end{array} \right.$$

La relación simple que existe entre \vec{B} y \vec{H} permite generalizar los resultados ya obtenidos en el estudio de la Magnetostática cambiando $\mu_0 \rightarrow \mu$ cuando se está en presencia de materiales no ferromagnéticos.

Energía magnética

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{B}(\vec{r}') \cdot \vec{B}(\vec{r}') dV' \rightarrow W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B}(\vec{r}') \cdot \vec{H}(\vec{r}') dV'$$

Clasificación magnética de medios materiales

Según el comportamiento de la susceptibilidad magnética, la clasificación básica de los materiales es:*

$$\left. \begin{array}{l} \text{Diamagnéticos} \\ (\chi_m < 0) \\ \\ \text{Paramagnéticos} \\ (\chi > 0) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} |\chi_m| \ll 1 \\ \\ \mu \simeq \mu_0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Ferromagnéticos} \\ (\chi_m \gg 0) \end{array} \right\} \mu = \mu(H) \gg \mu_0$$

Materiales

Paramagneticos	χ_m	Diamagneticos	χ_m
Aluminum	2.2×10^{-5}	Bismuth	-1.7×10^{-5}
Calcium	1.4×10^{-5}	Carbon (diamond)	-2.2×10^{-5}
Chromium	3.1×10^{-4}	Copper	-9.7×10^{-6}
Magnesium	1.2×10^{-5}	Lead	-1.8×10^{-5}
Oxygen gas (1 atm)	1.8×10^{-6}	Mercury	-2.8×10^{-5}
Oxygen liquid (90 K)	3.5×10^{-3}	Hydrogen gas (1 atm)	-2.2×10^{-9}
Tungsten	6.8×10^{-5}	Nitrogen gas (1 atm)	-6.7×10^{-9}

* Según sus propiedades magnéticas y su estructura atómica, una clasificación más fina del comportamiento magnético de los materiales incluye los siguientes:

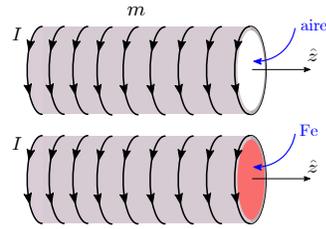
antiferromagnéticos (los momentos magnéticos de los átomos o iones en el material se alinean en direcciones opuestas, con una magnetización resultante nula - MnO); **ferrimagnéticos** (similares a los antiferromagnéticos pero sin cancelación completa de los momentos magnéticos y, en consecuencia, con una magnetización resultante - magnetita Fe_3O_4 - usados en discos duros); **superparamagnéticos** (caso especial de material paramagnético, pero con partículas pequeñas - usados en dispositivos de almacenamiento de datos) y **superferromagnéticos** (material tipo ferromagnético compuesto por partículas nanométricas - son de interés en nanotecnologías y en aplicaciones médicas como resonancia magnética).

Importancia materiales ferromagnéticos

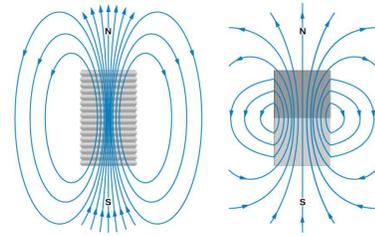
- Considerar el caso de 2 bobinas idénticas (volumen V) con diferente núcleo: aire y Fe.

$$\vec{H} = mI\hat{z} \implies \begin{cases} \Phi_m^{(\text{aire})} = \mu_0 m^2 V I \\ \Phi_m^{(\text{Fe})} = \mu m^2 V I \end{cases}$$

$$\frac{\Phi_m^{(\text{Fe})}}{\Phi_m^{(\text{aire})}} = \frac{\mu}{\mu_0} \implies \Phi_m^{(\text{Fe})} \gg \Phi_m^{(\text{aire})}$$



- Comparar campos magnéticos de una bobina (núcleo de aire) y un imán.



- Electroimán

¿Fuerza con que pieza metálica es atraída cuando circula I por bobina?

¿Cómo depende del material del núcleo?



6.2.2. Ferromagnetismo

Es una propiedad magnética muy particular, presente en un número reducido de materiales: Fe, Co, Ni y aleaciones que contienen uno o más de estos elementos. También se presenta en el metal Gd y otros pocos elementos de las tierras raras. La propiedad se debe al comportamiento no lineal del material y se manifiesta en que la relación entre el campo magnético \vec{B} y la intensidad magnética \vec{H} (o entre \vec{H} y la magnetización \vec{M}) no es constante.

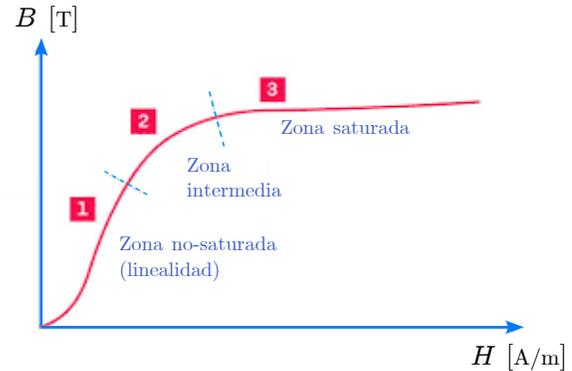
El caso de conocimiento universal es el imán, que corresponde a un material de Fe que en su historia adquirió una magnetización que le permite generar un campo magnético permanentemente. Este ferromagnetismo, desarrollado en formas más sofisticadas que en un imán natural, ha sido el sustento de tecnologías relacionadas

con la generación de energía, motores eléctricos, almacenamiento de información (discos magnéticos en el presente y cintas magnéticas en el pasado), etc..

Curva de magnetización

Considerar una muestra ferromagnética, inicialmente desmagnetizada. La muestra se coloca, por ejemplo, en el interior de un solenoide por el que circula una corriente regulable. Siendo la intensidad del campo magnético proporcional a la corriente, su magnitud H puede ser usado como parámetro de control.

En la medida que aumenta H (aumenta la corriente) se mide la magnitud del campo magnético B en el material ($B = \mu H$). Si la relación es lineal, se esperaría una recta en la figura adjunta.

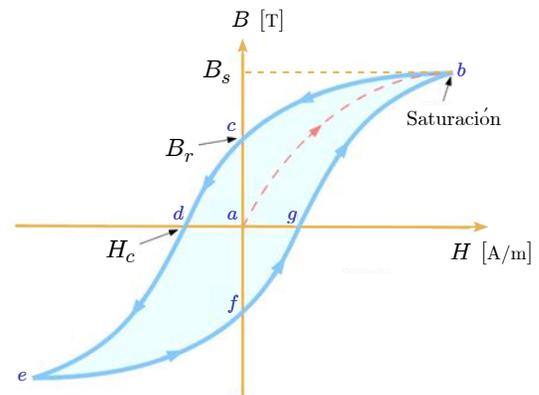


La realidad muestra otro resultado, indicado en la curva de magnetización del material (figura) donde B crece aproximadamente proporcional a H para valores menores (zona 1) pero, pasada la zona 2, sigue creciendo pero más lentamente que H y hasta alcanzar la llamada zona de saturación donde, definitivamente, B no aumenta independientemente de los valores que tome H . El proceso es reversible en la medida que H se mantenga en el rango de valores de zona 1, es decir, B disminuye si H disminuye siguiendo la curva de magnetización. Sin embargo, superada la zona 1 la reversibilidad se pierde y los valores de B asociados a la curva de magnetización no se reproducen cuando H disminuye.

De la pendiente a la curva de magnetización se puede estimar el comportamiento de la permeabilidad magnética $\mu = \frac{B}{H}$. Para $H \sim 0$ y el material desmagnetizado ($M = 0$) se concluye que $\mu \simeq \mu_0$. Pero, rápidamente, la pendiente a la curva aumenta, alcanzando hasta 2 o 3 órdenes de magnitud con respecto a su valor en vacío y dependiendo del material ferromagnético en cuestión. Asintóticamente, $\mu(H \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Ciclo de histéresis

Responde a la pregunta sobre la irreversibilidad de la curva de magnetización. En efecto, al aplicarse un campo magnético al material desmagnetizado, éste se magnetiza siguiendo la curva $a - b$ de la figura. El punto b señala el punto de saturación del material y el máximo valor que alcanza el campo magnético es B_s (campo de saturación). Al disminuir H , B no sigue la curva $b - a$ sino la curva $b - c$, alcanzando un valor B_r (campo residual) cuando $H = 0$. El material, inicialmente desmagnetizado, termina magnetizado con una magnetización residual $M_r = \frac{B_r}{\mu_0}$ cuando se elimina la intensidad H .



Invirtiendo la dirección de la intensidad del campo magnético \vec{H} (invirtiendo el sentido de circulación de la corriente que lo genera), B sigue la curva $c - d$ hasta anularse para un valor H_c (fuerza coercitiva) que cancela la magnetización del material. En la medida que H se hace más negativo, B sigue la curva $d - e$ y alcanzando nuevamente un punto de saturación para $-B_r$. Aumentando nuevamente H , B no regresa por la curva $e - d - c - b$ sino por la curva $e - f - g - b$. Este fenómeno se conoce como **histéresis** y la figura que muestra el comportamiento $B - H$ es la **curva de histéresis** del material.

La curva de histéresis depende del material y del máximo valor de H a que se somete el material, como se muestra en la figura. El material se ha magnetizado hasta diferentes valores del campo magnético de saturación y, a partir de ese punto, el material recorre el correspondiente ciclo de histéresis cuando H varía. En general, el ciclo mantiene la forma salvo en la zona del comportamiento más lineal entre B y H .

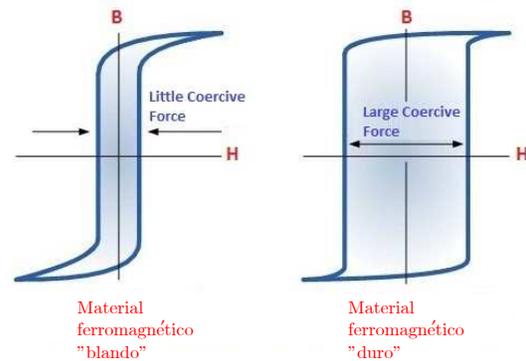
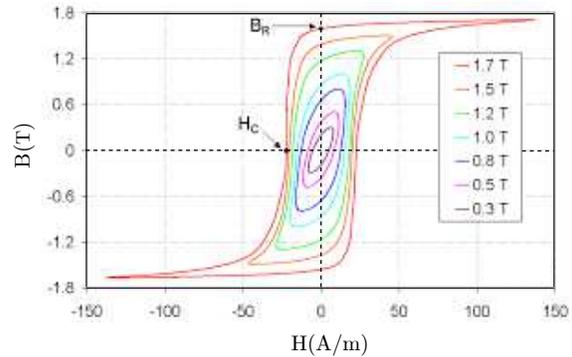
Los materiales ferromagnéticos se pueden caracterizar por la magnitud de la fuerza coercitiva que presentan:

* H_c pequeño es típico de materiales blandos, fáciles de magnetizar y desmagnetizar, usados principalmente en máquinas eléctricas y transformadores.

* H_c grande es característico de materiales magnéticamente duros, difíciles de magnetizar y desmagnetizar, encontrados en imanes.

En ambos casos, los ciclos de histéresis mantienen su forma por tener campos de saturación B_s similares.

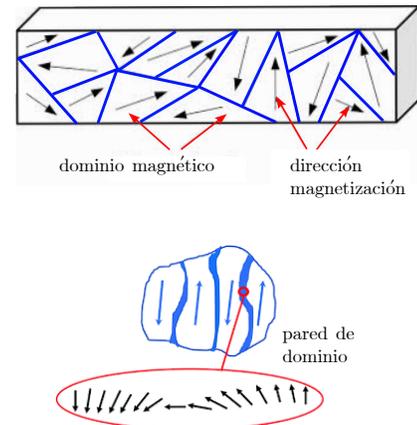
Ejercicio: demostrar que el área del ciclo de histéresis corresponde a la energía entregada, por una fuente externa, para recorrerlo (energía disipada en el núcleo ferromagnético).



Una explicación del ferromagnetismo se basa en el modelo macroscópico de Weiss (propuesto en 1907).

Concibe a los materiales ferromagnéticos como estructuras formadas por k dominios magnéticos, cuyas dimensiones están en el rango de 10^{-4} - 10^{-6} [m], cada uno completamente magnetizado con \vec{M}_k y cuyas magnitudes $\|\vec{M}_k\| \simeq \|\vec{M}_\ell\|$ para $k \neq \ell$, pero cuyas direcciones están aleatoriamente distribuidas. Las paredes de los dominios (paredes de Bloch) adyacentes es la zona donde se produce la rotación de los vectores magnetización a su nueva dirección, en un espacio no mayor a 100 átomos.

El comportamiento macroscópico de la magnetización en materiales ferromagnéticos tiene que ver con cambios en la configuración de los dominios.

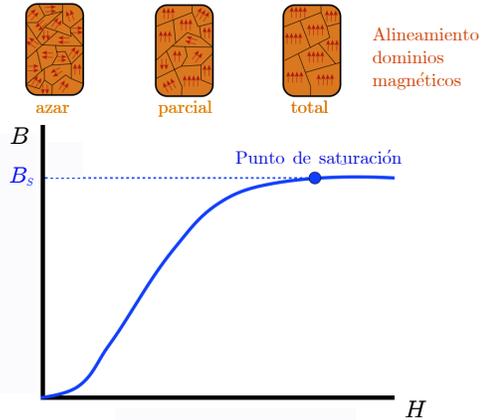


Hay dos aspectos independientes que determinan el aumento en magnetización cuando se aplica una intensidad de campo magnético: uno trata del aumento del volumen de los dominios que están alineados con el campo a costa de los dominios que se orientan desfavorablemente (corrimiento de las paredes) y el otro es la rotación de la magnetización del dominio en la dirección del campo externo.

Cuando se tiene un material desmagnetizado y un campo H débil se aplica, entonces los cambios se deben al movimiento de los dominios, siendo favorecidos energéticamente aquéllos que tienen su magnetización en una dirección favorable relativa al campo aplicado. En particular, el proceso es reversible si disminuye H . Por

ejemplo, para $H \sim 0$ se tiene una magnetización resultante $\vec{M} = \sum_k \vec{M}_k \simeq 0$ y, naturalmente, $B = 0$ cuando no hay un campo externo aplicado. En la medida que H aumenta considerablemente, la opción disponible para la magnetización de los dominios no alineados es rotar y alinearse según H (posición de mínima energía).

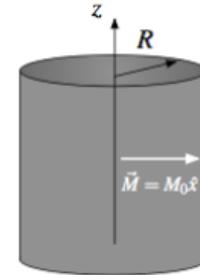
La descripción previa se muestra en la curva de magnetización de la figura, junto a la situación de los dominios a medida que crece el campo H . Alcanzado el punto de saturación no hay dominios que puedan crecer ni rotar relativos a otros, la magnetización del material es máxima y B alcanza su punto de saturación, independiente de la magnitud de H . Ahora, si H disminuye no hay mayores cambios ya que mantiene su dirección original y por lo tanto la magnitud del campo magnético disminuye una fracción desde B_s a su valor residual B_r cuando $H = 0$. De esta manera, el modelo de Weiss explica porqué el proceso de magnetización no es reversible.



Ejercicio: describa como la teoría de los dominios magnéticos explica la curva de histéresis.

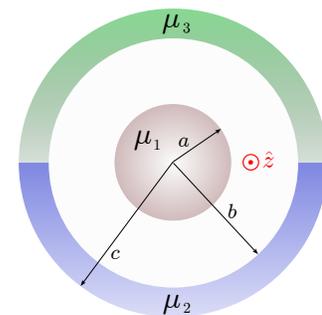
6.3. Problemas

MM-1 Se tiene un cilindro infinitamente largo, de radio R con su eje coincidente con el eje z y con una magnetización constante $\vec{M} = M_0 \hat{x}$ perpendicular a su eje. Determine las corrientes de magnetización (volumétricas y superficiales) y el campo magnético en el eje del cilindro.



MM-2 Encuentre el campo magnético en todo el espacio debido a una esfera, radio a , magnetizada uniformemente con un vector de magnetización \vec{M} .

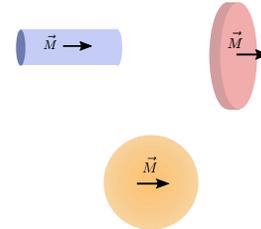
MM-3 Por el interior de un cilindro infinito, de radio a y permeabilidad magnética μ_1 , circula una corriente I_0 en la dirección \hat{z} . A este cilindro lo rodea un casquete cilíndrico de radio interno b y radio externo c . El casquete consiste en dos mitades, de permeabilidad μ_2 y μ_3 respectivamente (ver figura). Por el casquete circula la misma cantidad de corriente I_0 pero en sentido opuesto al del cilindro interno. Suponga que las densidades de corriente al interior de estos materiales es homogénea.



- a) Encuentre una expresión para la corriente total $I(r)$ que atraviesa una superficie circular de radio r arbitrario, concéntrica a los cilindros.
- b) Encuentre \vec{H} y \vec{B} en todo el espacio.
- c) Determine el valor de las corrientes superficiales \vec{K}_M inducidas por la magnetización \vec{M} de los medios, en cada una de las superficies.

MM-4 Considere una espira circular de radio a y densidad lineal de masa ρ por la cual pasa una corriente estacionaria I . La espira se hace levitar (en contra de la gravedad) a una altura h sobre el polo norte de un imán cilíndrico permanente muy largo y de radio R . Encuentre la magnetización del imán permanente. Suponga $R \ll a, h$.

MM-5 Determinar el campo magnético que producen los materiales de la figura, que tienen una magnetización \vec{M} constante sobre todo el volumen que ocupan. Las geometrías correspondientes son conocidas. Grafique el campo magnético que producen en todo el espacio.



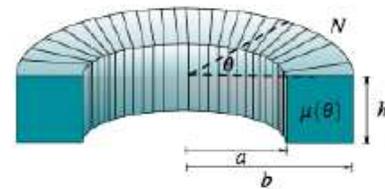
MM-6 Una densidad de corriente superficial $\vec{K} = K_0 \hat{x}$ [A/m] existe en el plano $z = 0$. El semiespacio $z < 0$ está ocupado con material de permeabilidad magnética μ_1 y el resto del espacio está ocupado con material de permeabilidad magnética μ_2 . El vector intensidad de campo magnético en la zona 1 es $\vec{H}_1 = H_{1x} \hat{x} + H_{1y} \hat{y} + H_{1z} \hat{z}$.

Calcule las componentes del vector \vec{H}_2 en la interfase $z = 0$.

MM-7 Un cable coaxial consiste en dos cilindros muy largos, separados por un material aislante de susceptibilidad magnética χ_m . Una corriente I fluye desde el conductor más interno y regresa por el más externo. En cada caso la corriente se distribuye de manera uniforme sobre las superficies (los mantos) de cada cilindro. Encuentre el campo magnético en la región entre los tubos. Para comprobar, calcule la magnetización y las corrientes ligadas, y confirme que generan el campo magnético correcto.

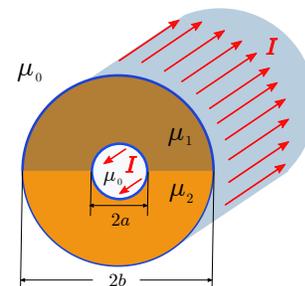
MM-8 Considere una bobina toroidal, de sección rectangular y de N espiras, por cada una de las cuales circula una corriente I . El núcleo de esta bobina es de un material inhomogéneo de tal forma que su permeabilidad magnética μ depende tan solo del ángulo polar θ y satisface

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 + k \cos^2(\theta)$$

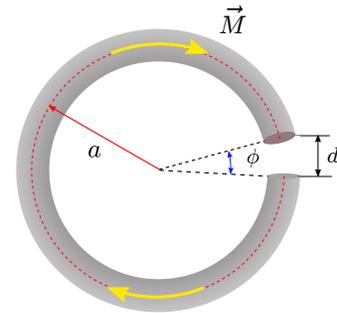


Determine \vec{H} en el interior de la bobina.

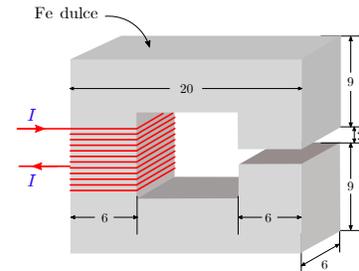
MM-9 Considere dos conductores laminares cilíndricos coaxiales de longitud infinita y radios a y b , por los que circulan corrientes de intensidad I en sentidos contrarios. Suponga que el espacio comprendido entre los dos conductores está ocupado por dos medios de permeabilidad magnética μ_1 y μ_2 . La superficie de separación entre los medios es plana y ortogonal a la sección de los conductores, de forma que cada medio ocupa la mitad del espacio entre los conductores (ver figura). Además, considere que el vacío ocupa la región exterior al conductor cilíndrico externo y la región interior al conductor cilíndrico interno. Calcule el campo magnético \vec{B} , la intensidad de campo magnético \vec{H} y la magnetización \vec{M} en todo el espacio.



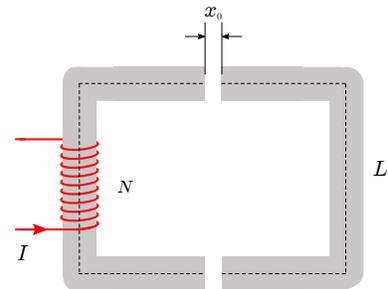
MM-10 Un imán permanente consiste en un anillo de Fe (hierro), de radio medio a , con un pequeño corte de ancho d con se muestra en figura. El Fe está magnetizado uniformemente con momento magnético \vec{M} por unidad de volumen en la dirección del vector unitario azimutal $\hat{\phi}$. Calcular la intensidad de campo magnético (\vec{H}) dentro del material de Fe y en la región donde existe el corte (entrehierro). Analice el caso límite $\phi = 0$ y explique el resultado.



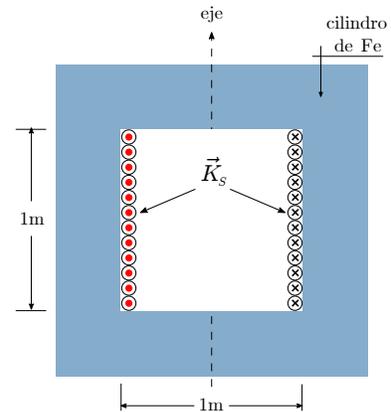
MM-11 Un imán, cuyo núcleo está hecho de hierro dulce, tiene la forma indicada en la figura. Todas las dimensiones están expresadas en centímetros. La permeabilidad relativa ($\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$) del hierro dulce es 3000. ¿Cuántas vueltas debe tener el enrollado para que el campo magnético en el entrehierro sea 10^{-2} T?



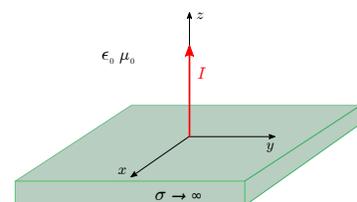
MM-12 (Examen-2017P) Se construye un electroimán en la forma que indica la figura: el núcleo de material ferromagnético de permeabilidad μ (supuestamente constante), de largo total L y sección uniforme de área A que puede separarse en 2 mitades. El núcleo se magnetiza mediante un solenoide de N vueltas por el que circula una corriente de I [A]. Calcular la fuerza con que se atraen las 2 mitades del núcleo si se las separa una distancia $x_0 \ll L$.



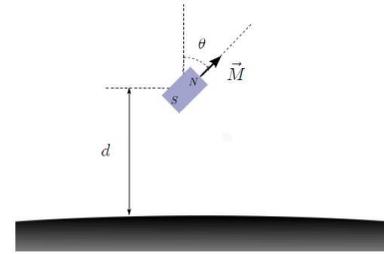
MM-13 Un electroimán consiste de un cilindro hueco de Fe, con los extremos cerrados con tapas del mismo material. Por la superficie interior del cilindro fluye una densidad de corriente K_S en la dirección azimutal (como se indica en figura). La magnitud del campo magnético en la zona vacía es 1 [T]. Suponiendo que la permeabilidad magnética del Fe es muy grande (infinita),
 a) ¿Cuál es la corriente total que fluye por las paredes del cilindro de Fe?
 b) ¿Cuál es la energía almacenada en el imán?
 c) ¿Cuál es la fuerza de atracción entre las tapas del cilindro?



MM-14 Un conductor de largo semi-infinito, que lleva una corriente I , se ubica perpendicular a un plano perfectamente conductor conectado a tierra en $z = 0$.
 a) Calcule el campo magnético, en magnitud y dirección, sobre el plano conductor ($z > 0$).
 b) Determine la magnitud y dirección de la corriente en la superficie del plano conductor.

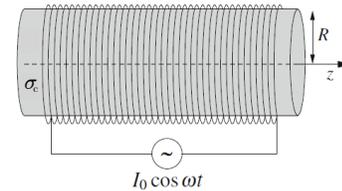


MM-15 (E10-2016P) Un metal superconductor tiene la propiedad que tanto el campo eléctrico \vec{E} como el campo magnético \vec{B} se anulan en su interior. Un imán de volumen V y magnetización \vec{M} , orientado en un ángulo θ con respecto a la normal a la superficie, se ubica a una distancia d de una lámina superconductora infinita.



- Determine las condiciones de borde que deben satisfacer \vec{E} y \vec{B} en la superficie del metal superconductor.
- Explique brevemente un método para obtener el campo magnético en cualquier punto del espacio. Comente las aproximaciones, si las hace, que realiza.
- Encuentre el torque sobre el imán. Deduzca los ángulos de equilibrio e indique aquéllos que son estables y cuáles son inestables.
- Calcule la fuerza sobre el imán. ¿Es atraído o repelido por la lámina superconductora?

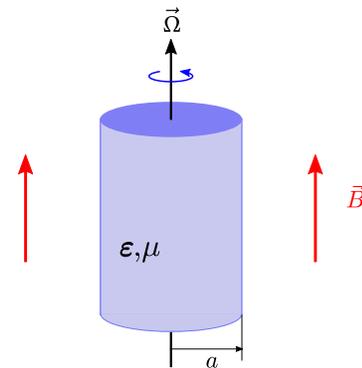
MM-16 (C2-2020P) Considere una bobina muy larga, con m vueltas por unidad de largo, enrollada alrededor de un material conductor cilíndrico de radio R y longitud $L \gg R$. El material tiene una conductividad $\sigma_c (\equiv g)$ y una permitividad magnética equivalente a la del vacío (μ_0). Una corriente alterna $I = I_0 \cos(\omega t)$ fluye por la bobina.



- Encontrar el campo eléctrico inducido en conductor.
- Explique porqué el cilindro se calienta y calcule la potencia disipada.
- ¿Existe alguna modificación del campo magnético que genera la bobina por la presencia del conductor en su interior? Explique y, si es necesario, cuantifique su respuesta.

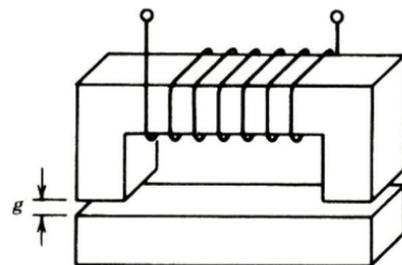
Importante: Suponga que efectos de borde y la corriente de desplazamiento son despreciables.

MM-17 (Examen-2021O) Un campo magnético uniforme \vec{B} es paralelo al eje de un cilindro de material dieléctrico, de radio a y con permitividad eléctrica ϵ y permeabilidad magnética μ , que gira en torno a su eje de simetría con velocidad angular $\vec{\Omega}$. Demostrar que el cilindro se polariza y calcular la carga eléctrica inducida por unidad de longitud en su superficie.



Respuesta (pág. 216)

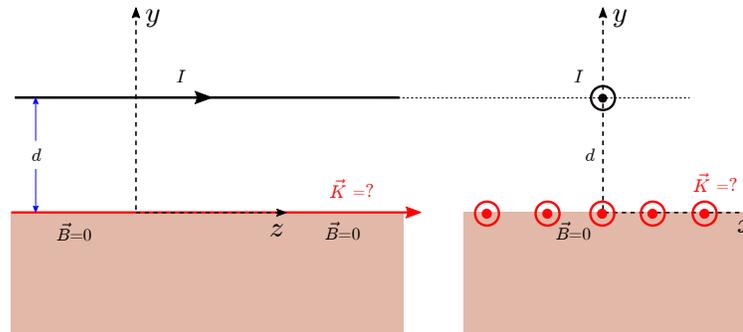
MM-18 Un electroimán en forma de herradura es utilizado para levantar objetos metálicos pesados, como la chatarra de hierro y acero. Suponga que el electroimán está construido con un núcleo de hierro ($\mu \gg \mu_0$) por el cual se enrolla un cable dando N vueltas. A través del cable circula una corriente de intensidad I . La sección transversal de la herradura es A . Si se acerca un bloque de material ferromagnético al electroimán, a una distancia g , determine la fuerza que ejerce el electroimán sobre el objeto (suponga que g es relativamente pequeño, tal que los campos magnéticos son aproximadamente uniformes en la zona de separación).



MM-19 Un alambre conductor recto, muy largo, por el que circula una corriente I se ubica a la distancia d de un medio superconductor, extendido y cuya superficie (tan extensa como el alambre en la práctica) es plana.

El superconductor se caracteriza por tener campos eléctrico y magnético nulos en su interior.

- Calcule la densidad de corriente superficial \vec{K} inducida en la superficie del medio (dirección es constante pero su magnitud varía según su distancia al alambre) tal que $\vec{B} = 0$ justo al interior del medio ($y = 0^-$).
- Calcule la fuerza por unidad de largo (magnitud y dirección) entre el alambre y el medio superconductor.



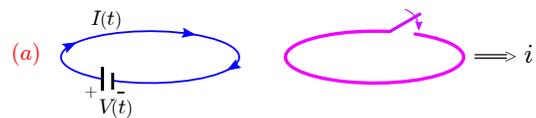
Inducción electromagnética

7.1. La fuerza electromotriz (fem)

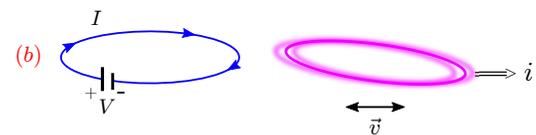
7.1.1. Fenómeno de inducción

Experimentos:

a) 2 bobinas: una conectada a una batería y por la que circula una corriente dependiente del tiempo $I(t)$; la otra bobina inmóvil, en circuito abierto. Cerrar interruptor en segunda bobina. Se observa que circula (se induce) una corriente i .



b) 2 bobinas: una conectada a una batería y por la que circula una corriente I constante; la otra bobina en circuito cerrado, en reposo. Se mueve la segunda bobina con velocidad \vec{v} . Se observa que circula (se induce) una corriente i .



La conclusión que se obtiene de estos y otros experimentos es la siguiente:

el **flujo magnético total** enlazado por una espira de superficie S ,

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \longrightarrow \quad \Phi_m(t)$$

es decir, depende del tiempo. Entonces, se puede argumentar que la relación entre la variación temporal del flujo magnético y la corriente que circula por una bobina estaría mediada por la existencia de una fuerza electromotriz fem (o batería de origen no químico ni mecánico) que genera un campo eléctrico que hace circular la carga eléctrica por la bobina. Esquemáticamente,

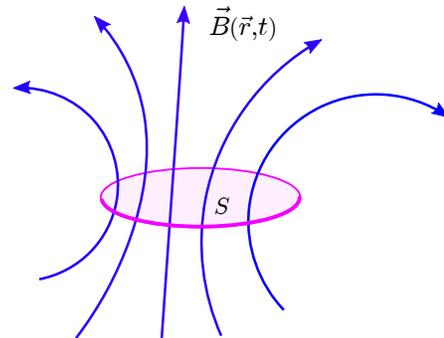
$$\Phi_m(t) \quad \longrightarrow \quad \text{fem} \quad \longrightarrow \quad i(t)$$

Ley de Faraday-Lenz

Asociado a la variación temporal del flujo magnético total a través de la superficie S , se induce en la trayectoria que encierra a S una diferencia de potencial o fuerza electromotriz (fem) \mathcal{E} determinada por

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

Cuando un conductor coincide con la trayectoria cerrada (espira), entonces por él circula una corriente limitada por la magnitud de la fem inducida y de su impedancia (resistencia en casos no inductivos ni capacitivos).



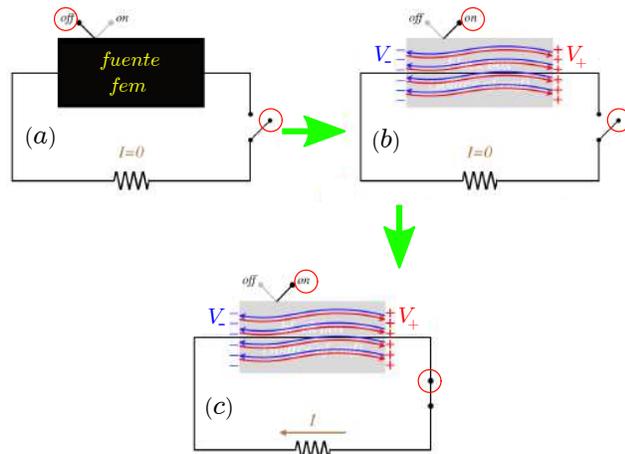
- El signo $(-)$ indica que la fem inducida es tal que genera una corriente que tiende a oponerse a la variación del flujo magnético total Φ_m enlazado; ello ocurre a través del campo magnético que genera la corriente inducida, el que modifica el campo magnético resultante de las otras fuentes que están presentes en la superficie a través de la cual se calcula el flujo.
- Observar que Φ_m depende del tiempo porque el campo magnético lo hace, porque la superficie se deforma temporalmente, porque el conductor se desplaza en el campo, o combinación de los anteriores.

7.1.2. Sobre el origen de la fem

*** El origen químico de la fem**

Considerar una fuente (batería) que alimenta una resistencia.

- a) Batería desactivada; resistencia desconectada de la fuente.
- b) Batería se conecta y mediante proceso químico se empieza a separar carga hacia las placas; el proceso se detiene cuando la diferencia de potencial entre los terminales ($V_+ - V_-$) alcanza el valor de diseño. La resistencia sigue desconectada de la fuente (no circula corriente).
- c) Batería conectada y resistencia conectada a la fuente. Circula corriente I por ella.

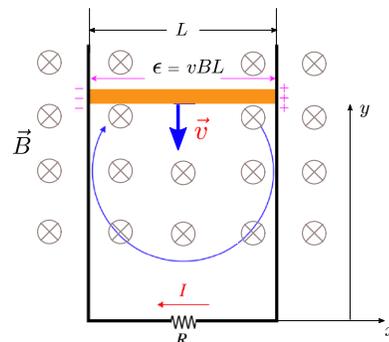


La batería sigue separando carga (como una bomba), manteniendo la diferencia de potencial entre terminales y a pesar que corriente fluye a través del circuito cerrado. Eventualmente, la batería se descarga.

*** El origen magnético de la fem**

Considerar el mismo circuito anterior pero la batería se reemplaza por un conductor (ideal, $R = 0$) que se mueve con velocidad constante $\vec{v} = -v\hat{y}$ (sistema de coordenadas indicado en figura). Además, el conjunto se instala en presencia de un campo magnético uniforme \vec{B} generado por una fuente externa (un imán, por ejemplo).

Para calcular el flujo magnético enlazado por el circuito, supongamos el sentido de circulación de la corriente indicado,



$$\vec{B} = -B\hat{z} \quad d\vec{S} = -dS\hat{z} \quad \implies \quad \Phi_m = BLy$$

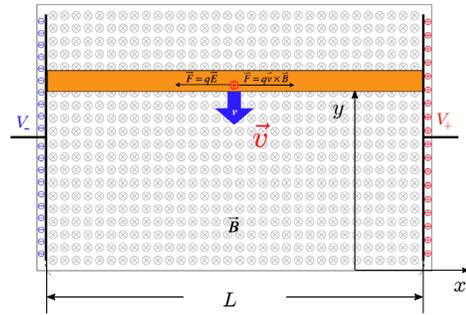
La fem inducida en la trayectoria es,

$$\varepsilon = -BL\dot{y} = BLv$$

La fem es positiva ya que el flujo magnético decrece en el tiempo a medida que la barra se mueve. Claramente ε es equivalente a la diferencia de potencial entre los bornes de una batería, con las polaridades indicadas en figura.

¿Qué ocurre? En la barra conductora, las cargas positivas y negativas se mueven en el campo magnético y experimentan fuerzas magnéticas tipo Lorentz: las positivas hacia la derecha y negativas hacia la izquierda. Como están confinadas a la barra, no pueden viajar en círculos, por lo cual se juntan en las placas, en los extremos.

El fenómeno ocurre hasta que el campo eléctrico de las cargas separadas compense la fuerza magnéticas sobre las cargas.



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \implies \vec{E}_{(+)\rightarrow(-)} = -\vec{v} \times \vec{B} = -vB\hat{x}$$

La diferencia de potencial entre la placa de carga (+) y carga (-),

$$V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = BLv \equiv \varepsilon$$

Justamente, la fuerza de Lorentz permite una explicación particular de la existencia de la fem ε .

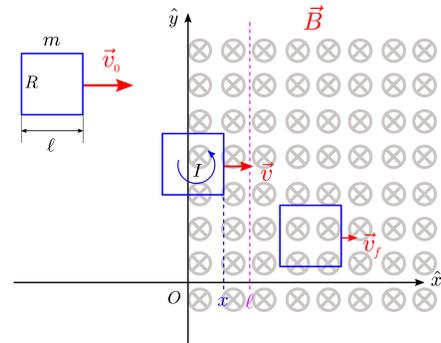
Inducción electromagnética sin Faraday-Lenz

La comprensión del fenómeno de inducción a partir de la fenomenología es clara. Sin embargo, no es el caso si se trata de explicar en general a partir de principios fundamentales. En algunos casos particulares, si es interesante mostrar como el fenómeno aparece y se cuantifica haciendo uso de conceptos conocidos.

Un ejemplo es el siguiente:

Considere una espira conductora cuadrada de lado ℓ , masa m y resistencia R que se desplaza sobre una superficie pulida con velocidad \vec{v}_0 . En cierto instante ($t = 0$), la espira penetra una zona del espacio donde existe un campo magnético uniforme \vec{B} , perpendicular a la superficie.

El problema es estudiar el movimiento de la espira y el desplazamiento que tiene.



La física:

Al penetrar la espira en la zona del campo magnético, circula una corriente (se desconoce el sentido). Entonces, sobre cada lado de la espira existirá una fuerza que determina la dinámica del movimiento de la espira. Además, conservación de la energía prescribe como la energía inicial se disipa en la espira y en el trabajo que la fuerza magnética hace sobre ella.

* **Datos iniciales:**

- Considerar sistema cartesiano indicado. En él, $\vec{B} = -B\hat{x}$.
- Espira entra campo magnético en $x(0) = 0$ con velocidad $\vec{v}(0) = \dot{x}(0)\hat{x}$ ($\dot{x}(0) = v_0$).
- Suponer que existe una corriente I que circula por espira en el sentido (arbitrario) indicado.

* **Fuerza (magnética) sobre espira:**

$$\vec{F}_m = \oint_c I d\vec{r} \times \vec{B} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -I\ell B\hat{x} & \text{para } x < \ell \\ 0 & \text{para } x \geq \ell \end{cases}$$

La fuerza frena el movimiento de la espira en dirección \hat{x} , en el intervalo $[0, \ell)$. Se desprecian efectos auto inductivos (modificación del campo debido a la corriente que circula por espira).

* **Conservación de energía por unidad de tiempo (potencia):**

En un intervalo temporal $[0, t]$

- No hay una fuente externa que provea energía por unidad de tiempo al circuito de la espira;
- La resistencia R disipa energía por unidad de tiempo (efecto Joule);
- Existe una variación de la energía cinética de la espira por unidad de tiempo;

$$\text{luego: } 0 = RI^2 + \vec{F}_m \cdot \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x < \ell : & RI^2 - \ell BI\dot{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\ell B}{R} \dot{x} \\ x \geq \ell : & RI^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad I = 0 \end{cases}$$

- Observar que la corriente I (cuando circula) es proporcional a la rapidez. Ello significa que la fuerza sobre la espira, debido a la corriente inducida en ella, tiene la estructura de una fuerza de roce mecánico ($\vec{F}_m \sim -\vec{v}$).
- La corriente determinada es, conceptualmente, el valor de de la diferencia de potencial (ε) que provee una fuente de energía dividido por la resistencia de la espira,

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \quad \text{con} \quad \varepsilon = \ell B\dot{x} \quad \longrightarrow \quad -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\Phi_m = -\ell Bx) \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon \equiv \text{fem inducida}$$

* **Descripción del movimiento:**

$$\text{Newton} \longrightarrow m\ddot{x} = \begin{cases} -\frac{(\ell B)^2}{R} \dot{x} & \text{para } x < \ell \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 e^{-t/\tau} \\ \dot{x}(x) = v_0 - \frac{x}{\tau} \\ x(t) = v_0 \tau [1 - e^{-t/\tau}] \end{cases} \\ 0 & \text{para } x \geq \ell \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = (v_0 - \frac{\ell}{\tau}) \text{ constante} \\ \dot{x}(x) = (v_0 - \frac{\ell}{\tau}) \text{ constante} \\ x(t) = \ell + (v_0 - \frac{\ell}{\tau})(t - T) \end{cases} \end{cases}$$

donde se ha introducido la constante de tiempo del sistema: $\tau \equiv \frac{mR}{(\ell B)^2}$.

- Tiempo T en el cual la espira ha penetrado totalmente en la zona del campo magnético:

$$x(T) = \ell \quad \implies \quad T = \tau \ln \left(\frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - \ell} \right)$$

* Dos situaciones posibles:

Caso $v_0 < \frac{\ell}{\tau}$:

- La espira no penetra totalmente en zona con campo magnético;
- Se detiene en la posición x_s donde la rapidez se anula (gráfico \dot{x} vs x),

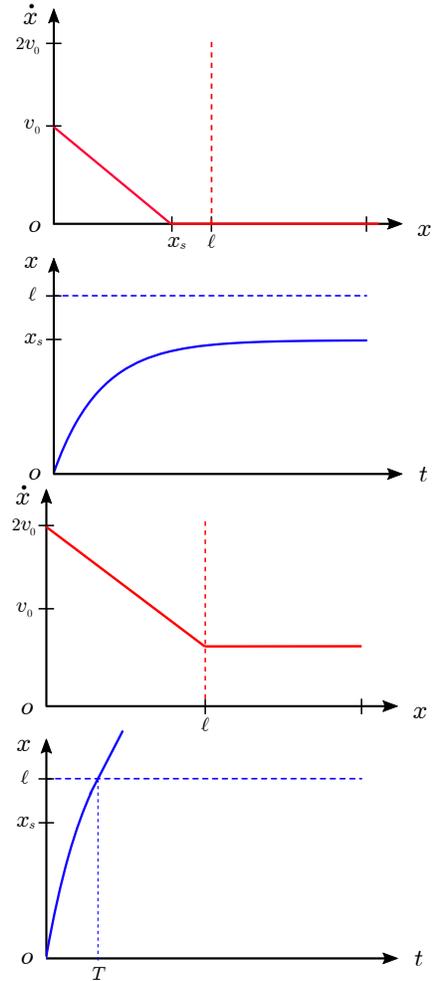
$$\dot{x}(x_s) = 0 \quad \implies \quad x_s = v_0 \tau < \ell$$

- La evolución temporal de la posición de la espira (gráfico $x(t)$ vs t),

$$x(t) = x_s [1 - e^{-t/\tau}] \quad \longrightarrow \quad \ell \quad \text{para} \quad t \longrightarrow \infty$$

Caso $v_0 > \frac{\ell}{\tau}$:

- La espira penetra totalmente en zona con campo magnético;
- Su velocidad disminuye hasta $\dot{x}(\ell)$ y después se mantiene constante. A pesar de avanzar en zona de campo magnético, no hay fuerza magnética ya que no circula corriente por espira (no hay variación temporal del flujo magnético enlazado por espira);
- Más allá de $x = \ell$, la posición de la espira crece linealmente con el tiempo.



Analizar:

- ¿ Qué ocurre con el movimiento de la espira si termina la zona del espacio donde existe campo magnético?
- El movimiento de la espira si ella tiene una batería que le provee permanentemente una diferencia de potencial V_{bat} .

7.1.3. Forma diferencial de ley de inducción

La ley de Faraday-Lenz no da información sobre el campo eléctrico; sólo induce una fuente que provee una diferencia de potencial en una trayectoria cerrada. En efecto, para una trayectoria cerrada rígida C en el espacio,

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\implies \int_{S(C)} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \forall S(C)$$

Como la igualdad debe mantenerse para cualquier superficie encerrada por la curva C , se concluye

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r};t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r};t)}{\partial t}$$

relación que constituye una generalización de la 2a ecuación de Maxwell correspondiente al caso estático ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0 \implies \nabla \times \vec{E} = 0$) descrito en el estudio de la Electroestática.

* El campo eléctrico

La inclusión del fenómeno de inducción cuestiona el carácter conservativo del campo eléctrico ($\nabla \times \vec{B} \neq 0$) y, por consiguiente, la idea del potencial eléctrico. No obstante, al recordar que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \implies \quad \nabla \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0.$$

Entonces, existe una función escalar, identificada con la función potencial eléctrico V , tal que

$$\vec{E}(\vec{r};t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r};t)}{\partial t} = -\nabla V(\vec{r};t)$$

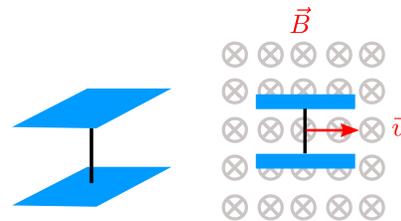
Conclusión:

El campo eléctrico, dependiente de posición y del tiempo, proviene tanto del potencial eléctrico como del potencial magnético vector, los que aparecen como fuentes del campo indistinguibles,

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Ejemplo: dos placas conductoras idénticas, cuadradas, se orientan paralelas una a la otra y se conectan por un alambre conductor (lado izquierdo de figura). El dispositivo se mueve con velocidad \vec{v} a través de un campo magnético uniforme \vec{B} (espesor placas es despreciable).

Encontrar la densidad de carga uniforme, incluyendo el signo, inducida en la placa superior.



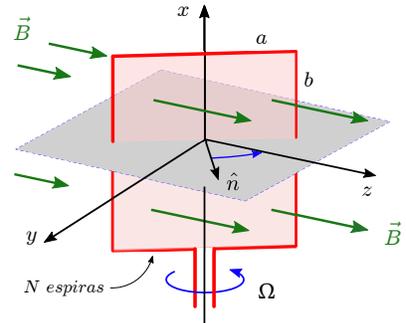
7.1.4. Aplicaciones

Generador de corriente alterna

Consiste de N espiras planas, lados a y b , continuas, mínimo espacio entre ellas, que rotan con velocidad angular $\vec{\Omega}$ en torno a un eje de simetría y en presencia de un campo magnético uniforme. La idea es aprovechar el torque que un medio externo (agua, aire, etc) ejerce sobre el eje en que están montadas las espiras.

- Suponer campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$ y que las espiras rotan con $\vec{\Omega} = \Omega\hat{x}$. La dirección \hat{n} corresponde a la normal al plano de las espiras.
- Existe un flujo magnético total, variable, enlazado por las N espiras en su rotación en torno al eje,

$$\begin{aligned} \Phi_m &= N \Phi_m^{(1\text{-espira})} = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= N a b B \cos(\hat{n} \cdot \hat{z}) \\ &= N a b B \sin(\Omega t) \end{aligned}$$



cuando se toma eje \hat{y} como referencia para medir el ángulo de rotación ($\hat{n} \cdot \hat{y} = \Omega t$).

- Fem inducida: $\varepsilon(t) = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - N a b B \Omega \cos(\Omega t)$

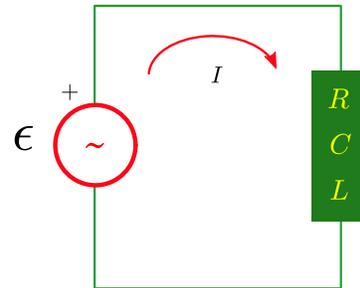
Observar que fem es una función sinusoidal del tiempo (nombre de corriente alterna).

- Fem a partir del campo eléctrico inducido: Debido a que la carga eléctrica en las espiras tiene una velocidad $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, entonces cada carga experimenta un campo eléctrico $\vec{E} = \vec{F}_m/q = \vec{v} \times \vec{B}$. Luego, la fem inducida será

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) = N \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} \implies \text{para} \\ \vec{E} = \mp \rho B \Omega \cos(\Omega t) \hat{x} \\ d\vec{r} = d(\hat{\rho}) + dx \hat{x} \end{aligned} \right\} \longrightarrow - N a b B \Omega \cos(\Omega t)$$

- Circuito equivalente:
- El generador actúa como una fuente de energía externa del circuito que alimenta.
- Usualmente, fem oscila armónicamente en el tiempo.
- Balance energético:

Generador entrega al consumo una potencia	$P_G = \varepsilon I$
Potencia mecánica al sistema para que rote	$P_{mec} = \vec{\tau} \cdot \vec{\Omega}$
Torque externo para mantener espiras rotando	$\vec{\tau} = N \vec{m} \times \vec{B}$
Momento dipolar de espira plana	$\vec{m} = I \vec{A}$



Generador de corriente continua

Un modelo simplificado consiste de un disco conductor de radio a , que rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$, en presencia de un campo magnético uniforme \vec{B} .
 Suponer que inicialmente el circuito está abierto. Al cerrar el interruptor, determinar que corriente circula por la resistencia R .

- En este problema existe una fem producto del movimiento de carga eléctrica en el campo magnético;
- Conveniente usar coordenadas cilíndricas, con eje \hat{k} coincidiendo con dirección $\vec{\Omega}$;
- Cargas positivas se mueven radialmente hacia el exterior del disco y carga negativa se acumula en centro del disco. Ello ocurre hasta alcanzar una situación de equilibrio, con un campo eléctrico

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{\Omega} \cdot \vec{B} \vec{\rho}$$

- Fem inducida:

$$\varepsilon = V(\rho = a) - V(\rho = 0) = \frac{1}{2} a^2 \Omega B \quad \rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R} \quad \text{sentido punteros reloj !}$$

¿Cómo se relaciona este cálculo con la ley de Faraday-Lenz?

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

Es necesario identificar una superficie para calcular Φ_m y que permita reconocer el valor de la fem inducida.

- Tomar superficie indicada, $S = S_1 + S_2$. Calcular la variación infinitesimal de flujo,

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \vec{B} \cdot d\vec{S}_2$$

El primer término es nulo. Calculando la variación del flujo magnético por unidad de tiempo,

$$d\Phi_m = \frac{1}{2} a^2 B d\theta \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = - \frac{1}{2} a^2 \Omega B$$

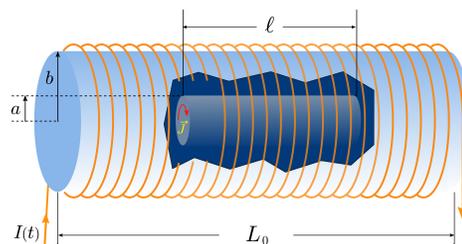
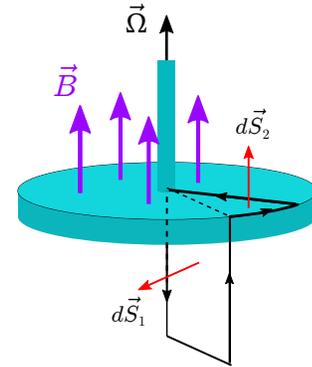
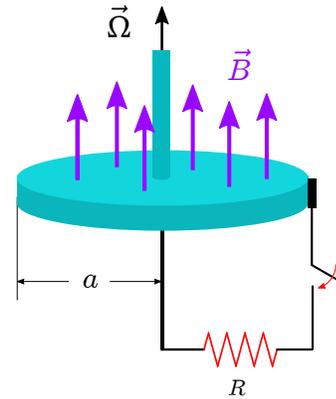
La magnitud de la fem es correcta pero el signo difiere del obtenido en primer cálculo. En realidad, significa que debiera tomarse un sentido de circulación de la superficie en forma opuesta al realizado, lo cual es consistente con que la corriente circula en el sentido horario de los punteros del reloj.

Horno de inducción

Se usa para derretir metales.

Consiste en una bobina (muy larga), con m vueltas por unidad de largo, radio conocido, por la que circula una corriente armónica $I = I_0 \cos(\omega t)$. En su interior se genera un campo magnético uniforme y dependiente del tiempo.

Se coloca el metal interiormente, por ejemplo un cilindro de geometría conocida, en el cual se inducen corrientes que permiten elevar su temperatura y eventualmente derretirlo. Determinar la potencia promedio disipada (efecto Joule) en el cilindro interior.



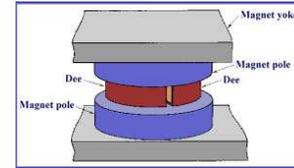
Acelerador de electrones

Se trata de entender el funcionamiento de un acelerador capaz de producir electrones con energías del orden de millones de eV (electrón-volt). Estas partículas pueden ser usadas como fuente de rayos X.

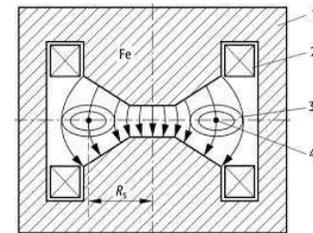
También se usan para colisionar con otras partículas microscópicas y aprender sobre su estructura.

Básicamente, el instrumento (de dimensiones considerables) mantiene a los electrones en órbita circular, en una cámara al vacío, por medio de una campo magnético. Como una partícula cargada en un campo magnético mantiene su energía cinética constante, la idea es poder acelerar estos electrones aumentando el flujo magnético enlazado por la órbita.

Analizar el mecanismo de aceleración. La órbita ocurre en un plano perpendicular a \vec{B} .



Esquema del Betatron



*** partícula en campo magnético constante**

- Sean q y m la carga y masa de la partícula. Para electrón: $q = -|e|$ y $m = m_e$.

- En campo magnético, partícula experimenta fuerza de Lorentz,

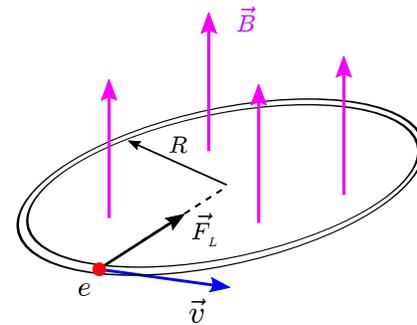
$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- Movimiento

$$m\vec{\ddot{r}} = \vec{F}_L$$

- Coordenadas intrínsecas ($s \equiv$ arco trayectoria; $\dot{s} \equiv$ rapidez, etc)

$$m\vec{\ddot{r}} = \vec{F}_L \implies \begin{cases} m\dot{s} = 0 & \implies \dot{s} = v_0 \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} = -q\dot{s}B & \implies R = -\frac{mv_0}{qB} = \frac{m_e v_0}{|e|B} = \frac{v_0}{\Omega_0} \end{cases}$$



La trayectoria es circular, de radio R y la rapidez de la partícula se mantiene constante durante el movimiento.

*** partícula en campo magnético variable** (producidos por electroimanes de corriente alterna).

- Partícula experimenta ahora una fuerza

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right]$$

donde \vec{E} corresponde al campo eléctrico sobre la órbita, inducido por la variación temporal del flujo magnético enlazado por la trayectoria de la partícula,

$$\varepsilon = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \implies \vec{E} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi_m}{dt} \hat{t}$$

- Movimiento descrito por

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L \implies \begin{cases} m\dot{s} = qE = -\frac{q}{2\pi R} \frac{d\Phi_m}{dt} & \implies m\dot{s} = mv_0 + \frac{q}{2\pi R} [\Phi_0 - \Phi(t)] \\ m\frac{\dot{s}^2}{R} = -q\dot{s}B & \implies m\dot{s} = -qRB \end{cases}$$

Conclusión

- La rapidez de la partícula (y su energía cinética) aumenta en la medida que el campo B y su derivada temporal dB/dt sean positivos simultáneamente. Ello ocurre en ciertos intervalos de tiempo, durante los cuales la rapidez aumenta progresivamente;
- Estabilidad de la órbita. Para evitar que el radio de la órbita aumente en el tiempo, es necesario diseñar los flujos de manera que sean independientes de la rapidez,

$$mv_0 + \frac{q}{2\pi R} [\Phi_0 - \Phi(t)] = -qRB \implies \Phi = C + 2\pi R^2 B$$

con C es la constante que depende de las condiciones iniciales de integración. Por otra parte, considerando que existe un campo promedio \bar{B} sobre la superficie de la órbita,

$$\Phi = \bar{B}\pi R^2 \implies \bar{B} = C' + 2B$$

resultado indica que el campo promedio dentro de la órbita circular de radio R es el doble del campo B en la órbita del electrón. C' se puede tomar nula sin perder generalidad.

7.2. Inductancias

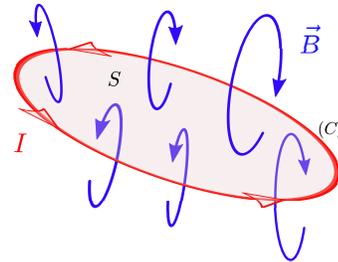
7.2.1. Coeficientes de inducción

En sistemas donde existe una circulación explícita de corriente, el cálculo de los flujos magnéticos enlazados por un circuito particular se puede simplificar en función de coeficientes que dan cuenta de la geometría del sistema, el medio en que está inmerso y las corrientes que circulan.

Considerar un circuito (espira) por donde circula una corriente I ,

$$I \implies \vec{B} \implies \Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \sim I$$

La observación clave es la proporcionalidad entre la corriente que circula por la espira y el flujo magnético total que la espira enlaza.



Inductancia propia

Introducir un coeficiente que mide la proporcionalidad entre Φ_m e I ,

$$\Phi_m = LI$$

donde L es la inductancia propia o coeficiente de autoinducción de la espira. En forma explícita,

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{r}' \cdot d\vec{r}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

y cuyo resultado dependerá de la geometría de la espira y del medio en que está ubicada. No se acostumbra a usar esta expresión para calcular L sino a través del cálculo del flujo magnético que produce I . La inductancia es independiente de la conexión eléctrica a la cual la espira se somete.

Para un circuito formado por N espiras planas, cada una de inductancia propia L , con la misma superficie y por las que puede circular la misma corriente I , el flujo magnético total enlazado será

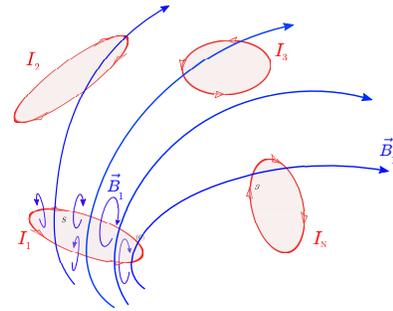
$$\Phi_m^{(total)} = N \Phi_m \quad \Longrightarrow \quad L_{\text{circuito}} = NL$$

Considerar ahora N circuitos, por los que circulan corrientes que producen campos magnéticos,

$$I_1, I_2, \dots, I_N \quad \Longrightarrow \quad \vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3, \dots, \vec{B}_N$$

con \vec{B}_k el campo producido por I_k en todo el espacio. El flujo magnético total enlazado por circuito k es

$$\Phi_m^{(total-k)} = \int_{S_k} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \dots + \vec{B}_N) \cdot d\vec{S}_k$$



Inductancia mutua

Introducir coeficientes que miden la proporcionalidad entre $\Phi_m^{(k)}$ e I_ℓ ,

$$\Phi_m^{(k)} = \int_{S_k} \vec{B}_\ell \cdot d\vec{S}_k = M_{k\ell} I_\ell \quad (M_{kk} \equiv L_k)$$

donde $M_{k\ell}$ es la inductancia mutua o coeficiente de inducción mutua entre la espira k y ℓ . Para $\ell = k$, la inductancia mutua M_{kk} se reduce a la inductancia propia L_k del circuito k . Es directo demostrar

$$M_{k\ell} = M_{\ell k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_k} \oint_{C_\ell} \frac{d\vec{r}_k \cdot \vec{r}_\ell}{\|\vec{r}_k - \vec{r}_\ell\|}$$

Nuevamente, estos coeficientes sólo dependen de la geometría relativa entre los circuitos y del medio en que se encuentran.

En resumen, para un conjunto de N circuitos, con sus corrientes respectivas, el flujo magnético total enlazado por uno de ellos se puede expresar en términos de las inductancias propias y mutuas entre los circuitos del sistema y las corrientes que por ellos circulan,

$$\Phi_m^{(total-k)} = \sum_{\ell=1}^N M_{k\ell} I_\ell$$

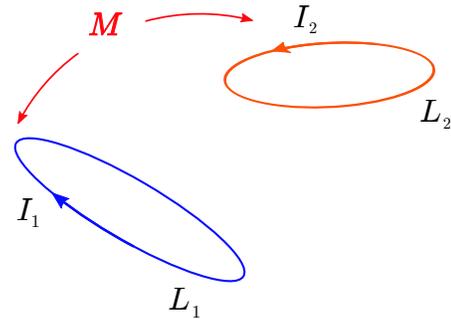
* Caso: 2 circuitos

Identificamos las inductancias propias L_1 y L_2 de cada circuito y la inductancia mutua $M \equiv M_{12} = M_{21}$ (por la simetría que el coeficiente de inducción mutua presenta).

Los flujos magnéticos enlazados por cada circuito son:

$$\Phi_m^{(total-1)} = L_1 I_1 \pm M I_2$$

$$\Phi_m^{(total-2)} = \pm M I_1 + L_2 I_2$$



La indeterminación de signos (\pm) tiene que ver con el comportamiento del flujo propio con respecto al flujo inducido por el otro circuito. Se determina para el problema específico a estudiar, ya que está dado por los sentidos en que circulan las corrientes y las direcciones de los campos que producen.

Unidades

$$[L] = [M] \equiv \frac{[\Phi_m]}{[I]} = \frac{T \cdot m^2}{A} \equiv \text{Henry } (H)$$

7.2.2. Ejemplos

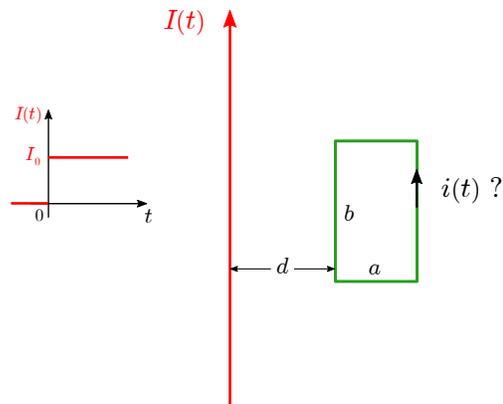
Considerar un conductor recto, muy largo. A una distancia d se encuentra una espira conductora rectangular, resistencia R y de lados a y b . Por el conductor se hace circular, repentinamente, una corriente de magnitud I_0 constante.

¿Circula corriente por la espira?

Solución:

- En $t = 0$ se hace circular una corriente

$$I(t) = I_0 \Theta[t] = \begin{cases} I_0 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Ello genera un campo magnético y un flujo magnético, que varía desde 0 a un cierto valor, es enlazado por la espira. Existe, entonces, una fem inducida en la espira que hará circular una corriente.

- Supongamos que la espira tiene una inductancia propia L y existe una inductancia mutua M entre el alambre y la espira. El flujo magnético enlazado por la espira es, bajo la suposición de sentido de circulación de la corriente i en la espira,

$$\Phi_m = -M I(t) + L i(t)$$

- fem inducida en espira determina corriente en espira,

$$\varepsilon = R i(t) \implies -\frac{d\Phi_m}{dt} = M \frac{dI}{dt} - L \frac{di}{dt} = R i$$

- determinación de la corriente $i(t)$,

$$L \frac{di}{dt} + Ri = M \frac{dI}{dt} \implies L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad t > 0 \implies i(t) = i_0 e^{-t/\tau} \quad \left(\tau = \frac{L}{R}\right)$$

La constante τ es la constante de tiempo de la espira e $i_0 = i(t = 0)$ es la corriente inicial en la espira cuando se establece la corriente I_0 en el conductor.

- determinación de i_0

Para ver el comportamiento no trivial de las corrientes alrededor de $t = 0$, integrar ecuación del circuito en intervalo $[-\delta, \delta]$, con $\delta \rightarrow 0$,

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left[L \frac{di}{dt} + R \frac{dq}{dt} \right] dt = \int_{-\delta}^{\delta} M \frac{dI}{dt} dt \implies Li(\delta) + Rq(\delta) = MI(\delta)$$

donde se ha considerado que $i(-\delta) = q(-\delta) = I(-\delta) = 0$ por las condiciones iniciales del problema. Además,

$$\left. \begin{aligned} q(\delta) &= q(-\delta) = 0 \\ I(\delta) &= I_0 \end{aligned} \right\} \implies i_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} [i(\delta)] = \frac{M}{L} I_0$$

Resultados:

corriente $i(t) = \frac{M}{L} I_0 e^{-t/\tau}$ sentido punteros reloj

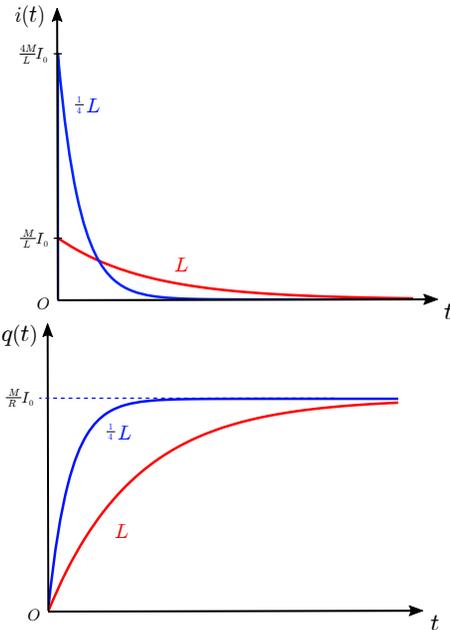
carga $q(t) = \int_0^t i(t') dt' = \frac{M}{R} I_0 [1 - e^{-t/\tau}]$

Comentarios:

* La corriente en la espira sufre un salto de $0 \rightarrow i_0$, limitado por el valor de la inductancia propia L .

Si L disminuye, la constante de tiempo de la espira τ disminuye en forma proporcional y la intensidad aumenta en forma recíproca a la disminución de L . Para $L \rightarrow 0$, la corriente tiene un máximo ($\sim \infty$) de intensidad en un tiempo ~ 0 .

* La carga eléctrica total que circula por la espira crece desde 0 a un valor máximo independiente de L . Pero el tiempo en que demora en alcanzarlo dependerá de τ y, por consiguiente, de L .



Cálculo de M y L

Para calcular M , se supone que circula una corriente I por el conductor, la cual produce un campo

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

al ser expresado en coordenadas cilíndricas, con el eje \hat{k} coincidiendo con el conductor.

El flujo magnético a través de la espira permite calcular la inductancia mutua M ,

$$\Phi_m = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{bI}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \quad \Rightarrow \quad M = \mu_0 \frac{b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)$$

* Se deja como ejercicio el cálculo de L , el que presenta mayores dificultades.

Coefficientes de inducción para bobinas acopladas

Considere dos bobinas de largos ℓ_1 y $\ell_2 < \ell_1$, radios r_1 y r_2 , con m_1 y m_2 vueltas por unidad de largo respectivamente (figura). Determinar sus inductancias propias y la inductancia mutua entre ellas.

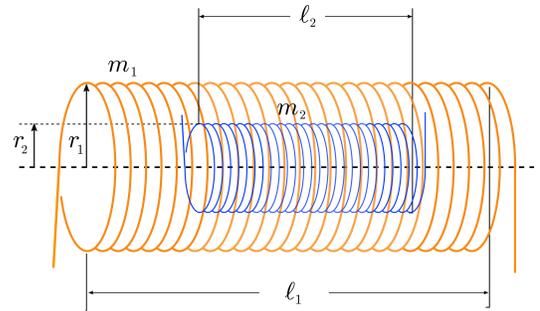
* **Inductancias propias:**

$$\text{bobina 1} \quad L_1 = \mu_0 m_1^2 V_1 \quad (V_1 = \pi r_1^2 \ell_1)$$

$$\text{bobina 2} \quad L_2 = \mu_0 m_2^2 V_2 \quad (V_2 = \pi r_2^2 \ell_2)$$

* **Inductancia mutua:**

Suponiendo que circula corriente I por bobina 1,



$$I \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_1 = \mu_0 m_1 I \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \Phi_m^{\text{total-2}} = (m_2 \ell_2) \|\vec{B}_1\| \pi r_2^2$$

Se concluye,

$$M_{21} = M = \frac{\Phi_m^{\text{total-2}}}{I} = \mu_0 m_1 m_2 V_2$$

Comentarios:

* Verificar que $M_{12} = M$, lo que requiere un cuidadoso análisis de los flujos enlazados.

* M está determinada por el volumen de la bobina de menor tamaño.

* **Relación entre L_1 , L_2 y M :**

$$L_1 L_2 = \frac{V_1}{V_2} M^2 \quad \Rightarrow \quad M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

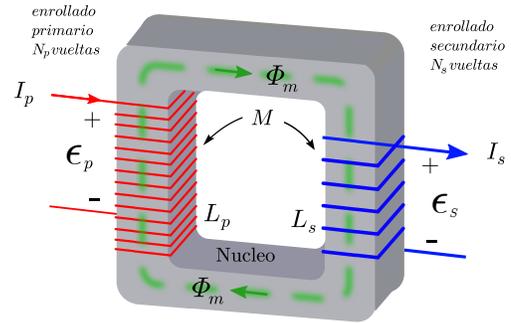
con k el coeficiente de acoplamiento y da cuenta de las pérdidas de flujo magnético que existen en el sistema de 2 bobinas (fracción del campo magnético generada por una bobina que no es enlazado por la otra y viceversa). Para nuestro ejemplo,

$$k = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} \leq 1$$

bajo la hipótesis inicial que $V_2 < V_1$. En el caso de bobinas perfectamente acopladas magnéticamente (bobinas idénticas, no hay pérdidas de flujo), $k = 1$. Para sistemas débilmente acoplados $k \ll 1$.

Aplicación: Transformador (ideal) de voltaje

Se trata del dispositivo dibujado esquemáticamente en la figura. Consiste de un núcleo, de material ferromagnético o no, donde se enrollan dos bobinas, una correspondiente al primario y la otra al secundario. El dispositivo se alimenta con una diferencia de potencial ϵ_p proveniente de una fuente (más allá de caídas de potencial en los elementos resistivos presentes). La idea es regular la diferencia de potencial ϵ_s disponible en el secundario para alimentar una carga eléctrica específica.



* Su funcionamiento:

Se alimenta el transformador vía el primario desde una fuente de energía, con lo cual circula la corriente I_p por la bobina de inductancia L_p . Entonces,

$$\Phi_m^{(p)} = L_p I_p \quad \Rightarrow \quad \Phi_m^{(s)} = \pm M I_p$$

en la medida que el enrollado secundario se mantenga abierto ($I_s = 0$). Entonces,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_p &= -\frac{d\Phi_m^{(p)}}{dt} = -L_p \frac{dI_p}{dt} \\ \epsilon_s &= -\frac{d\Phi_m^{(s)}}{dt} = \mp M \frac{dI_p}{dt} \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\epsilon_s}{\epsilon_p} = \mp \frac{M}{L_p}$$

Más allá del signo (\mp) que es manifestación de como se combinan los flujos magnéticos propios e inducidos, se establece una relación entre las diferencias de potencial del primario y el secundario del transformador. Además, recordando (ejemplo previo) como se relaciona M con L_p y L_s , se obtiene

$$\frac{|\epsilon_s|}{|\epsilon_p|} = k \frac{\sqrt{L_p L_s}}{L_p} = k \sqrt{\frac{L_s}{L_p}} = k \frac{m_s}{m_p} \sqrt{\frac{V_s}{V_p}}$$

donde m es el número de vueltas por unidad de largo de cada bobina y V sus volúmenes.

Diseño:

- Las bobinas están normalmente enrolladas al mismo núcleo, con lo cual tienen la misma sección pero pueden tener diferentes largos.
- Considerando que $m = N/\ell$, con N el número de vueltas y ℓ el largo de la bobina,

$$\frac{|\epsilon_s|}{|\epsilon_p|} = k \frac{N_s}{N_p} \sqrt{\frac{L_p}{L_s}} \quad \rightarrow \quad \frac{N_s}{N_p} \quad \text{para} \quad L_s \sim L_p$$

y no hay pérdidas de flujo entre los enrollados ($k = 1$).

7.3. Energía magnética, fuerzas y torques

El fenómeno de inducción electromagnética indica que, para hacer circular una corriente por un circuito, es necesario inyectarle energía a través de una fuente externa para vencer la fem inducida por la variación, en el tiempo, del flujo magnético enlazado por el circuito.

La energía suministrada es almacenada en el circuito en forma de energía magnética.

Suposiciones:

- Circuito tiene resistencia R , capacidad C e inductancia L ;
- Una fuente externa provee una diferencia de potencial V_f que permite, al conectarse, que circule una corriente I por circuito;
- la potencia (energía por unidad de tiempo) se disipa en R y se almacena como energía eléctrica en C y como energía magnética en L

$$\text{Fuente: } V_f I \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} RI^2 \quad \text{en R} \\ \frac{1}{C} QI = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) \quad \text{en C} \\ \frac{dW_m}{dt} \quad \text{en L} \end{array} \right.$$

$W_m \equiv$ energía magnética.

Cálculo de la energía magnética (1 circuito)

- Dado un circuito rígido, se quiere hacer circular una corriente I a partir de una situación inicial en que no circula corriente;
- Sea i el valor de la corriente entre $[0, I]$;
- Al aumentar el valor de la corriente, se induce en el circuito una fem, para un flujo magnético Φ_m enlazado

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

que impide el aumento de la magnitud de la corriente. Entonces, la fuente externa realiza un trabajo infinitesimal adicional para anular la fem inducida en circuito,

$$dW = -\varepsilon i dt = Li \frac{di}{dt} dt = d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)$$

El trabajo total W realizado por la fuente para llevar la corriente i desde $0 \rightarrow I$ queda almacenado en el circuito como energía potencial magnética W_m ,

$$W \quad \longrightarrow \quad W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi_m I$$

Caso general (N circuitos)

- Sean N circuitos rígidos, por los que inicialmente no circula corriente y alcanzan, finalmente, corrientes I_1, I_2, \dots, I_N ;
- Nuevamente, se almacena energía - en forma magnética - ya que las fuentes externas en cada circuito realizaron un trabajo para vencer las fem inducidas en el proceso de llegar a la situación final;

- Para una situación intermedia en que circula una corriente i_k por el circuito k , existirá una fem ϵ_k inducida al querer aumentar la corriente en cualquiera de los circuitos para llegar a sus valores finales,

$$\epsilon_k = - \frac{d\Phi_m^{(\text{total-k})}}{dt} = - \sum_{\ell=0}^N M_{k\ell} \frac{di_\ell}{dt}$$

Luego, cada fuente externa en cada circuito debe aportar una energía adicional dW_k , la cual, al ser sumada sobre todos los circuitos constituye la energía magnética almacenada por el sistema,

$$dW_k = -\epsilon_k i_k dt \quad \longrightarrow \quad dW_m = \sum_{k=1}^N dW_k = \sum_{k,\ell=1}^N M_{k\ell} i_k \frac{di_\ell}{dt} dt$$

- Usando la propiedad de simetría en los coeficientes de inducción mutuos $M_{k\ell} = M_{\ell k}$ e integrando desde la situación inicial a la final para tener toda la energía magnética almacenada,

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^N M_{k\ell} I_k I_\ell = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_m^{(\text{total-k})} I_k$$

expresada en términos de las inductancias propias y mutuas y las corrientes, o alternativamente, en términos de los flujos totales enlazados por cada circuitos y sus respectivas corrientes.

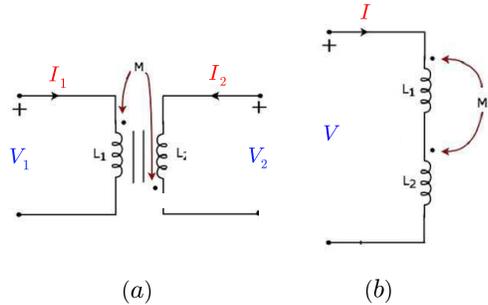
* **Circuitos acoplados**

La energía magnética es

caso (a) $W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 - MI_1I_2$

caso (b) $W_m = \frac{1}{2} (L_1 + L_2 + 2M) I^2$

sigmos asociados al acoplamiento determinados por marcas de polaridad en circuitos (identifican si existe suma o resta de flujos magnéticos, dependiente del orden de los enrollados).



Energía magnética como integral de campo

Se trata de generalizar los resultados obtenidos para circuitos y sus parámetros, para expresar la energía magnética sólo en función de los campos magnéticos que se generan.

Considerar

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_m^{(\text{total-k})} I_k \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} I_k = \int_{S_k} \vec{J}_k \cdot d\vec{S}_k \\ \Phi_m^{(\text{total-k})} = \int_{S_k} \vec{B}_k \cdot d\vec{S}_k = \oint_{C_k} \vec{A}_k \cdot d\vec{r}_k \end{cases}$$

y observando que $\vec{J}_k \parallel d\vec{r}_k$ y $d\vec{S}_k \cdot \vec{r}_k \equiv dV_k$, el elemento de volumen infinitesimal del circuito k por donde circula la densidad de corriente, entonces

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{V_k} \vec{J}_k \cdot \vec{A}_k dV_k \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$$

donde la integral se puede generalizar a todo el espacio porque las densidades de corrientes \vec{J} que circulan limitan la zona no nula del integrando. Considerando la identidad:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \equiv \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{B} - \mu_0 \vec{A} \cdot \vec{J}$$

y en la medida que se tenga una distribución de corriente acotada en un volumen del espacio, la energía magnética se escribe como

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot \vec{B} dV \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV \quad \text{para} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

El campo \vec{H} corresponde a la intensidad de campo magnético y su importancia aparece al considerar la presencia de campo magnéticos en medios materiales. En el caso presente, la relación se sostiene en el vacío.

Fuerzas y torques magnéticos

Caso general (N circuitos)

- N circuitos rígidos en equilibrio;
- Para desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$ del circuito k , se realiza un trabajo mecánico infinitesimal

$$\delta W_{\text{mec}} = \vec{F}^{(k)} \cdot \delta\vec{r}_k = -\vec{F}_m^{(k)} \cdot \delta\vec{r}_k$$

- Existe una variación infinitesimal de la energía magnética del sistema,

$$\delta W_m = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N I_\ell \delta [\Phi_m^{(\text{total}-\ell)}]$$

- Conservación de energía

$$\delta W_{\text{mec}} + \delta W_F = \delta W_m$$

donde δW_F es el trabajo virtual infinitesimal hecho por fuentes externas,

$$\delta W_F = \sum_{\ell=1}^N I_\ell d [\Phi_m^{(\text{total}-\ell)}] = 2 \delta W_m$$

* Fuerza magnética

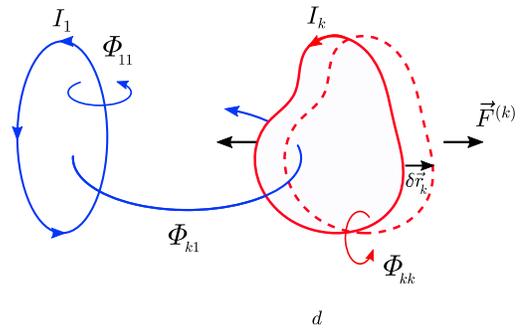
$$\delta W_{\text{mec}} = -\delta W_m \quad \implies \quad \vec{F}_m^{(k)} = \nabla^{(k)} W_m$$

Las fuerzas magnéticas son calculables a partir de la energía magnética almacenada en el sistema donde circulan corrientes. La notación $\nabla^{(k)}$ indica que el gradiente de la energía se toma con respecto a las coordenadas que definen la posición del circuito (k) sobre el que se calcula la fuerza.

* Torque magnético

En forma análoga se puede deducir el torque que se ejerce sobre el circuito (k):

$$\delta W_{\text{rot}} = \vec{\tau}_m^{(k)} \cdot d\vec{\theta}^{(k)} = \delta W_m \quad \implies \quad \vec{\tau}_m^{(k)} = \frac{\partial W_m}{\partial \theta^{(k)}} \hat{\theta}^{(k)}$$



Ejemplo: **Fuerza entre conductores**

Se tienen conductores muy largos, separados distancia d , por los que circulan corrientes I_1 e I_2 .

- Sistema de referencia cartesiano para analizar el problema;
- Calcular fuerza que alambre (1) ejerce sobre (2).
- La energía magnética del par de conductores es:

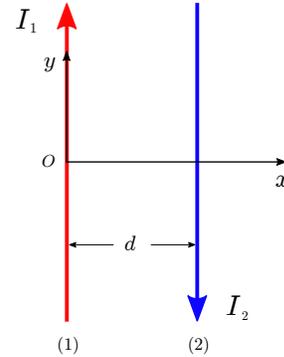
$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 - M I_1 I_2$$

- La fuerza sobre conductor (2),

$$\vec{F} = \nabla W_m \implies \vec{F}_\ell = -I_1 I_2 \frac{\partial M_\ell}{\partial x} \hat{x}$$

- con M_ℓ la inductancia mutua por unidad de largo
- Inductancia mutua por unidad de largo

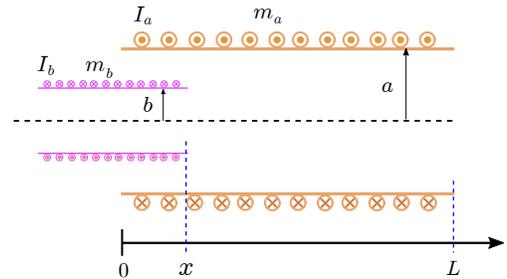
$$M_\ell(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \frac{R}{x} \right]_{R \rightarrow \infty} \implies \frac{\partial M_\ell}{\partial x} = -\frac{\mu_0}{2\pi x} \implies \vec{F}_\ell = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{x} \quad (\text{repulsiva})$$



Ejemplo: **Fuerza entre bobinas**

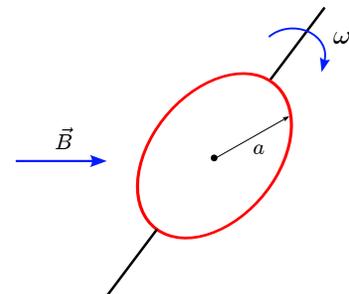
Se tienen dos bobinas muy largas, geometrías conocidas y por las cuales circulan corrientes conocidas (ver figura).

Calcular fuerza sobre bobina interior por 2 métodos.



7.4. Problemas

F-1 (C2-2020P) Una espira circular rota alrededor de un de sus diámetros con rapidez angular ω constante en presencia de un campo magnético B perpendicular al eje de rotación. Si la espira tiene una resistencia R y una inductancia propia L , determine la corriente que circula por la bobina en régimen permanente (más allá de un transiente que existe al iniciarse la rotación de la espira en el campo magnético). Comente los casos $\omega \sim 0$ y $\omega \rightarrow \infty$. Grafique (cualitativamente) la corriente y la fem en la espira como función del tiempo. Comente.

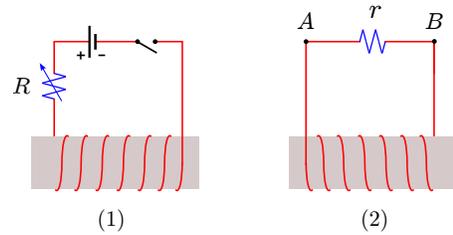


F-2 Una espira circular de radio a está ubicada en el plano xy con centro en el origen. Una carga puntual q se mueve en el mismo plano con velocidad \vec{v} (no relativista) siguiendo la trayectoria $y = D$.

- Si la espira está abierta, ¿cuál es la diferencia de potencial entre sus extremos en función de la coordenada x de la partícula? Suponga que $D \gg a$.
- Encuentre las posiciones de la carga para las cuales la f.e.m. es máxima.

F-3 (C3.5-2022P) ¿Cuál es la dirección de la corriente en la resistencia r del circuito '2' de la figura, en cada una de las situaciones siguientes? En cada caso, explique brevemente su razonamiento.

- El interruptor en circuito '1' se cierra.
- La bobina en '2' se acerca a la bobina en '1' manteniendo cerrado el interruptor S .
- La resistencia R decrece manteniendo el interruptor S cerrado.



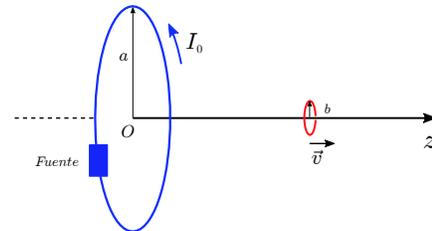
F-4 Un campo magnético \vec{B} , que aumenta a una tasa de 2 [T/s], apunta perpendicularmente al plano del papel y existe sólo en una región circular de radio 0,5 [m].

- Encuentre la f.e.m. inducida sobre una espira circular de un metro de radio, concéntrica con la zona donde \vec{B} es uniforme. ¿Cuál es la polaridad de la f.e.m. inducida?
- Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico a 1,5 [m] del centro del anillo.

F-5 (Examen-2017P) Se tiene un riel dieléctrico perfectamente pulido, circular, de radio a . Este riel está en presencia de un campo magnético \vec{B} normal a su plano. Sobre él gira un punto material de masa m y carga q .

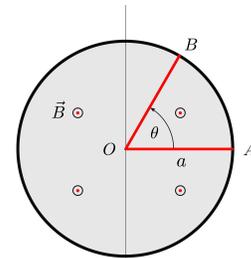
- Determinar, en función del tiempo, la velocidad angular de la partícula si para $t = 0$ se tiene $\|\vec{\omega}(0)\| = \omega_0$ y la magnitud del campo magnético es $\|\vec{B}(t)\| = B_0 e^{-\alpha t}$.
- En el instante $t = t_1$, el riel dieléctrico se vuelve conductor. Explique qué ocurre.

F-6 (C2-2020P) Por la espira plana de radio a , de resistencia R_0 e inductancia propia despreciable, fija en el espacio, circula una corriente continua I_0 gracias a una fuente de energía externa. La espira pequeña de radio b ($b \ll a$), de resistencia R e inductancia propia despreciable, es coaxial con la anterior y se mueve a lo largo del eje común Oz con velocidad constante v .



- Calcular la fem inducida en la espira pequeña cuando ésta se encuentra en cualquier punto sobre el eje.
- Determine la carga neta total que circuló por esta espira en su desplazamiento desde $z = 0 \rightarrow \infty$.
- ¿La entrega de energía por unidad de tiempo de la fuente a la espira es constante o varía mientras la espira pequeña se mueve? Respalde su afirmación con argumentos y el cálculo respectivo.

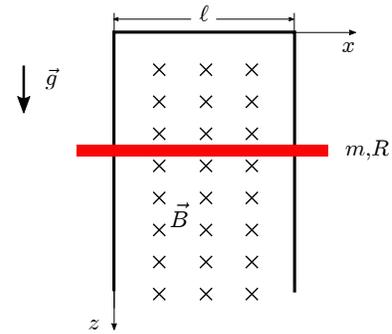
F-7 (C3-2017P) Se tiene un anillo plano muy buen conductor (resistencia despreciable) de radio a en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, donde \hat{k} es la dirección perpendicular al plano del anillo. Este tiene, además, dos varas radiales conductoras, de resistencia R respectivamente, una fija \overline{OA} y otra \overline{OB} , con momento de inercia respecto a su centro de giro $J = \frac{1}{3} m a^2$, susceptible de rotar en torno al punto O .



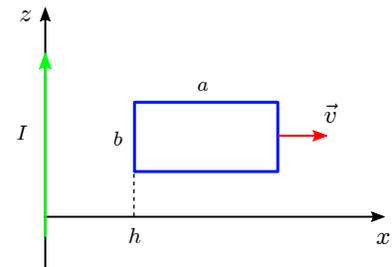
Para efectos autoinductivos despreciables y considerando que en cierto instante inicial $t = 0$ el ángulo entre las barras es $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ y la barra \overline{OB} empieza a rotar con velocidad angular $\dot{\theta}(0) = \omega_0$,

- encuentre la variación temporal del ángulo, $\theta(t)$;
 - las corrientes que circulan por las barras y el anillo;
 - ¿cambian sus resultados si el anillo tiene una resistencia R_a ?
- Respuesta (pág. 216)

F-8 (C3-2018P) Una varilla conductora de resistencia R se puede deslizar por una horquilla de resistencia despreciable, fija en el espacio, como se indica en la figura. El plano de la horquilla es vertical y lo atraviesa un campo magnético perpendicular \vec{B} , uniforme y constante. Existe contacto eléctrico entre la varilla y la horquilla de modo que constituyen un circuito eléctrico cerrado. Si la varilla tiene una masa m , calcule la velocidad con que ella cae (debido al campo gravitatorio) si parte del reposo. Desprecie el efecto del roce y los efectos autoinductivos.



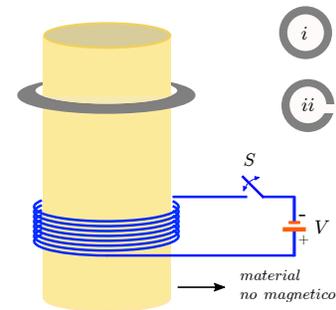
F-9 Si una espira rectangular de lados a y b se aleja con velocidad constante \vec{v} de un alambre infinito por el que circula una corriente I , como se muestra en la figura, determine la fuerza electromotriz inducida en la espira como función del tiempo. Suponga que inicialmente la distancia del lado más cercano de la espira al alambre es $x = h$.



F-10 La bobina señalada en la figura, enrollada apretadamente, se coloca con su eje vertical para llevar a cabo los dos experimentos que se indican:

- a) estando el interruptor S abierto, se coloca arriba de la bobina un anillo delgado de aluminio (anillo i). Luego, se cierra S ;
- b) se repite (a) usando un anillo semejante al anterior pero con un corte pequeño (anillo ii).

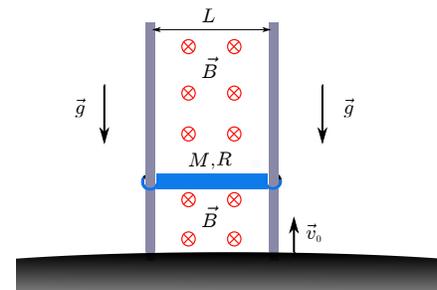
Describa qué ocurre en cada uno de los experimentos. Explique con claridad y justifique.



F-11 (E9-2016P) Un par de barras conductoras (ideales) se clavan en la tierra (supuesta también un conductor ideal), paralela una de otra, a una distancia L . Entre las barras se puede desplazar un conductor de resistencia R y masa M , siempre perpendicular y en contacto con las barras verticales. Considerando gravedad \vec{g} y la presencia del campo magnético terrestre \vec{B} , en las direcciones indicadas en la figura, junto con despreciar los efectos autoinductivos, calcule:

a) cuando la barra conductora se lanza con velocidad inicial \vec{v}_0 desde la tierra hacia arriba, cuál es su altura máxima y el tiempo que demora en alcanzarla? Compare al caso en que $\vec{B} = 0$.

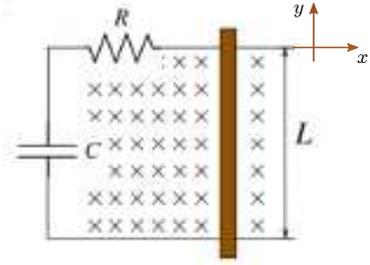
b) cuando la barra conductora se deja caer desde la altura obtenida en (a), calcule o argumente la magnitud del tiempo de caída con respecto al tiempo de subida. ¿Con qué velocidad llega la barra a tierra?



F-12 Investigar y explicar (de forma detallada y haciendo alusión a lo aprendido en curso de Electromagnetismo) los siguientes temas:

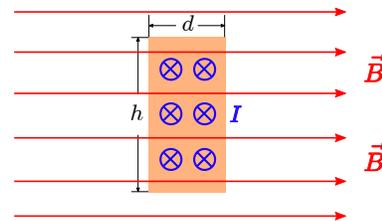
- a) ¿Cómo funcionan los dispositivos que se cargan de manera inalámbrica?
- b) ¿Qué ocurre en este [video](#)?

F-13 Se tiene un circuito formado por un cable conductor sin roce con forma de U, en el cual se encuentra un condensador de capacidad C y una resistencia R , y una barra conductora de masa m que atraviesa los rieles de forma perpendicular. Esta barra se puede mover libremente en el eje \hat{x} sin inclinarse (todo el circuito está en el plano $(\{x,y\})$). Sobre el circuito actúa un campo uniforme en la dirección perpendicular al circuito, $\vec{B} = -B_0 \hat{z}$.



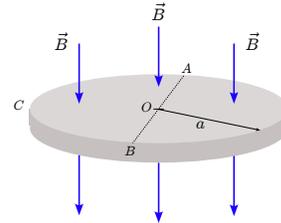
Si inicialmente el condensador se encuentra descargado y la rapidez inicial de la barra es v_0 , encuentre la posición de la barra y la carga almacenada en el condensador en función del tiempo. Hacer un análisis físico sobre qué ocurre en las situaciones límite (si algo no tiene sentido, explicar lo que es).

F-14 (Examen-2021O) Una corriente I constante, representada por las cruces en la figura, se hace pasar por un conductor de cobre de sección rectangular, altura h y ancho d . Si se aplica un campo magnético \vec{B} uniforme y perpendicular al conductor, calcule la diferencia de potencial que existe entre los lados del conductor. Especifique qué lados.



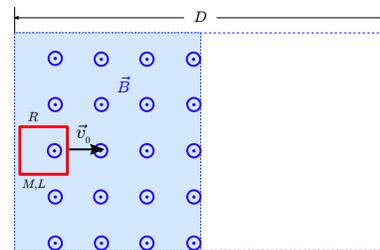
Suponga que ρ es el número de electrones de conducción por unidad de volumen en el conductor.

F-15 (Examen-2023P) Un disco conductor de radio a está ubicado perpendicular a un campo magnético que aumenta linealmente en el tiempo ($\vec{B} = \mathcal{B}t \hat{n}$). Se quiere conocer,



- el campo eléctrico inducido en el disco;
 - la f.e.m. inducida en el disco, a una distancia $r < a$ del centro O del disco;
 - considere los puntos A y B en el disco (ver figura). ¿Cuál es la diferencia de potencial entre esos puntos por dos trayectorias diferentes:
 - trayectoria ACB ;
 - trayectoria AOB
- ¿Es indiferente la trayectoria escogida? Explique porqué.

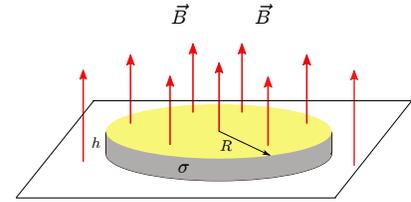
F-16 (C3-2021O) Una espira conductora cuadrada, de masa M , lado L y resistencia R puede deslizarse sin roce sobre un plano de largo $D \gg L$. Perpendicular al plano, existe un campo magnético \vec{B} uniforme que afecta la mitad de la superficie (ver figura). La espira se lanza desde el extremo del plano donde el campo magnético está presente, con velocidad inicial \vec{v}_0 . Se quiere conocer que ocurre con ella a medida que se mueve hacia la zona del plano donde no hay campo magnético. Al respecto,



- Determine la fuerza electromotriz (fem) y la corriente que circula por la espira. Indique con claridad la polaridad de la fem y el sentido en que circula la corriente.
- Determine la fuerza que actúa sobre la espira (magnitud y dirección).
- Calcule, en función del tiempo, la corriente por la espira y la distancia que recorre desde el instante inicial en que abandona la zona con campo magnético.
- Grafique la rapidez de la espira en función del tiempo. Comente el efecto neto que tuvo en la rapidez de la espira el cambio desde la zona con campo magnético a la zona sin él.

- e) ¿Cuál fue la energía disipada en la espira durante su camino desde un extremo al otro del plano?
 f) ¿Cómo cambiarían sus resultados previos si se invierte la dirección del campo magnético?

F-17 (C3-2016P) Un disco conductor plano y delgado, de espesor h , radio R y conductividad σ_c , se coloca en un campo magnético uniforme, $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \hat{k}$, paralelo al eje del disco.

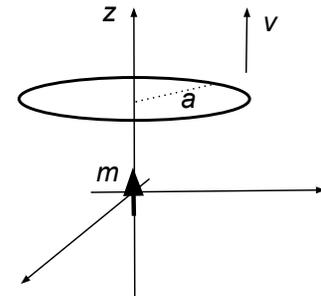


a) Encuentre la densidad de corriente inducida como función de la distancia al eje del disco y la potencia disipada en todo el disco. ¿Cuál es la fuente de esta energía? En su cálculo, desprece los efectos autoinductivos del disco.

b) Explique, cuantitativa o cualitativamente, como calcularía la inductancia propia L del disco. Use como inspiración el cálculo de la inductancia propia para una espira circular de radio conocido.

Respuesta (pág. 216)

F-18 Un dipolo magnético con momento $m = 25 \text{ A} \cdot \text{cm}^2$ se fija en el origen de un sistema de referencia cartesiano y orientado según el eje z . Una espira circular con radio $a = 10 \text{ cm}$ y resistencia $R = 10 \Omega$ se mueve a lo largo de z con velocidad constante $v = 1 \text{ m/s}$ y con eje coincidente con el dipolo. Despreciando la autoinducción, calcular:



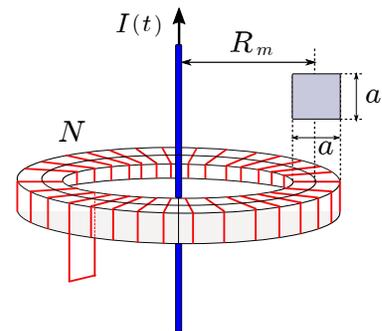
a) el flujo del campo magnético del dipolo a través de la espira en función de la posición z de la espira y calcularlo en la posición $z = z_0 = 200 \text{ cm}$;

b) la carga total que fluye en la espira en un intervalo de tiempo de $t_1 = 1,0 \text{ s}$ y $t_2 = 2,0 \text{ s}$;

c) la expresión analítica de la fuerza necesaria para mantener la espira en movimiento con velocidad constante v , comenzando desde el instante $t = 0$ en el que la espira está en $z = 0$. También calcular el valor de esta fuerza en el instante $t = t_0 = 0,1 \text{ s}$.

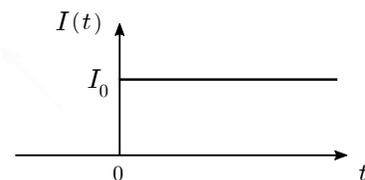
Respuesta (pág. 216)

F-19 (C3-2016P) Considere una bobina toroidal de N vueltas, de sección cuadrada a^2 y un radio medio R_m ($R_m \gg a$), con una resistencia interna R y una inductancia propia L , que se encuentra cortocircuitada (los extremos del enrollado están unidos). Por el eje de la bobina se ubica un alambre recto, muy largo, por el que circula una corriente $I(t)$ como se indica en la figura. En cierto instante ($t = 0$) se hace circular una corriente I_0 por el alambre. Se busca determinar y graficar la corriente $i(t)$ que circula por la bobina y la energía total que en ella se disipa en forma de calor. Para ello se sugiere:



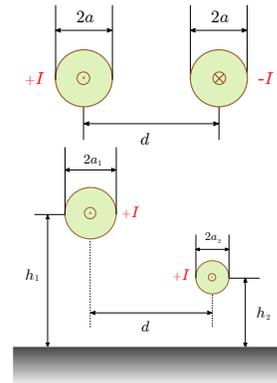
a) determinar el flujo magnético total enlazado por la bobina, suponiendo que el campo magnético es uniforme sobre la sección de la bobina;

b) encontrar una ecuación diferencial ordinaria para la corriente eléctrica en la bobina (mejor, para la carga eléctrica que por ella circula).

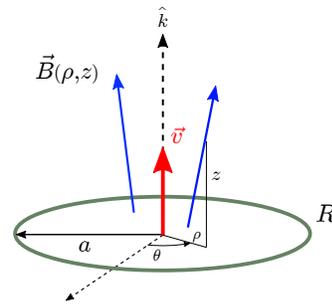


F-20 Una línea de transmisión monofásica consta de dos conductores de radio a , separados por distancia d .

- Calcule la inductancia propia y mutua del sistema por unidad de largo, en la aproximación $a \ll d$.
- Se reemplaza uno de los cable utilizando la Tierra como retorno. Suponiéndola un conductor perfecto, calcule la inductancia si el alambre está a una distancia h del suelo.
- Calcule la inductancia propia del sistema de la figura cuando se envía corriente por los dos cables y se efectúa el retorno por Tierra. Se envía la mitad de la corriente por cada cable.



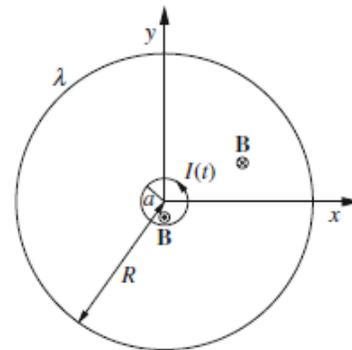
F-21 Un campo magnético tiene simetría rotacional en torno a una línea recta (eje \hat{k}) de un sistema en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) . La componente z del campo en el eje \hat{k} es conocido e igual a $B_z(0, z) = B_0 z/L$, donde L es una constante. Una espira circular de radio a y resistencia R (cuyo eje coincide con el eje \hat{k} definido anteriormente) se traslada con velocidad constante $\vec{v} = v\hat{k}$, el radio de la espira se considera lo suficientemente pequeño como para que el campo magnético sea aproximadamente uniforme en la superficie limitada por el circuito.



- Encontrar la corriente que fluye por el circuito.
- Encontrar la potencia disipada por la espira debido al efecto Joule. También encontrar la fuerza de fricción \vec{f} necesaria para que el sistema se mantenga con velocidad constante.

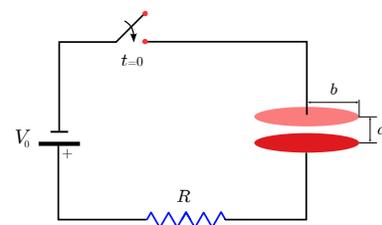
F-22 Un anillo no conductor de masa m , radio R y grosor despreciable está en reposo en el plano $\{x, y\}$, con su centro en el origen del sistema coordenado. El anillo tiene una carga eléctrica Q distribuida uniformemente y rota sin roce en torno a su eje.

Un anillo circular superconductor de radio $a \ll R$, cuyo eje coincide con el anillo cargado y que lleva una corriente I_0 , también se ubica en el plano $x - y$ como se muestra en la figura. En un tiempo $t = 0$ el aro superconductor es calentado por sobre su temperatura crítica, perdiendo su conductividad normal. Por consecuencia de esto, su corriente decae a cero de acuerdo a $I = I(t)$.

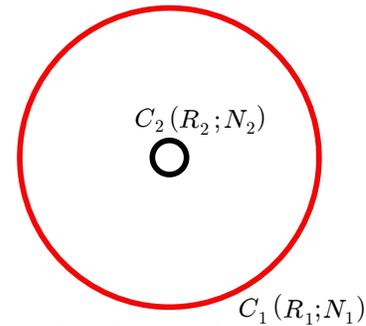


- Ignorando los efectos auto-inductivos, evaluar la velocidad angular $\omega = \omega(t)$ del anillo cargado como función de la corriente $I(t)$ del anillo pequeño. Evaluar la velocidad angular final ω_f , y el momentum angular final L_f del anillo cargado.
- Evaluar el campo magnético al centro del anillo, \vec{B}_c generado por la rotación del anillo.
- Discuta como cambiarían los resultados de (a) si tomáramos en consideración la inductancia propia \mathcal{L} del anillo cargado.

F-23 Un condensador de placas circulares (radio b y separación d) está conectado en serie a una resistencia R y ambos alimentados por una batería de voltaje V_0 . Inicialmente, el interruptor está abierto y el condensador está descargado. En $t = 0$ se cierra el interruptor y circula una corriente en el circuito. Determinar el campo magnético $\vec{B}(t)$ inducido al interior del condensador.



F-24 (Examen-2017P) C_1 y C_2 son dos circuitos circulares con N_1 y N_2 vueltas y radios R_1 y R_2 respectivamente. Ambos son coplanares y concéntricos, con $R_2 \ll R_1$.



- a) Obtener una expresión aproximada para la inductancia mutua entre los circuitos.
- b) Se reemplaza C_2 por un pequeño imán en forma de barra, colocado en el centro de C_1 y normal al plano de éste. Si el momento dipolar del imán es \vec{m} , determinar el flujo magnético proveniente del imán que es enlazado por C_1 .
- c) Se retira el imán hasta un punto muy alejado de C_1 . Determinar la carga eléctrica que circuló por C_1 , de resistencia R e inductancia propia despreciable.

F-25 Una espira conductora de radio a , resistencia R e inductancia propia despreciable se encuentra fija en un plano horizontal. Sobre su eje se encuentra un imán, de momento magnético \vec{m} que apunta hacia la espira y desplazándose con una velocidad $\vec{v}(t)$. Las dimensiones del imán son muy pequeñas comparadas con las de la espira e inicialmente éste se encuentra muy lejos de ella. Evalúe la carga total neta que ha circulado por la espira entre los siguientes instantes:

- a) desde el instante inicial hasta que el imán ha llegado al plano de la espira;
- b) desde el instante inicial hasta que, habiendo atravesado la espira, se encuentra nuevamente muy lejos de ella pero al otro lado de ésta;
- c) ¿cuál es el sentido medio de movimiento de las cargas (positivas) en cada caso?

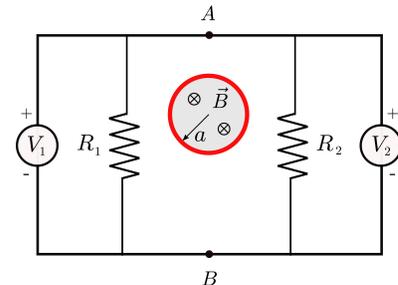
F-26 (C3-2018P) Un sistema de N circuitos (o espiras) con coeficientes de inducción propia y mutua $M_{i,j}$ por los que circulan corrientes $I_i (i, j = 1, N)$ almacena una energía magnética W_{mag} .

- a) Demuestre que la fuerza magnética que se ejerce sobre uno de los circuitos (o espiras) puede calcularse, genéricamente, como

$$\vec{F}_{mag} = \nabla W_{mag}.$$

- b) Considere dos conductores delgados, infinitamente largos y paralelos, separados una distancia D , por los que circulan corrientes I_1 e I_2 . Calcule la fuerza magnética por unidad de largo que un conductor ejerce sobre el otro, a partir de la energía magnética del sistema.

F-27 (C3-2017P) Una antigua pregunta de laboratorio es: ¿qué leen los voltímetros? La figura muestra un circuito plano de dos resistencias R_1 y R_2 y los voltímetros V_1 y V_2 , conectados. Se tiene, además, una fuente de energía que consta de un solenoide de radio a que produce un campo magnitud $B(t)$ creciente en el tiempo y en dirección normal al plano

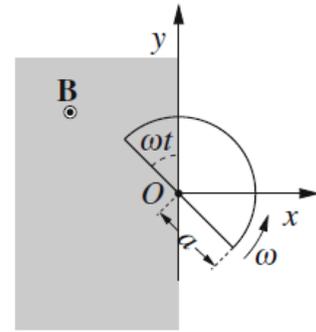


Un voltímetro es un instrumento que indica el valor de la integral de línea de \vec{E} por un camino de integración que parte desde su terminal (+) y llega a su terminal (-). Entonces, qué voltajes muestran los voltímetros V_1 y V_2 y cuál es la diferencia de potencial entre los puntos A y B en los casos siguientes:

- a) los voltímetros en la condición de la figura;
- b) ambos voltímetros a un mismo lado del circuito;
- c) ¿algún comentario sobre sus resultados? Existe la posibilidad que falle la teoría?

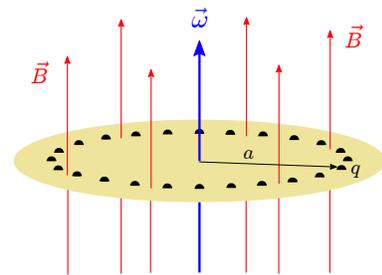
Respuesta (pág. 216)

F-28 Se tiene un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ en el semiplano $x < 0$ de un sistema cartesiano, donde el campo es nulo para $x > 0$. Un circuito semicircular de radio a y resistencia R se ubica en el plano $x - y$, con el centro de la circunferencia completa posicionado en el origen O de nuestro sistema coordenado. El circuito gira en torno al eje z con velocidad angular ω . En primer lugar, suponga que la inductancia propia del circuito es nula y evalúe:

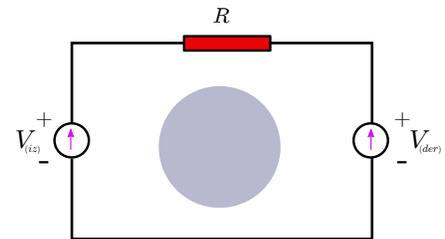


- La corriente que circula por el circuito.
- El torque que realiza la fuerza magnética y la potencia necesaria para mantener el circuito en rotación. Compare con la potencia eléctrica disipada.
- Considerando la inductancia propia del circuito, ¿cambian sus respuestas de (a)?

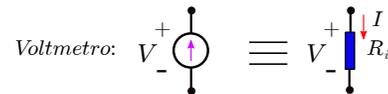
F-29 Un disco plástico (no conductor) de momento de inercia \mathcal{J} con respecto a su eje de simetría principal tiene N cargas q insertas a una distancia a de su centro y uniformemente distribuidas en su periferia. Cuando un campo magnético uniforme, perpendicular al disco, incrementa su valor desde cero hasta un valor final B , el disco rota con velocidad angular $\vec{\omega}$. Calcule explícitamente $\vec{\omega}$ y explique porqué el disco rota en la dirección que se muestra en la figura.



F-30 (Examen-2020P) Dos voltímetros, V_{iz} y V_{der} que tienen una misma resistencia interna R_i de $10^4 \Omega$, están conectados en serie con una resistencia R de $5 \times 10^3 \Omega$. Ellos se conectan como se indica en la figura a través de alambres de resistencia despreciable. La marca '+ +' de ambos voltímetros está arriba, como se indica. Un campo magnético variable en el tiempo está presente en la zona gris de la figura. En un instante de tiempo, en el voltmetro de la izquierda V_{iz} se lee $+0,1$ Volt. En el mismo instante,



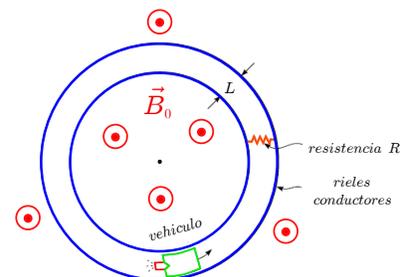
- ¿Cuál es la lectura en voltmetro V_{der} ?
- ¿Hay una corriente (en magnitud y dirección) que circule?
- ¿Habría una fem (valor) inducida?



Observación: El voltmetro mide la diferencia de potencial que existe entre los extremos de su resistencia interna R_i cuando por ella circula una corriente I . La unidad $\Omega \equiv \text{Ohm}$.

Respuesta (pág. 216)

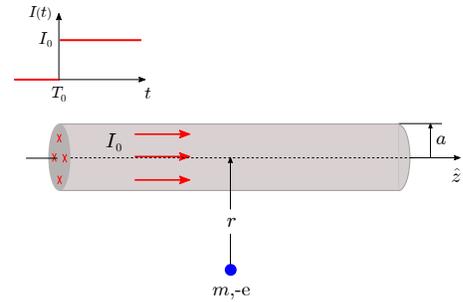
F-31 (C2-2020P) Un vehículo de metal viaja por sobre un conjunto de rieles perfectamente conductores y que forman un gran círculo. Los rieles están L metros aparte y en presencia de un campo magnético uniforme \vec{B}_0 normal a su plano (figura). La masa del vehículo es m y está impulsado por un motor de cohete que ejerce un empuje constante F_0 . El sistema actúa como un generador de corriente continua que alimenta una resistencia de carga R . Determine la corriente que circula por la resistencia en el tiempo y grafíquela.



F-32 (Examen-2021O) Un electrón, masa m y carga eléctrica $-e$, está en reposo a una distancia r del eje de un conductor muy largo, de radio $a < r$. A partir de cierto instante T_0 , circula una corriente constante,

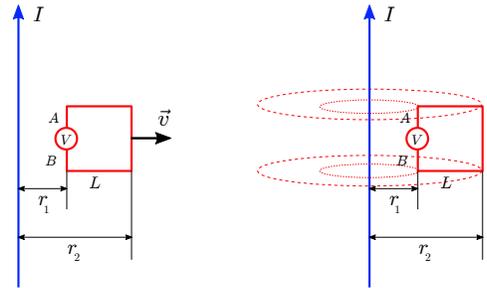
$$I(t) = \begin{cases} 0 & t \leq T_0 \\ I_0 & t > T_0 \end{cases},$$

que se distribuye uniformemente por el conductor. ¿Es afectado el estado de reposo que tenía originalmente ($t \leq T_0$) el electrón? Justifique su afirmación. De existir cambios, indique cualitativamente qué le ocurre al electrón.



F-33 Considere una espira circular de radio inicial $r_0 = 0,1 \text{ m}$ y resistencia 1Ω . Una fuente de voltaje variable en el circuito de la espira tiene inicialmente el valor de 1 V y perpendicularmente a la espira existe un campo magnético uniforme $B = 1 \text{ T}$. Al tiempo $t = 0$ el radio de la espira comienza a aumentar a una tasa de 1 m/s manteniendo fija la resistencia ($r = r_0 + t$). Desprecie el campo magnético debido a la corriente en el circuito y calcule la potencia de la fuente de f.e.m. para que la corriente se mantenga constante en 1 A . ¿Cuál es el valor del voltaje cuando $r = 10r_0$?

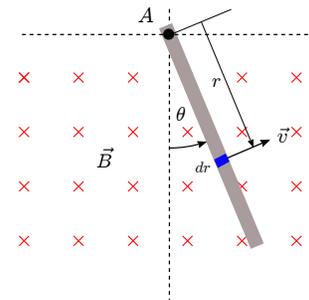
F-34 Un alambre muy largo lleva una corriente I como se indica en figura. Una espira cuadrada conectada a un voltmetro se aleja radialmente del alambre con velocidad \vec{v} . ¿Cuál de los terminales del instrumento, A ó B, es positivo?



a) Calcule el voltaje que lee el voltmetro en función de las distancias r_1 y r_2 . Probablemente su cálculo es aproximado. Identifique la razón y estime el error cometido en el cálculo realizado.

b) Ahora, haga rotar la espira alrededor del alambre y responda las mismas preguntas previas.

F-35 Una barra metálica plana, de longitud ℓ y masa m puede girar alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos (A). La barra es forzada a oscilar en un campo magnético B_0 , uniforme y perpendicular al plano de oscilación de la barra. La oscilación es tal que $\theta(t) = \theta_0 \text{ sen}(\omega t)$, donde θ_0 y ω son constantes.



a) Escriba la magnitud infinitesimal $d\mathcal{E}$ de la f.e.m. inducida en una sección infinitesimal de la barra dr en función de la distancia r al punto A y la velocidad lineal del elemento. Expresé $d\mathcal{E}$ en función de r y t .

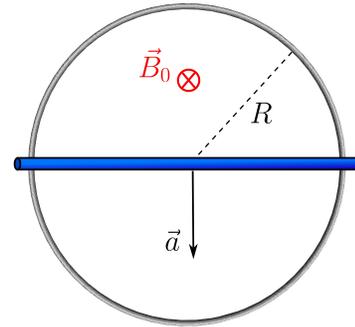
b) Evalúe la f.e.m. total inducida en la barra en función del tiempo. Especifique la polaridad de los extremos de la barra.

c) ¿Para qué valor del ángulo θ la f.e.m. inducida es máxima y cuál es ese valor?

F-36 Un cilindro metálico muy largo, de radio a , conductividad σ_c y permeabilidad μ se coloca en un campo magnético \vec{H}_0 constante y uniforme, que se despliega paralelo al eje del cilindro. Se interrumpe el campo magnético externo y se mantiene en cero.

Encontrar el campo magnético en el interior del cilindro en función del tiempo.

F-37 (C3.2-2022P) Un anillo circular metálico de radio R se encuentra fijo a un plano horizontal. El material del que está hecho el anillo posee una resistencia λ por unidad de longitud. En la región donde se halla el anillo existe un campo magnético uniforme \vec{B}_0 como se indica en la figura de este problema. Una barra perfectamente conductora de cierta longitud ℓ ($\ell > 2R$) se encuentra inicialmente según un diámetro del anillo y haciendo contacto al mismo. Si a la barra se le hace rodar sobre el anillo con una aceleración constante a , determine la corriente que pasa a través de la barra cuando ha recorrido una distancia x . ¿Qué cambia si se hace rodar la barra en la dirección contraria?



F-38 Por un cilindro conductor muy largo, de radio a , con conductividad σ_c y permeabilidad μ , circula una corriente $I = I_0 e^{i\omega t}$.

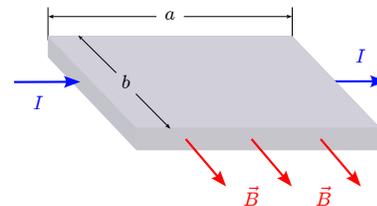
Calcular los campos eléctrico y magnético en todo el espacio (expresé sus resultado en función de los datos del problema).

F-39 Una corriente I fluye de izquierda a derecha a través de una barra rectangular de material conductor, en presencia de un campo magnético \vec{B} que apunta hacia afuera de la página.

a) Si las cargas en tránsito son positivas, determine la dirección de deflexión de éstas.

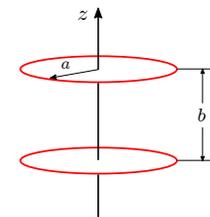
b) Encuentre la diferencia de potencial (voltaje Hall) entre la cara superior e inferior del conductor en términos de B , v y las dimensiones (relevantes) de la barra.

c) Analice lo anterior para el caso en que los portadores son de carga negativa.



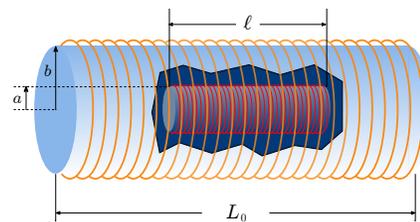
F-40 Deduzca una fórmula aproximada para la inducción mutua entre 2 anillos circulares del mismo radio a , dispuestos como ruedas en el mismo eje con sus centros separados una distancia b . Use una aproximación válida para $b \gg a$.

Respuesta (pág. 216)

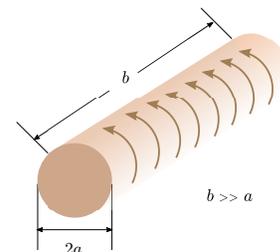


F-41 a) Encuentre la autoinductancia de un solenoide muy largo (de largo L_0) y radio R que posee n vueltas por unidad de largo.

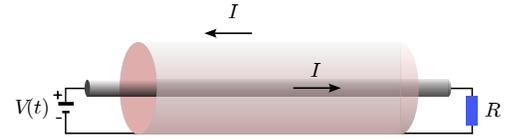
b) Considere ahora un solenoide corto (de largo ℓ y radio a , con n_1 vueltas por unidad de largo) que yace en el eje de un solenoide muy largo (de radio b , con n_2 vueltas por unidad de largo), como muestra la figura. Calcule el flujo de campo magnético sobre el solenoide largo y la inductancia mutua del sistema.



F-42 (Examen-2021O) Usando conceptos de energía magnética, calcule la autoinductancia de un cilindro largo de metal, de radio a y largo $b \gg a$, por el que la corriente circula tangencialmente.



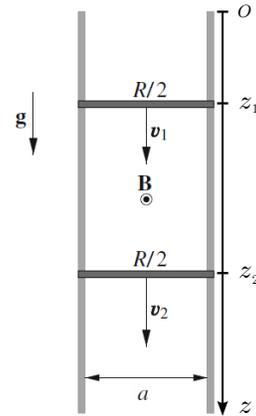
F-43 (C3.3-2022P) Un cable coaxial, formado por dos conductores de radio R_1 el interior y radio R_2 el exterior (ver figura) y largo $L \gg R_2$, se conecta en un extremo a una fuente externa de voltaje que varía armónicamente en el tiempo con frecuencia angular ω , $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$. En el extremo opuesto, hay una resistencia R que representa los efectos resistivos del sistema.



a) Calcule la inductancia propia del cable coaxial, suponiendo que es muy largo y se pueden despreciar los efectos de borde.

b) Determina el máximo valor de la corriente que circula por el cable.

F-44 (C3-2023-P) Dos barras de muy alta conductividad (resistencia eléctrica despreciable) se colocan verticalmente, a una distancia a entre ellas, en presencia del campo gravitacional terrestre (\vec{g}). Un campo magnético \vec{B} , horizontal y uniforme, existe perpendicular al plano definido por las barras verticales. Otras dos barras, cada una de masa m , largo a y resistencia eléctrica $R/2$, pueden moverse sin roce y con sus extremos en contacto permanente con las dos barras verticales. La resistencia neta del circuito rectangular que se forma puede considerarse siempre R , independiente de la posición de las barras horizontales. No considere efectos autoinductivos.



Analice la situación siguiente: en $t = 0$, la barra superior tiene una velocidad $v_0 \neq 0$ dirigida en la dirección de la aceleración de gravedad y la barra inferior, ubicada una distancia h más abajo, empieza su caída libre desde el reposo.

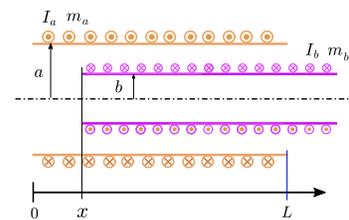
a) Escriba las ecuaciones que permiten describir el movimiento de las barras.

b) Determine, en el tiempo, la corriente en el circuito y las velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 de cada barra. Grafique la evolución temporal de estas cantidades y explicité sus valores asintóticos ($t \rightarrow \infty$).

c) ¿Cambian sus resultados para la corriente y las velocidades de las barras si inicialmente ambas barras se dejan caer desde el reposo ($v_0 = 0$)?

Respuesta (pág. 216)

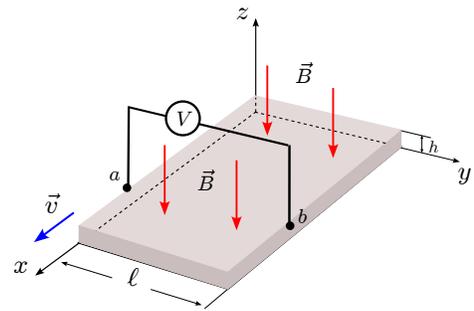
F-45 (C3-2023-P) Se tienen dos bobinas de largo L (muy largas), sección circular, radios a y b , con m_a y m_b vueltas de enrollado por unidad de largo, por las cuales circulan corrientes I_a e I_b en los sentidos indicados en la figura. La bobina con la corriente I_a está fija en el espacio mientras que la otra con la corriente I_b , inicialmente centrada con respecto a la fija, se desplaza una distancia x fuera del núcleo mayor.



a) Indicando con precisión sus suposiciones, calcular fuerza magnética (magnitud y dirección) que se ejerce sobre bobina interior.

b) Analice cualitativamente el tipo de movimiento que experimenta la bobina en la situación planteada. Indique qué ocurriría con el tipo de movimiento frente a un cambio en la dirección de circulación de I_b , en las magnitudes relativas de I_b con respecto a I_a y en m_b con respecto a m_a .

F-46 (C3-2023-P) Se tiene una barra conductora de sección transversal rectangular (ℓh), muy larga, en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B} = -B\hat{z}$, como se muestra en figura. Se conecta un voltmetro (mide diferencia de potencial $V \equiv (V_a - V_b)$) entre sus bornes) a la barra conductora a través de contactos móviles a y b . Se pide indicar la lectura V en el voltmetro, explicando con claridad su origen, en los siguientes casos:



- La barra se mueve con velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$ en presencia de \vec{B} . El voltmetro está fijo con respecto al sistema de coordenadas.
- La barra no se mueve. La fuente que produce el campo se mueve con $\vec{v} = v\hat{x}$ y el voltmetro permanece fijo.
- La barra permanece fija. La fuente del campo \vec{B} y el voltmetro se mueven con $\vec{v} = v\hat{x}$.
- La barra y el campo están fijos. El voltmetro se mueve con $\vec{v} = v\hat{x}$.
- La barra y la fuente del campo \vec{B} se mueven con $\vec{v} = v\hat{x}$ y el voltmetro permanece fijo.
- La barra y el voltmetro se mueven con velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$ y el campo permanece fijo.

Ondas electromagnéticas

8.1. Ecuaciones de Maxwell

En esta sección se recapitulan las ecuaciones que describen los fenómenos eléctricos y magnéticos, tanto en el vacío como en medios materiales. Especial importancia tiene verificar la consistencia interna de dichas ecuaciones y tratar de entender la aparente falta de simetría entre los campos eléctricos y los magnéticos.

8.1.1. Corriente de desplazamiento

Los fenómenos eléctricos y magnéticos están descritos, en el caso estático, por el siguiente conjunto de ecuaciones que relacionan las fuentes del fenómeno con los campos que se generan:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Fuentes:} & \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho_\ell \equiv \text{densidad volumétrica de carga libre} \\ \vec{J}_c \equiv \text{densidad de corriente eléctrica de conducción} \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Eléctrico:} & \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\epsilon \vec{E}) \\
 \\
 \text{Magnético:} & \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c \end{array} \right. \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (\mu \vec{H})
 \end{array}$$

La descripción difiere si el fenómeno ocurre en el vacío o en presencia de medios materiales.

* **En el vacío:** basta el conjunto de 4 ecuaciones para los campos \vec{E} y \vec{B} .

* **En medio material:** es necesario complementar la descripción en el vacío a través de las **ecuaciones constitutivas del medio**, que toman en cuenta la polarización \vec{P} y la magnetización \vec{M} que experimentan. Esto define al vector desplazamiento \vec{D} y al vector intensidad de campo magnético \vec{H} , magnitudes independientes del medio material.

Los fenómenos descritos, independientes los eléctricos de los magnéticos en el límite estático, se relacionan en el caso dinámico a través del fenómeno de inducción electromagnética, es decir,

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{es modificada a} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

dando origen a una comprensión electromagnética de los fenómenos más que la diferenciación sugerida por los fenómenos estáticos a la electricidad y al magnetismo.

Para fijar ideas, el fenómeno electromagnético quedaría descrito por campos eléctricos y magnéticos que satisfacen,

$$\text{Electromagnetismo:} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_e & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c \end{cases}$$

y la relación entre (\vec{E}, \vec{B}) y (\vec{D}, \vec{H}) es la determinada por las ecuaciones constitutivas del medio si está presente o una simple proporcionalidad en el vacío ($\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$).

La falta de simetría de las ecuaciones sirve, en principio, para argumentar que la descripción sería incompleta. Ello, a pesar que el marco teórico era suficiente para dar cuenta de la física observada (a la fecha de este nivel de entendimiento del electromagnetismo, alrededor de 1862-64). Sin embargo, el hecho que campos magnéticos variables en el tiempo pueden actuar como fuente de campos eléctricos y la situación inversa no parecía factible, indicaría una asimetría en la naturaleza de los campos difícil de entender.

Maxwell y la corriente de desplazamiento

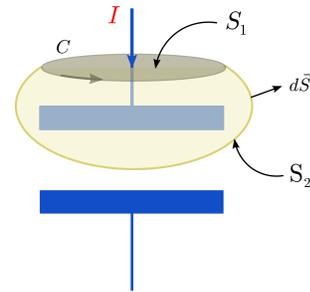
La asimetría en las ecuaciones de la divergencia de los campos eléctricos y magnéticos expresa un hecho experimental: las cargas eléctricas existen micro y macroscópicamente (ρ_e) mientras que no existe evidencia macroscópica de cargas magnéticas en la naturaleza. Por ello, es parte intrínseca de la teoría.

La asimetría que llama la atención se refiere al rotor de los campos electromagnéticos. Ella se hace explícita al escribir esas ecuaciones en ausencia de fuentes,

$$\text{Electromagnetismo:} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{H} = 0 \end{cases}$$

Para cuantificar lo que ocurre, considerar un condensador de placas planas y paralelas, espacio vacío entre ellas, alimentado por una corriente I .

El problema es entender la ecuación $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c$ en este problema. Para ello, elegir una superficie $S = S_1 + S_2$, ambas encerradas por misma curva C , que encierra a la placa superior.



$$\int_{S_1} \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oint_{C(S_1)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = -I$$

$$\int_{S_2} \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oint_{C(S_2)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0 \quad !!$$

Dos resultados diferentes para, en principio, la misma integral. ¿Cuál es correcta?

- * Para S_1 no importa su forma ni su posición (fuera del condensador). Luego, el resultado no es cuestionable.
 * Para S_2 el resultado depende del dispositivo considerado y el volumen que encierra. Hay algo no considerado en este cálculo.

Suposición:

Existe una densidad de corriente \vec{J}_D entre las placas del condensador tal que el flujo de corriente a través de la superficie cerrada $S = S_1 + S_2$ es nulo,

$$\text{para: } \vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_D \quad \longrightarrow \quad \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{S_2} \vec{J}_D \cdot d\vec{S} = I$$

Relacionando la corriente que llega a la placa con la carga libre q_ℓ acumulada en la placa,

$$I = \frac{dq_\ell}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \rho_\ell dV \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \nabla \cdot \vec{D} dV \right] = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

permite la identificación de \vec{J}_D con una densidad de corriente, llamada de **desplazamiento**,

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Observar que existe sólo si el campo eléctrico varía en el tiempo.

Conclusión:

Para tener una descripción consistente del campo electromagnético, hay que identificar correctamente la densidad de corriente total que da origen al campo magnético,

$$\vec{J}_c \quad \longrightarrow \quad \vec{J}_c + \vec{J}_D \quad \Longrightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ecuación que permite recuperar la simetría perdida entre \vec{E} y \vec{B} .

8.1.2. Las ecuaciones del electromagnetismo

La teoría de Maxwell del electromagnetismo queda resumida en un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales para los campos eléctricos y magnéticos,

$$\vec{E}(\vec{r};t); \vec{B}(\vec{r};t) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}$$

para fuentes ρ_ℓ de carga libre y \vec{J}_c de corriente eléctrica de conducción.

Se complementan con las ecuaciones constitutivas del medio donde se describen los campos,

$$\begin{array}{ll} \text{medio: vacío} & \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{array} \right. \\ \text{medio: material} & \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} & \longrightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{medio lineal y homogéneo} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) & \longrightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{medio lineal y homogéneo} \end{array} \right. \end{array}$$

Alternativamente, es interesante expresar las ecuaciones de Maxwell sólo en términos de los campos eléctricos \vec{E} y magnéticos \vec{B} . Ellos tienen su origen (y término en el caso eléctrico) en las cargas eléctricas totales y corrientes totales que los producen,

$$\text{carga eléctrica total: } \rho = \rho_\ell + \rho_p \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \rho_\ell : & \text{(libre)} \\ \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} : & \text{(polarización)} \end{cases}$$

$$\text{corriente eléctrica total: } \vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_p + \vec{J}_M \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{J}_c = \sigma_c \vec{E} & \text{(conducción)} \\ \vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} & \text{(polarización)} \\ \vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} & \text{(magnetización)} \end{cases}$$

En este caso, las ecuaciones de Maxwell se expresan como

$$\vec{E}(\vec{r};t); \vec{B}(\vec{r};t) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

con $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ y c se identificará (más tarde) como la rapidez de la luz (299.792,458 [Km/s]).

Condiciones de borde

Complementa la búsqueda de soluciones a las ecuaciones de Maxwell, el comportamiento de los campos \vec{E} y \vec{B} al cambiar de medio. En detalle estudiamos los casos eléctrico y magnético, siendo su generalización al caso magnético directa.

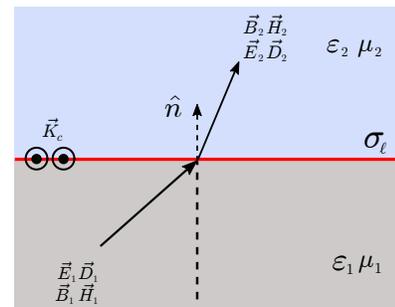
Suponiendo que existe una densidad de carga superficial libre σ_ℓ y una densidad de corriente superficial de conducción \vec{K}_c ,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell \quad \Longrightarrow \quad \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_\ell$$

$$\nabla \times \vec{D} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_c$$



* Siempre se conservan las componentes tangenciales de los campos eléctricos y las componentes normales de los campos magnéticos en la superficie de separación.

* Sufren una discontinuidad en la superficie las componentes normales del vector desplazamiento (salvo que $\sigma_\ell = 0$) así como las componentes tangenciales de la intensidad de campo magnético (salvo $\vec{K}_c = 0$).

8.2. Contenido en la descripción de Maxwell

8.2.1. Relatividad especial

Una medida de la bondad de las ecuaciones de Maxwell para describir los fenómenos electromagnéticos es que deben ser invariantes en sistemas inerciales que se mueven con velocidad \vec{v} el uno relativo al otro. En otras palabras, es la manera de expresar que la física del electromagnetismo - sus leyes - es la misma en todo sistema de referencia inercial.

Formalmente: considerar un sistema de referencia inercial S y otro S' que se mueve con \vec{v} constante con respecto a S ; entonces, los observadores en S y S' esperarían que el fenómeno electromagnético que cada uno observa está descrito por las ecuaciones de Maxwell,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Observador en } S: \\ \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r};t) = \rho_\ell(\vec{r};t) \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r};t) = 0 \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r};t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r};t)}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H}(\vec{r};t) = \vec{J}_c(\vec{r};t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r};t)}{\partial t} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Observador en } S': \\ \nabla' \cdot \vec{D}'(\vec{r}';t') = \rho'_\ell(\vec{r}';t') \\ \nabla' \cdot \vec{B}'(\vec{r}';t') = 0 \\ \nabla' \times \vec{E}'(\vec{r}';t') = -\frac{\partial \vec{B}'(\vec{r}';t')}{\partial t'} \\ \nabla' \times \vec{H}'(\vec{r}';t') = \vec{J}'_c(\vec{r}';t') + \frac{\partial \vec{D}'(\vec{r}';t')}{\partial t'} \end{array} \right.$$

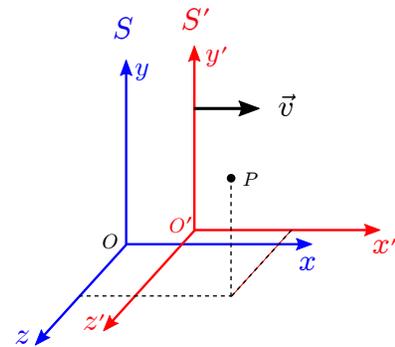
En la física clásica de Newton (Mecánica), la exigencia de invariancia de forma en las ecuaciones que describen el fenómeno se satisface, en forma simple, si las coordenadas entre los sistemas S y S' sufren una transformación de Galileo ($x' = x - vt$ para $\vec{v} = v\hat{x}$) y el tiempo tiene un carácter absoluto ($t' = t$).

Las ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo transformaciones de Galileo !!

Transformaciones de Lorentz

La búsqueda de una transformación de coordenadas espaciales y temporales compatibles con la invariancia de las ecuaciones de Maxwell en S y S' fue realizada por Lorentz. Concluyó el resultado siguiente (versión simplificada para $\vec{v} = v\hat{x}$):

$$\left. \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \\ c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \equiv \text{rapidez de la luz} \end{array}$$



Estas transformaciones, más tarde replanteadas por Einstein, reemplazan las transformaciones de Galileo y forman la esencia de la teoría de la relatividad especial. Por supuesto,

$$\text{Transformaciones de Lorentz} \quad \xrightarrow{v \ll c} \quad \text{Transformaciones de Galileo}$$

Se destaca: el fenómeno relativista es parte intrínseca del fenómeno electromagnético y limita el rango de velocidades en la naturaleza a $c \sim 300.000$ Km/s.

8.2.2. Conservación de la energía electromagnética

Introducir la cantidad vectorial

$$\vec{S}(\vec{r};t) = \vec{E}(\vec{r};t) \times \vec{H}(\vec{r};t) \quad \text{Vector de Poynting}$$

y analicemos sus unidades para ver si tiene algún interés físico:

$$[S] = [E][H] = \begin{cases} \left(\frac{N}{C}\right) \left(\frac{A}{L}\right) = \left(\frac{N \cdot I}{L^2}\right) \\ \text{Potencia} = \left[\frac{W}{m^2}\right] = \left[\frac{J}{sm^2}\right] \end{cases}$$

Se concluye que el vector de Poynting mide la energía que transportan los campos electromagnéticos, por unidad de tiempo y por unidad de área.

En efecto, al considerar

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & + & & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ + \left\{ \begin{array}{l} \text{la identidad vectorial:} & \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} \\ \text{la densidad de energía electromagnética:} & \omega_{EM} = \frac{1}{2} [\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}] \end{array} \right. \end{aligned}$$

se concluye que el vector de Poynting \vec{S} satisface una ecuación de conservación de la energía electromagnética,

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial \omega_{EM}}{\partial t} + \vec{J}_c \cdot \vec{E} = 0$$

La forma integral de esta ecuación de conservación facilita su interpretación. Tomando un volumen V en el espacio, encerrado por una superficie de área A , e integrando se obtiene:

$$\oint_{A(V)} \vec{S} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial W_{EM}}{\partial t} + \int_V \vec{J}_c \cdot \vec{E} dV = 0$$

con una interpretación directa: el flujo de energía electromagnética por unidad de tiempo, a través de superficie A , más la variación temporal de la energía electromagnética almacenada en el volumen V y más la potencia disipada por efecto Joule en el volumen considerado, es nulo.

Por ejemplo, en una zona de volumen V del espacio vacío (no hay corriente de conducción \vec{J}_c), la variación temporal de la energía electromagnética contenida en V actúa como fuente o sumidero del flujo de energía por unidad de tiempo a través de la superficie que limita a V .

8.3. Ondas electromagnéticas

8.3.1. Fenómeno de propagación

Se trata de estudiar el comportamiento de los campos electromagnéticos en una zona del espacio caracterizada por permitividad ϵ y permeabilidad μ y donde no existen fuentes (densidades de carga libres o corrientes de conducción). La generación y recepción de los campos se ubica fuera de la zona de interés.

Las ecuaciones de Maxwell que satisfacen esos campos son:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \text{ donde } \begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \\ c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \equiv \text{velocidad de la luz en vacío} \\ n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \equiv \text{índice de refracción} \end{cases}$$

ϵ_r y μ_r son las constantes dieléctricas y magnéticas del medio (o permitividad relativa y permeabilidad relativa).

Combinando las ecuaciones se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{r};t) \\ \vec{B}(\vec{r};t) \end{Bmatrix} = 0$$

es decir, los campos en el medio (sin fuentes) satisfacen una **ecuación de onda clásica**.

Consecuentemente, tanto \vec{E} y \vec{B} se propagan como ondas con una rapidez de propagación v . En el vacío, $\mu_r = 1$ y $v \rightarrow c$.

* Solución a ecuación de onda clásica

Para entender la ecuación de onda, basta considerar en 1 dimensión la forma escalar correspondiente a una de las componentes de los campos,

$$\frac{\partial^2 F(x;t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F(x;t)}{\partial t^2} = 0 \quad F \equiv E_x, B_x, \text{ etc}$$

Onda viajera

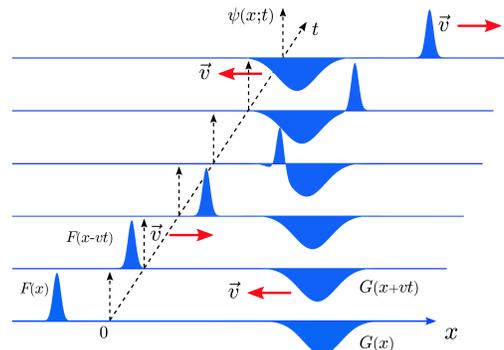
$$F = F(x \mp vt) \quad (\text{de simple verificación})$$

donde $F(x - vt)$ significa que el perfil $F(x)$ de la onda se propaga en el sentido $(+x)$ y $F(x + vt)$ en el sentido $(-x)$.

Solución general:

$$\psi(x;t) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

F y G funciones arbitrarias.



8.3.2. Ondas planas monocromáticas

Onda plana:

los campos \vec{E} y \vec{B} dependen de 1 coordenada espacial (la distancia al origen o foco) y están contenidos en un plano (**plano de propagación**).

Onda monocromática:

los campos \vec{E} y \vec{B} varían armónicamente en el tiempo con una frecuencia angular ω .

Entonces,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r};t) \\ \vec{B}(\vec{r};t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{array} \right\} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad i = \sqrt{-1}$$

donde \vec{E}_0 y \vec{B}_0 son las amplitudes (complejos, en general) vectoriales de los campos.

Las soluciones físicamente permitidas corresponden a la parte real (o la imaginaria) de las soluciones planteadas,

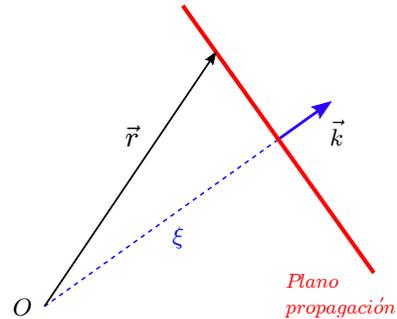
$$\vec{e}(\vec{r};t) = \text{Re} [\vec{E}(\vec{r};t)] \quad \vec{b}(\vec{r};t) = \text{Re} [\vec{B}(\vec{r};t)];$$

$\vec{r} \equiv$ vector posición

$\vec{k} \equiv$ vector número de onda

$\xi = \vec{r} \cdot \hat{k} \equiv$ distancia origen - plano propagación

plano propagación: contiene campos electromagnéticos \vec{E} y \vec{B}



Restricción:

Las soluciones propuestas para \vec{E} y \vec{B} corresponderán a ondas tipo viajeras sólo si satisfacen la ecuación de ondas clásica. Ello significa que los parámetros que caracterizan a los campos que se propagan no son independientes y debe existir una relación, llamada de dispersión, entre el número de onda, la frecuencia angular y la velocidad de propagación de la onda,

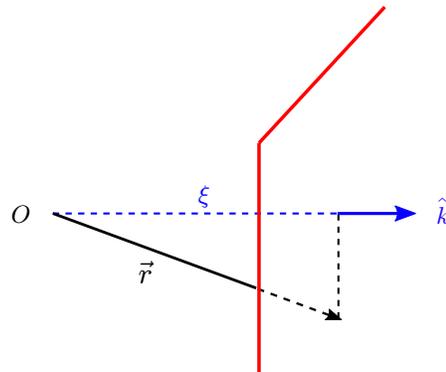
relación de dispersión: $k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \quad k = \|\vec{k}\|$

Introduciendo,

$$\left. \begin{array}{l} \text{longitud de la onda: } \lambda = \frac{2\pi}{k} \\ \text{frecuencia de la onda: } \nu = \frac{\omega}{2\pi} \end{array} \right\} \implies k = \frac{\omega}{v} \implies v = \lambda \nu$$

Plano de propagación:

- Ubicación a distancia: $\xi = \vec{r} \cdot \hat{k}$ del origen
- Fase: $(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t) = k(\xi \mp vt)$ constante para onda viajera;
- **Velocidad de fase:** $\frac{d\xi}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v$
 \implies plano de propagación avanza en dirección \hat{k} .



Además, las soluciones tipo ondas viajeras para \vec{E} y \vec{B} deben satisfacer (ser soluciones de) las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad \implies \quad \vec{E}_0 \cdot \hat{k} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \implies \quad \vec{B}_0 \cdot \hat{k} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \implies \quad \vec{B}_0 = \frac{k}{\omega} \hat{k} \times \vec{E}_0 \quad \left(\vec{B}_0 = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}_0 \right)$$

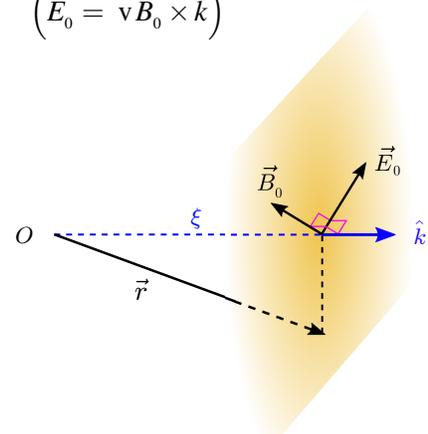
$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \implies \quad \vec{E}_0 = \frac{\omega}{k} \vec{B}_0 \times \hat{k} \quad \left(\vec{E}_0 = v \vec{B}_0 \times \hat{k} \right)$$

Conclusión:

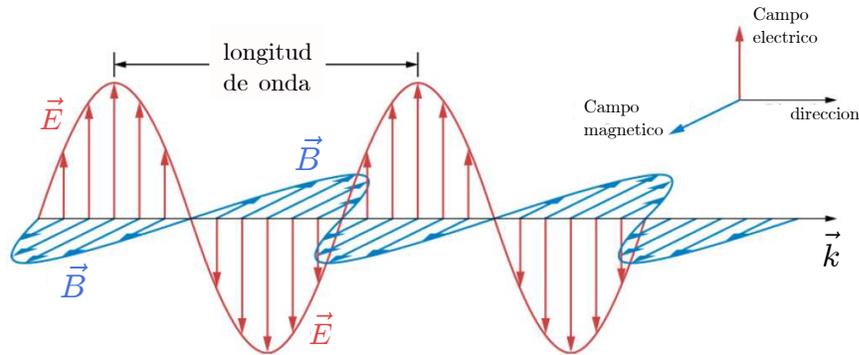
Los campos son ortogonales entre sí y a la dirección de propagación.

$$\vec{E}_0 \cdot \hat{k} = 0 \quad \vec{B}_0 \cdot \hat{k} = 0 \quad \implies \quad \vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{B}_0 = \frac{k}{\omega} \hat{k} \times \vec{E}_0 \quad \vec{E}_0 = \frac{\omega}{k} \vec{B}_0 \times \hat{k}$$



Visualización de la onda electromagnética



Medios disipativos

La existencia de efectos conductivos en el medio genera pérdidas energéticas por efectos Joule y, en consecuencia, impacta al fenómeno de propagación.

Los efectos conductivos se consideran reemplazando

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

donde $\vec{J}_c = \sigma_c \vec{E}$ y σ_c es la conductividad del medio donde se propaga la onda. Entonces, los campos \vec{E} y \vec{B} satisfacen la ecuación de onda (no clásica) siguiente:

$$\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \sigma_c \frac{\partial}{\partial t} \right\} \left\{ \begin{matrix} \vec{E}(\vec{r};t) \\ \vec{B}(\vec{r};t) \end{matrix} \right\} = 0$$

Soluciones tipo ondas planas monocromáticas son posibles, con la siguiente relación de dispersión,

$$\vec{E}(\vec{r};t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad \Longrightarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} + i\mu\sigma_c\omega \quad (i \equiv \sqrt{-1})$$

En este caso, el número de onda en una cantidad compleja, de la forma

$$k = \alpha + i\beta \quad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{v}\right) \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\mu\sigma_c v^2}{\omega}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \beta = \frac{\mu\sigma_c\omega}{2\alpha} \end{cases}$$

Casos límites:

* Corriente de desplazamiento mucho mayor que la corriente de conducción

$$\|\vec{J}_d\| \gg \|\vec{J}_c\| \quad \longrightarrow \quad \omega\varepsilon \gg \sigma_c \quad \Longrightarrow \quad k \simeq \alpha \simeq \left(\frac{\omega}{v}\right)$$

La magnitud del vector número de onda es real y se recupera el resultado obtenido en un medio sin pérdidas ($\sigma_c \simeq 0$). Un comportamiento similar se espera para medios con conductividad pero donde se propaga una onda de muy alta frecuencia angular ω .

* Corriente de desplazamiento mucho menor que la corriente de conducción

$$\|\vec{J}_d\| \ll \|\vec{J}_c\| \quad \longrightarrow \quad \omega\varepsilon \ll \sigma_c \quad \Longrightarrow \quad k \simeq \frac{1+i}{\delta} \quad \text{con} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma_c\omega}}$$

En este caso, la magnitud del vector número de onda es una cantidad compleja, el fenómeno se caracteriza por la disipación de energía en el medio de propagación y la onda se atenúa en una distancia característica δ , la longitud de penetración.

$$\vec{E}(\vec{r};t) \quad \longrightarrow \quad \vec{E}_0 e^{-\xi/\delta} e^{i(\xi/\delta - \omega t)}$$

La amplitud de la onda es atenuada por el factor $e^{-\xi/\delta}$ a medida que se aleja ξ de la fuente.

Para tener una estimación de la magnitud de la longitud de penetración, considere una onda de luz visible (frecuencia $\nu \sim 6 \times 10^{14}$ Hz) que incide en un medio muy buen conductor (Cu por ejemplo, con $\sigma_c \sim 6 \times 10^7$ [$\frac{1}{\Omega m}$]). Se obtiene $\delta \sim 2,7 \times 10^{-7}$ [cm]. Sin embargo, una onda electromagnética correspondiente a una señal de TV abierta ($\nu \sim 200$ MHz) penetraría del orden de $4,6 \times 10^{-4}$ [cm].

8.3.3. Transporte de energía

El vector de Poynting mide la cantidad de energía transportada por unidad de tiempo y de área por la onda electromagnética. La medición relevante está dada por los campos físicamente significativos,

$$\vec{S}(\vec{r};t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r};t)] \times \text{Re}[\vec{H}(\vec{r};t)]$$

Para campo armónicos en el tiempo, más que el valor instantáneo interesa la potencia media por unidad de área transportada por los campos,

$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(\vec{r};t) dt$$

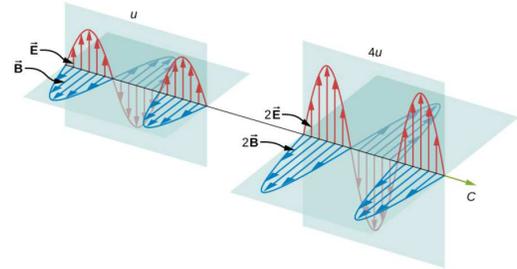
con $T = \frac{2\pi}{\omega}$ el periodo del campo. En este caso, para las ondas planas monocromáticas es directo verificar que el valor medio del vector de Poynting es independiente de la distancia \vec{r} y se calcula a partir de

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

Explícitamente, para

$$\vec{H} = \frac{k}{\mu \omega} \hat{k} \times \vec{E} \implies \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{E}_0\|^2}{\mu \omega} \text{Re}[k^*] \hat{k}$$

El resultado muestra que la potencia media por unidad de área depende de la amplitud de los campos al cuadrado: con la onda duplicando sus campos eléctricos y magnéticos, el flujo de potencia se cuadruplica.



Intensidad de la onda:

es la potencia media por unidad de área en la dirección de propagación \hat{k} ,

$$\langle \vec{S} \rangle = I \hat{k} \implies I = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{E}_0\|^2}{\mu \omega} \text{Re}[k^*] \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Caso particular: no hay disipación en el medio ($\sigma_c = 0$)

$$k = \frac{\omega}{v} \implies I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \|\vec{E}_0\|^2$$

Por otra parte, la densidad de energía electromagnética media almacenada por los campos (se sugiere demostrar),

$$\langle \omega_{EM} \rangle = \frac{1}{4} \text{Re} [\vec{E} \cdot \vec{D}^* + \vec{B} \cdot \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \epsilon \|\vec{E}_0\|^2$$

lo que permite expresar la intensidad en términos de la densidad de energía electromagnética y la velocidad a que se propaga la onda,

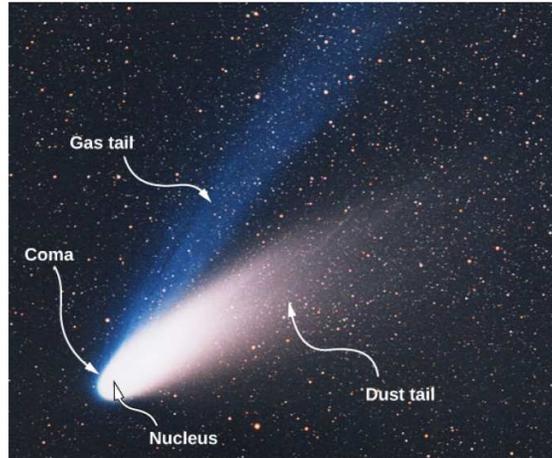
$$I = \langle \omega_{EM} \rangle v$$

Ejercicio:

Para una densidad de fotones N_γ en el vacío, con energía $\hbar \omega$ cada fotón y velocidad $v = c$, entonces $I = N_\gamma \hbar \omega c$. Permite estimar el número de fotones que incide por unidad de área sobre una superficie iluminada por el sol.

Ejemplo: Cometa en órbita solar

Cometas presentan 2 colas, de gas y polvo, que pueden extenderse cientos de millones de kilómetros desde la coma. La cola de gas (o plasma) está formada por gas ionizado, producto del viento y la radiación solar; apunta en la dirección radial. La cola de polvo está formada de pequeñas partículas sólidas, proveniente de la vaporización de los hielos del núcleo del cometa. Su dirección corresponde a la tangente a la trayectoria del cometa, Ambas colas tienen direcciones ligeramente diferentes, como se observa en la figura.



8.3.4. Polarización de onda electromagnética

Se llama **polarización** de la onda a la dirección del campo eléctrico \vec{E} . El plano definido por \vec{E} y el vector número de onda \vec{k} se conoce como el **plano de polarización**.

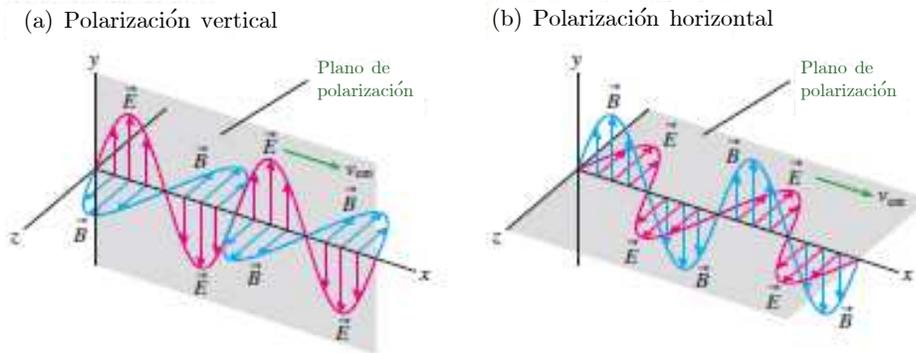
*** Polarización lineal**

La amplitud vectorial del campo eléctrico tiene una dirección \hat{e}_0 constante,

$$\vec{E}_0 = E_0 e^{i\phi_0} \hat{e}_0$$

con E_0 la magnitud del campo y ϕ_0 una fase conocida.

Por ejemplo, en figura adjunta se ven casos de ondas polarizadas linealmente, en forma vertical y horizontal.



*** Polarización arbitraria**

Corresponde a la combinación lineal de 2 soluciones linealmente independientes para el campo eléctrico,

$$\vec{E} = (\vec{E}_0 + \vec{E}_1) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \longrightarrow \quad (E_0 e^{i\phi_0} \hat{e}_0 + E_1 e^{i\phi_1} \hat{e}_1) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \begin{cases} \hat{e}_0 \cdot \hat{e}_1 = 0 \\ \hat{e}_0 \cdot \hat{k} = 0 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{k} = 0 \end{cases}$$

Existen diferentes formas de polarización de la onda electromagnética, dependiendo de los valores relativos de E_0, E_1 y ϕ_0, ϕ_1 .

- **Polarización lineal**

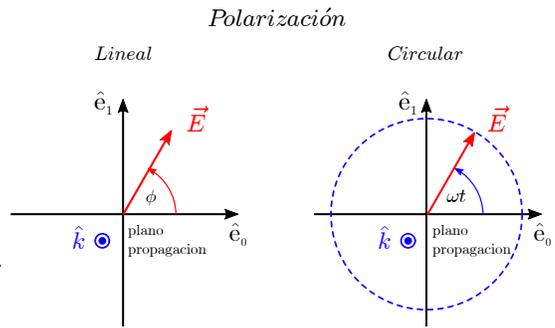
Se recupera cuando $\phi_0 = \phi_1 = \phi$.

- **Polarización circular**

Ocurre para

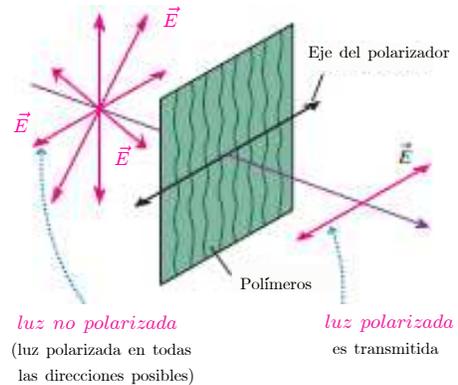
$$E_0 = E_1 = E \quad \text{y} \quad \phi_1 = \phi_0 \pm \frac{\pi}{2}$$

y la amplitud de la onda rota con velocidad angular ω en el plano de propagación, $\phi = \pm \omega t$. La polarización circular produce campos que rotan en el sentido de los punteros del reloj (helicidad negativa) o en sentido contrario (helicidad positiva).



Polarizador

Medio material (un polímero generalmente) que permite el paso del campo eléctrico sólo en la dirección de su eje de polarización. Como se observa en la figura, el polarizador produce una onda linealmente polarizada, independiente del tipo de polarización inicial.



8.3.5. Reflexión y refracción

Es de gran interés práctico conocer el comportamiento de una onda plana monocromática al incidir en la superficie de separación de 2 medios no disipativos. El medio (*i*) donde incide la onda está caracterizado por ϵ_i y μ_i mientras que el medio (*t*) donde se transmite o refracta la onda se caracteriza por ϵ_t y μ_t .

Ondas:

* incidente: $\rightarrow \vec{E}_i; \vec{k}_i$ en medio (ϵ_i, μ_i)

* reflejada: $\rightarrow \vec{E}_r; \vec{k}_r$ en medio (ϵ_i, μ_i)

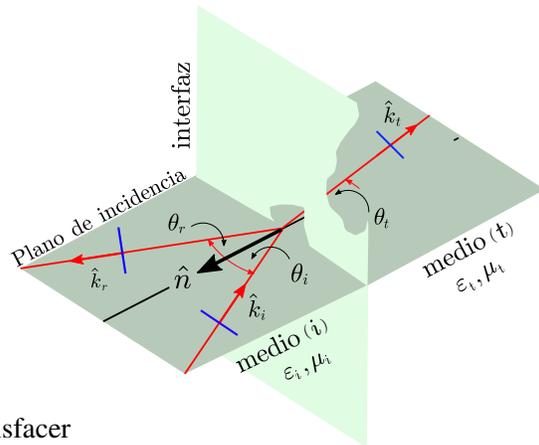
* refractada: $\rightarrow \vec{E}_t; \vec{k}_t$ en medio (ϵ_t, μ_t)

Conocido $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ está determinado.

La onda **refractada** se denomina también onda **transmitida**.

En **superficie de separación** (sin fuentes) hay que satisfacer las **condiciones de borde** correspondientes.

Para todo tiempo *t* y cualquier punto en la superficie de separación se requiere:



- componentes normales $\implies D_{in} = D_{in} \quad B_{in} = B_{in}$
- componentes tangenciales $\implies E_{it} = E_{it} \quad H_{it} = H_{it}$
- todos los campos tienen **igual fase** en la superficie de separación

$$\left[(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t) = (\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t) \right]_{\text{Sup. sep.}}$$

Consecuencias

* $\omega_i = \omega_r = \omega_t \equiv \omega$ (frecuencia de la onda no cambia al reflejarse o refractarse).

* $\left[\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r} \right]_{\text{Sup. sep.}} \implies$ **Ley de Snell** $\begin{cases} \theta_r = \theta_i \\ \frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_t} = \frac{k_r}{k_i} \longrightarrow \frac{n_t}{n_i} \end{cases}$ (medios no disipativos)

Los ángulos están referidos a la normal de la superficie de separación y n_ℓ corresponde al índice de refracción de cada medio (n_i del medio donde la onda incide y n_t del medio donde la onda se transmite).

Caso especial: medio (t) es un buen conductor.

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_t} \simeq \frac{1}{\delta n_i} = \frac{n_t}{n_i} \sqrt{\frac{\omega \sigma_c}{2 \epsilon_i}} \implies \theta_t \longrightarrow 0 \quad (\omega \text{ y/o } \sigma_c \text{ altos})$$

es decir, el vector \vec{k}_t de la onda transmitida tiene una dirección prácticamente perpendicular a la superficie de separación, independiente del ángulo de incidencia θ_i .

Coefficientes de reflexión y transmisión

Físicamente, el tema de interés cuando una onda electromagnética incide sobre la interfaz entre dos medios es la cantidad de energía que se refleja y aquella que se transmite (o refracta) con respecto a la energía incidente. Para cuantificarlo, la conservación de energía electromagnética que ocurre en la superficie de separación nos indica que, para campos armónicos en el tiempo, el valor medio del vector de Poynting satisface

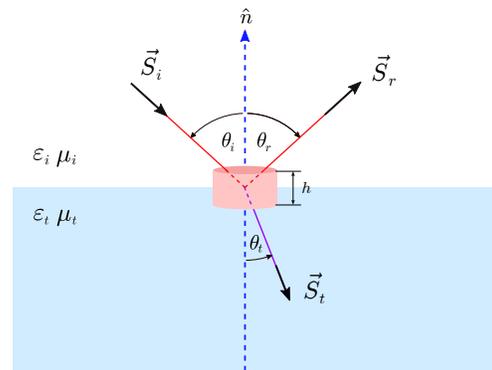
$$\nabla \cdot \langle \vec{S} \rangle = 0 \implies \int_V \nabla \cdot \langle \vec{S} \rangle dV = \oint_{\vec{A}(V)} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{A} = 0$$

es decir, el flujo neto de la energía media que entra y sale por la superficie \vec{A} que encierra un volumen arbitrario V es nulo, cuando no hay variación de la densidad de energía electromagnética ni pérdidas Joule en el volumen considerado.

Eligiendo V como un cilindro recto de altura $h \sim 0$, ubicado en la superficie de separación entre los medios (como se indica en la figura),

$$\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{n} + \langle \vec{S}_r \rangle \cdot \hat{n} - \langle \vec{S}_t \rangle \cdot \hat{n} = 0$$

donde los vectores de Poynting promedio corresponden a las ondas incidente, reflejada y refractada y \hat{n} es la normal a la superficie de separación. La contribución del flujo de energía a través del manto del cilindro es nulo cuando su altura $h \rightarrow 0$.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Introduciendo: Coeficiente de reflexión:} \quad \rightarrow \quad R = -\frac{\langle \vec{S}_r \cdot \hat{n} \rangle}{\langle \vec{S}_i \cdot \hat{n} \rangle} \\ \text{Coeficiente de transmisión:} \quad \rightarrow \quad T = \frac{\langle \vec{S}_t \cdot \hat{n} \rangle}{\langle \vec{S}_i \cdot \hat{n} \rangle} \end{array} \right\} \Rightarrow R + T = 1$$

se establece la distribución de la energía inicial en la reflexión (R) y transmisión (T) de la onda. En términos de la intensidad I de la onda ($\langle \vec{S} \rangle = I \hat{k}$), los coeficientes R y T toman la forma

$$R = \frac{I_r}{I_i} \quad T = \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right) \frac{I_r}{I_i}$$

En términos de las amplitudes de los campos eléctricos,

$$\left. \begin{array}{l} I_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} \|E_{oi}\|^2 \\ I_r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} \|E_{or}\|^2 \\ I_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_t}{\mu_t}} \|E_{ot}\|^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{\|E_{or}\|^2}{\|E_{oi}\|^2} \quad (\text{siempre}) \\ T = \left(\frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_t} \right) \frac{\|E_{ot}\|^2}{\|E_{oi}\|^2} \quad (\text{suponiendo } \mu_i = \mu_t) \end{array} \right.$$

y θ_t se relaciona con θ_i a través de relación de Snell.

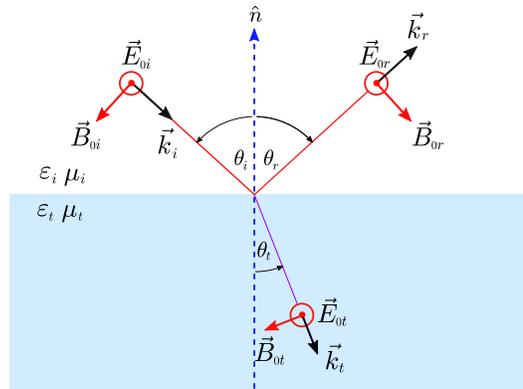
Relaciones de Fresnel

Determinan la relación entre las magnitudes de los campos reflejados y refractados en función de la magnitud del campo incidente. En general, una onda plana, monocromática, que incide sobre el plano de separación entre 2 medios, puede tener una polarización arbitraria. Pero esta polarización es expresable como la superposición lineal de una onda linealmente polarizadas con el campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia y otra con el campo eléctrico contenido en dicho plano. Así, basta estudiar estos dos casos extremos para entender, si es necesario, situaciones más complejas.

* Onda con polarización s: el vector polarización \vec{E}_i es perpendicular a plano de incidencia ($\vec{k}_i; \hat{n}$).

La situación significa que $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$. Aplicando las condiciones de borde, demostrar ($\mu_i = \mu_t = \mu_0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_{or}}{E_{oi}} = \frac{2 \operatorname{sen} \theta_i \cos \theta_t}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)} \\ \frac{E_{ot}}{E_{oi}} = -\frac{\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)} \end{array} \right.$$



Los coeficientes de reflexión y transmisión son:

$$R_s = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_t)} \quad T_s = \frac{\operatorname{sen}(2\theta_i) \operatorname{sen}(2\theta_t)}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_t)}$$

y se ha incluido el subíndice s para identificar la polarización normal de la onda respecto al plano de incidencia.

Situaciones especiales:

- Incidencia extrema:

$$\text{incidencia normal: } \left\{ \begin{array}{l} R_s = \frac{(n_t - n_i)^2}{(n_t + n_i)^2} \\ T_s = \frac{4n_i n_t}{(n_t + n_i)^2} \end{array} \right. \quad (\theta_i = 0) \qquad \text{incidencia rasante: } \left\{ \begin{array}{l} R_s = 1 \\ T_s = 0 \end{array} \right. \quad (\theta_i = \frac{\pi}{2})$$

- **Ángulo crítico:** para $n_i > n_t$, el rango angular para el ángulo de incidencia está acotado hasta un ángulo crítico θ_c , $0 \leq \theta_i \leq \theta_c$, para permitir la existencia de un ángulo de refracción en el rango $0 \leq \theta_t \leq \frac{\pi}{2}$. Debido a Snell, para $\theta_i > \theta_c$ no existe un θ_t real, la transmisión no se produce y R_s presenta una discontinuidad en θ_c . El ángulo crítico θ_c queda determinado por $\theta_i = \frac{\pi}{2}$,

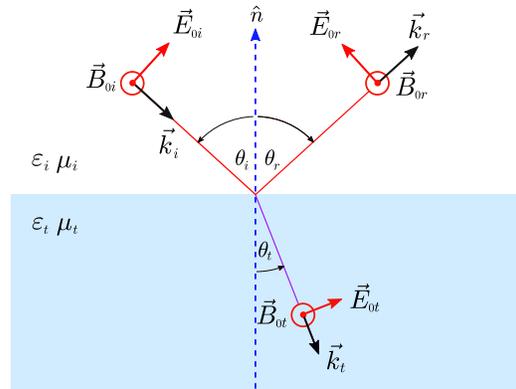
$$\text{sen } \theta_t = \frac{n_i}{n_t} \text{ sen } \theta_i \quad \implies \quad \text{sen } \theta_c = \frac{n_t}{n_i} \quad (n_i > n_t)$$

Claramente, $\theta_c < \frac{\pi}{2}$ y existe siempre.

* Onda con polarización p: el vector polarización \vec{E}_i es paralelo a plano de incidencia $(\vec{k}_i; \hat{n})$.

La situación significa que $\vec{B} \cdot \hat{n} = 0$. Aplicando las condiciones de borde, demostrar ($\mu_i = \mu_t = \mu_0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2 \text{ sen } \theta_i \cos \theta_t}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \\ \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = -\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \end{array} \right.$$



Los coeficientes de reflexión y transmisión son:

$$R_p = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \qquad T_p = \frac{\text{sen}(2\theta_i) \text{sen}(2\theta_t)}{\text{sen}^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)}$$

y se ha incluido el subíndice p para identificar la polarización paralela de la onda respecto al plano de incidencia.

Situaciones especiales:

- Incidencia extrema:

$$\text{incidencia normal: } \left\{ \begin{array}{l} R_p = \frac{(n_t - n_i)^2}{(n_t + n_i)^2} \\ T_p = \frac{4n_i n_t}{(n_t + n_i)^2} \end{array} \right. \quad (\theta_i = 0) \qquad \text{incidencia rasante: } \left\{ \begin{array}{l} R_p = 1 \\ T_p = 0 \end{array} \right. \quad (\theta_i = \frac{\pi}{2})$$

- **Ángulo de Brewster:** el coeficiente de reflexión puede anularse para un ángulo incidente $\theta_i = \theta_B$ cuando $\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}$. Como θ_t depende de θ_B a través de Snell, se tiene

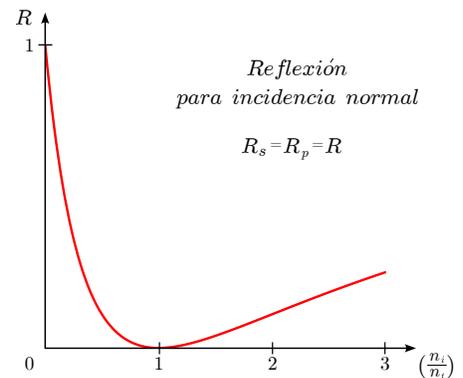
$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_B\right) = \frac{n_i}{n_t} \text{sen}\theta_B \quad \implies \quad \tan\theta_B = \frac{n_t}{n_i}$$

expresión que permite determinar θ_B . Para $n_i < n_t$, el ángulo de Brewster toma un valor en el rango $\frac{\pi}{4} < \theta_B < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \theta_B < \frac{\pi}{4}$ para $n_i > n_t$. Por definición del ángulo de Brewster, $R_p(\theta_B) = 0$ y la onda de polarización p sólo puede refractarse (o transmitirse) para ese ángulo de incidencia.

- **Reflexión total interna:** al igual que para R_s , el mismo ángulo crítico existe para R_p cuando $n_i > n_t$, con lo cual se tiene $R_s = R_p = 1$ para $\theta_i > \theta_c$. Ninguna de las componentes de polarización de la onda incidente se transmite y la reflexión de la onda hacia el medio en que incide es total.

Un comentario final: cuando tanto θ_B y θ_c están presentes en R_p , siempre se cumple que $\theta_B < \theta_c$.

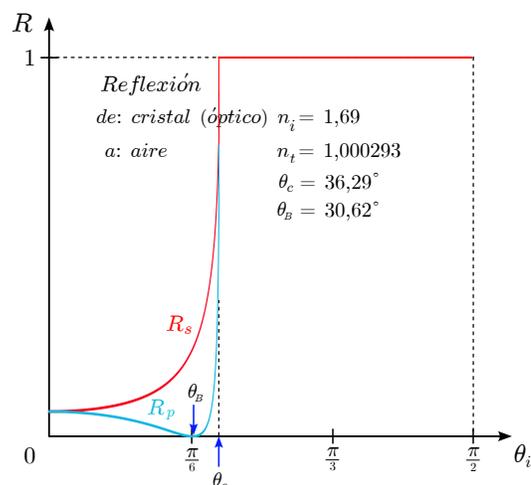
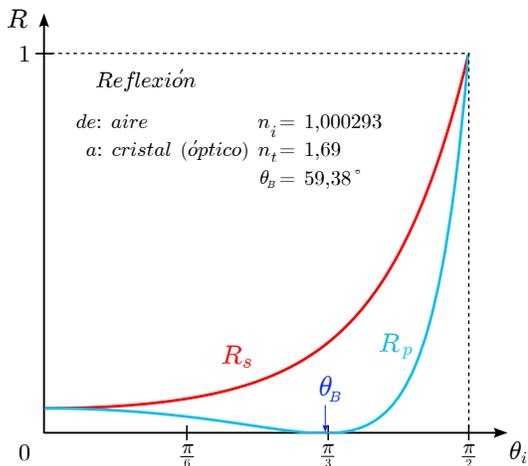
Se observa que para incidencia normal y rasante, los coeficientes de reflexión y transmisión son iguales para ambos tipos posibles de polarización (s y p). En la figura se grafica $R = R_s = R_p$ para incidencia normal y en función de (n_i/n_t) . Para $n_i = n_t$ se tiene $R = 0$, situación esperable al no existir cambio de medio y, por lo tanto, no hay reflexión. Para $n_i < n_t$ (por ejemplo, onda incide desde el aire sobre agua), R decrece desde la situación de reflexión máxima ($R = 1$) a no reflexión. Lo contrario ocurre para $n_i > n_t$, situación cuando la reflexión lentamente aumenta.



Para incidencia rasante ($\theta_i = \frac{\pi}{2}$) se tiene $R_s = R_p = 1$, independientemente de las características de los medios que forman la superficie.

La situación de alta reflectancia es típica para incidencias cercanas a la rasante. Una manifestación del fenómeno se tiene, por ejemplo, al viajar por una carretera y observar, a la distancia, lo que parece ser agua. La realidad es luz rasante reflejada en la superficie de la carretera, la que actúa como si fuera un espejo.

La situación general de reflexión y transmisión del flujo de energía a través de la superficie de separación queda definida el comportamiento del coeficiente de reflexión para las ondas con polarización s y p . El coeficiente de transmisión mide el complemento de la energía energía reflejada con respecto a la incidente ($T = 1 - R$) en sistemas conservativos.



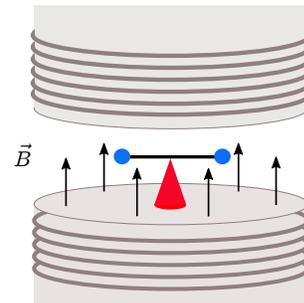
Para ilustrar el comportamiento de R_s y R_p en función del ángulo de incidencia se considera una onda incidente monocromática, polarizada con componentes tanto perpendiculares como paralelas al plano de incidencia. Hay dos casos a considerar, según el valor de n_i con respecto a n_t . En el primer caso, se considera que la onda incide desde el aire ($n_i = 1,000293$) sobre un cristal óptico ($n_t = 1,69$). El coeficiente R_s es una función continua de θ_i , mayor que cero y alcanzando su valor extremo cuando la incidencia es rasante (ver figura adjunta, lado izquierdo). El coeficiente R_p es también una función continua de θ_i pero que siempre se anula en el ángulo de Brewster ($\theta_B = 59,38^\circ$). Físicamente, la onda incidente en θ_B se refleja con su polarización s normal al plano de incidencia.

El segundo caso es cuando la onda incide desde el cristal óptico ($n_i = 1,69$) hacia la región con aire ($n_t = 1,000293$). Ambas componentes de la polarización presentan una discontinuidad para el mismo ángulo crítico ($\theta_c = 36,29^\circ$) y $R_s = R_p = 1$ para $\theta_i > \theta_c$. En este caso, la polarización p presenta un ángulo de Brewster $\theta_B = 30,62^\circ$ menor que θ_c .

Una observación final es que siempre $R_s \geq R_p$, es decir, con respecto a la energía incidente en el modo s y el modo p siempre es igual o mayor la energía reflejada en la componente perpendicular al plano de incidencia que en la componente contenida en él.

8.4. Problemas

O-1 (Examen-2016P) Una barra aislante, de masa despreciable y largo $2a$, tiene su punto medio fijo a una rótula universal sin roce. En sus extremos hay sendas esferitas conductoras, de masa m y carga Q cada una de ellas. El sistema se encuentra en el entrehierro de un electroimán, como se indica en figura. En $t = 0$ se inicia el paso de una corriente de modo que el campo magnético uniforme en el entrehierro crece linealmente con el tiempo, $\vec{B}(t) = B_0 \frac{t}{\tau} \hat{k}$, con B_0 y τ conocidos.



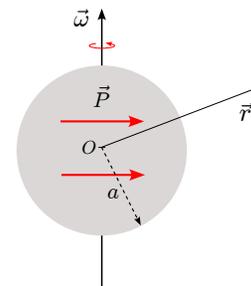
- Calcule la fuerza neta y el torque sobre la barra.
- Si existe movimiento de la barra, ¿cómo variaría en el tiempo la variable angular que describe el movimiento?
- Calcule el vector de Poynting en el volumen del entrehierro. Explique su significado.
- Comente si hizo aproximaciones en los cálculos previos. Sea explícito.

O-2 (Examen-2023P) Considere una esfera dieléctrica de radio a , que tiene una polarización \vec{P} uniforme y que rota alrededor de uno de sus ejes principales perpendicular a la dirección de polarización, con velocidad angular $\vec{\omega}$ constante.

Determine si este sistema irradia energía electromagnética.

No es necesario que haga cálculos complicados. Sólo dé argumentos, respaldados por cálculos simples si lo estima necesario, para justificar su respuesta.

Respuesta (pág. 217)



O-3 (Examen-2017P) Considere un condensador de placas planas y paralelas, con un medio dieléctrico lineal y homogéneo entre ellas. El condensador se carga mediante una corriente $I(t)$. Despreciando efectos de borde, calcular la densidad instantánea de corriente de desplazamiento y la corriente de desplazamiento en el dieléctrico. Ud. aporte cualquier dato que estime relevante.

O-4 a) Demuestre que en una región V del espacio libre de cargas, el campo eléctrico inducido por un campo magnético variable en el tiempo se puede calcular a partir de

$$E(\vec{r}; t) \sim \int_V \frac{\dot{\vec{B}}(\vec{r}'; t) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$

donde $\dot{\vec{B}}(\vec{r}'; t) = \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}'; t)}{\partial t}$. Determine la constante de proporcionalidad.

b) Considere el caso en que \vec{B} tiene simetría cilíndrica, es decir, no depende del ángulo azimutal ϕ alrededor del eje z . En este caso, encuentre una expresión para el campo eléctrico, expresada en función de la derivada temporal del flujo magnético $\Phi_m (= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S})$ a través de una superficie S correspondiente a un círculo de radio r .

c) Sea $\vec{B}(\vec{r}; t) = B(\vec{r}; t) \hat{z}$ el campo en el plano $z = 0$. Considere una partícula de carga q y masa m describiendo en ese plano una órbita circular de radio a bajo la influencia de ese campo. Determine el valor de $\dot{\Phi}_m(t)$ para que el radio de la órbita permanezca estacionario. ¿Qué momentum adquiere la partícula?

O-5 Suponga que existe una carga magnética q_m que produce un campo magnético radial, análogo al campo eléctrico que produce una carga eléctrica q_e ,

$$q_e \longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}; \quad q_m \longrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{q_m}{4\pi\mu_0 r^2} \hat{r}.$$

Calcule la componente z del momentum angular en el campo producido por una carga eléctrica y una carga magnética separadas una distancia d . Conociendo que las partículas elementales llevan asociado un momentum angular intrínseco (spin) que es un múltiplo de $\frac{\hbar}{2}$ y que $|q_e| = e$, ¿cuál sería la magnitud de la carga magnética si existiera?

O-6 La Tierra recibe, a mediodía y dependiendo de la latitud, alrededor de $1300 [W/m^2]$ de energía radiante proveniente del sol. Suponiendo que esta energía es transportada por ondas planas monocromáticas, que tienen incidencia normal sobre la Tierra, estime la magnitud del campo eléctrico y el campo magnético de la luz solar.

O-7 Una onda electromagnética tiene una frecuencia de 100 MHz y se propaga en el vacío. El campo magnético viene dado por $\vec{B}(z, t) = B_0 \cos(kz - \omega t) \hat{i}$ con $B_0 = 10^{-8}$ T.

a) Encuentre la frecuencia angular, la longitud de onda y la dirección de propagación de la onda.

b) Encuentre el campo eléctrico $\vec{E}(z, t)$

c) Encuentre el vector de Poynting y la intensidad de la onda.

O-8 (C3.6-2022P) Un receptor de radio recibe ondas electromagnéticas para las cuales la amplitud del campo eléctrico es de 10^{-1} [V/m]. Suponiendo que las ondas son planas, calcular:

a) la amplitud del campo magnético;

b) el valor medio del flujo de energía por unidad de área y tiempo;

c) la densidad media de energía por unidad de volumen;

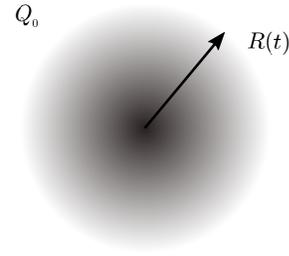
d) suponiendo que el transmisor irradia energía isotrópicamente y el receptor está ubicado a 1 [Km] de distancia, calcular la potencia de la emisora.

O-9 Una distribución uniforme de cargas, con simetría esférica, oscila radialmente. El radio que limita la distribución varía armónicamente en el tiempo, $R(t) = R_0 + a \cos(\omega t)$, con $R_0 > a$. La carga total de la distribución es Q_0 .

a) Calcule la densidad de corriente de conducción en la distribución oscilante de carga. Puede suponer que $\vec{J} = J(r) \hat{r}$ y que esta densidad es finita en el centro de la distribución.

b) Calcule el campo eléctrico en todo el espacio y la corriente de desplazamiento.

c) ¿Genera campo magnético la distribución de cargas oscilante? De ser afirmativa su respuesta, determínelo. En todo caso, justifique su respuesta.



O-10 Considere un alambre cilíndrico recto de conductividad σ_c y de sección transversal A . Conduce una corriente I uniformemente distribuida.

a) Determine la dirección y la magnitud del vector de Poynting en la superficie del alambre.

b) Integre la componente normal del vector de Poynting sobre la superficie del alambre para un segmento de longitud L y compare con el resultado esperado de acuerdo al Efecto Joule. ¿Se corresponden?

O-11 La intensidad con la cual la luz del sol incide sobre la tierra es aproximadamente $1300 [W/m^2]$. Si la luz incide sobre una superficie que absorbe perfectamente, ¿cuánta presión le ejerce? ¿Y si incide sobre un reflector perfecto? ¿Cómo se compara esto con la presión atmosférica?

Respuesta (pág. 217)

O-12 Se ha propuesto que una nave espacial podría ser impulsada, en el sistema solar, por presión de radiación electromagnética, usando una gran vela hecha de una hoja metálica muy delgada (por ejemplo, papel de aluminio).

¿Tamaño de la vela para que la fuerza de radiación iguale a la magnitud de la atracción gravitacional solar? Suponga que la masa de la nave es 1600 Kg , que la vela es perfectamente reflejante y además está orientada ortogonal a los rayos desde el Sol.

¿Depende su respuesta de la ubicación de la nave espacial en el sistema solar?

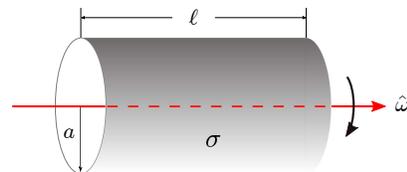
Observación: Aporte los datos que necesite para sus estimaciones numéricas.

O-13 (Examen-2018P) Una cáscara delgada cilíndrica, de largo ℓ y radio a ($\ell \gg a$), tiene una densidad de carga eléctrica σ uniformemente distribuida en su superficie. La cáscara rota alrededor de su eje con una velocidad angular $\vec{\omega}$ que aumenta lentamente en el tiempo, $\vec{\omega} = kt \hat{\omega}$, donde k es una constante conocida, $t \geq 0$ y $\hat{\omega}$ es el vector unitario que indica la dirección del eje. Depreciando los efectos de borde, determine:

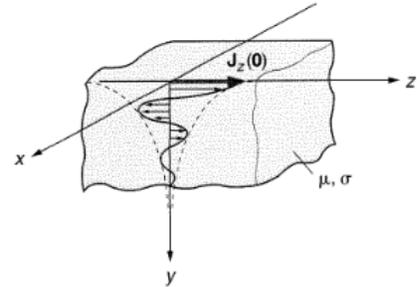
a) El campo magnético en el interior del cilindro.

b) El campo eléctrico en el interior del cilindro.

c) El vector de Poynting (en magnitud y dirección) y el flujo de energía electromagnética por unidad de tiempo a través de las paredes del cilindro. Compare con la energía eléctrica y magnética contenida en el volumen del cilindro, por unidad de tiempo.

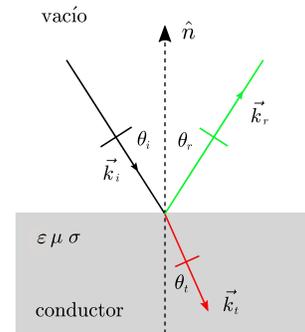


O-14 Considere un caso idealizado de una corriente sinusoidal en un semi-espacio conductor homogéneo. Sea la frecuencia angular de la corriente ω y el medio tiene conductividad σ y permeabilidad magnética μ . Finalmente, asuma que la densidad de corriente es paralela al borde de la superficie, y que tiene una sola componente, por ejemplo $\vec{J} = J_z \hat{z}$, que depende de la coordenada y (distancia desde la interfaz).



Usando las ecuaciones de Maxwell y un ansatz para los campos de la forma $\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0(\vec{x})e^{i\omega t}$ y $\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$, obtener una expresión para $J_z(y)$ y estimar la profundidad máxima donde habrá corriente.

O-15 (Examen-2016P) Considere una lámina delgada conductora, no magnética, sobre la cual incide una onda electromagnética plana, monocromática y frecuencia angular ω . Considerando que la conductividad del medio conductor es σ (ó g) y que la corriente de conducción es mucho mayor que la corriente de desplazamiento,



a) Para un ángulo de incidencia θ_i dado, determine el ángulo θ_t de refracción de la onda transmitida. En particular, cuál es su valor límite cuando la conductividad de la lámina es grande ($\sigma \rightarrow \infty$) y la frecuencia de la onda incidente es baja. Interprete su resultado.

b) En las condiciones previas, demuestre que el campo en el interior de un conductor ideal es puramente magnético. ¿Qué fracción de la energía incidente, por unidad de área y tiempo, es reflejada en la superficie conductora?

O-16 (Examen-2023P) Luz solar, con un campo magnético

$$\vec{B}(\vec{r}; t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - k_x x + k_y y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \vec{B}_0 = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} & B_y = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T} \\ k_x = \frac{8\pi}{a} & k_y = \frac{6\pi}{a} & a = 2.500 \text{ nm} \end{cases}$$

incide sobre un glaciar cuya superficie (supuesta plana) de 100.000 Km^2 coincide con el plano $\{x, z\}$. Determinar,

- la componente B_x del campo magnético, la dirección de propagación de la luz incidente, su longitud de onda y su frecuencia;
- el campo eléctrico incidente de la luz;
- el vector de Poynting promedio de la luz incidente;
- el campo eléctrico reflejado;
- el campo eléctrico total.
- Debido al calentamiento global, el glaciar se ha derretido dejando al descubierto la superficie rocosa que absorbe casi totalmente la radiación solar. ¿Cuál es la cantidad de energía por segundo que, adicionalmente, la tierra está absorbiendo debido al derretimiento del glaciar? Compárela con el consumo eléctrico promedio de $3 \cdot 10^{12} \text{ W}$ en el mundo.

Respuesta (pág. 217)

O-17 (Examen-2017P) Se trata de entender la propagación de ondas electromagnéticas en la ionósfera, capa de la atmósfera terrestre que se extiende entre los 80 y los 500 Km de altitud aproximadamente, y que físicamente corresponde a un plasma. En particular, consideremos que este plasma es un medio conductor formado por iones de masa m , carga e , con una densidad N_i de iones por unidad de volumen y libres de moverse bajo la acción de campos eléctricos. En este plasma, la ecuación de propagación del campo eléctrico es

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma_p \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

donde σ_p se identifica como la conductividad del plasma y c es la velocidad de la luz.

a) Suponga que la ecuación de onda tiene soluciones del tipo onda plana monocromática de frecuencia angular ω ,

$$\vec{E} = E_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{v})} \hat{x}.$$

a.i) Interprete la magnitud v en la fase de la onda.

a.ii) Obtenga una expresión para el índice de refracción del plasma que contenga σ_p .

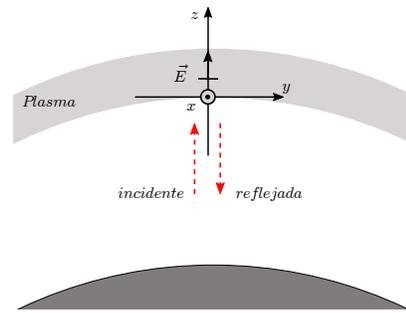
b) Cálculo de la conductividad del plasma σ_p . Para ello se sugiere,

b.i) Escriba la ecuación de movimiento de los iones. De las fuerzas que actúan, desprecie las interacciones entre iones y las fuerzas magnéticas. También suponga que no hay disipación de energía. Resuelva la ecuación de movimiento para la velocidad de los iones.

b.ii) Escriba la densidad de corriente de conducción iónica usando el resultado obtenido previamente.

b.iii) Deduzca del punto anterior una expresión para la conductividad del plasma σ_p . Expresar su resultado en función de la frecuencia del plasma $\omega_p^2 = N_i e^2 / \epsilon_0 m$. Comente el resultado obtenido.

c) Calcule el índice de refracción con el σ_p calculado en (b). Discuta el resultado obtenido. Dependiendo del valor de la frecuencia ω , ¿es siempre posible propagar la onda electromagnética en la ionósfera? Explique.



O-18 (Examen-2018P) Cuatro fuentes idénticas, coherentes, de ondas electromagnéticas monocromáticas A , B , C y D (ver figura), emiten ondas de la misma longitud de onda λ e igual intensidad I . La distancia entre las fuentes es $\frac{\lambda}{2}$.

Dos receptores R_1 y R_2 están a una gran distancia r (pero iguales) de la fuente B .

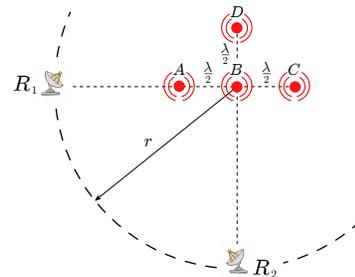
a) ¿Cuál receptor capta la señal más intensa (fuerte)?

b) ¿Cuál receptor, si corresponde, capta la señal más fuerte si la fuente B se apaga?

c) Idem caso (b) si la fuente D se apaga.

d) ¿Cuál receptor puede indicar qué fuente, B o D , ha sido apagada?

Observación: La señal captada por un receptor corresponde a la intensidad de la onda resultante recibida.



O-19 Considere una onda plana propagándose en el vacío. La razón entre la magnitud del campo eléctrico y la intensidad del campo magnético ($\|\vec{E}\| / \|\vec{H}\|$) recibe el nombre de impedancia del espacio libre; demuestre que toma un valor de $377 [\Omega]$.

¿Hay una explicación realmente física para definir esta cantidad en el vacío?

O-20 En la mayoría de los casos las componentes de \vec{E} y \vec{B} de las ondas electromagnéticas son perpendiculares entre sí y la dirección de propagación. Considere los siguientes casos A y B en el vacío, donde \vec{E} y \vec{B} son paralelos:

$$\begin{aligned}\vec{E}_A(\vec{r};t) &= E_0 \sin(\omega t) [\sin(kz)\hat{x} + \cos(kz)\hat{y}] \\ \vec{B}_A(\vec{r};t) &= E_0 \cos(\omega t) [\sin(kz)\hat{x} + \cos(kz)\hat{y}] \\ \vec{E}_B(\vec{r};t) &= E_0 \cos(kz) [\cos(\omega t)\hat{x} - \sin(\omega t)\hat{y}] \\ \vec{B}_B(\vec{r};t) &= -E_0 \sin(kz) [\cos(\omega t)\hat{x} - \sin(\omega t)\hat{y}]\end{aligned}$$

- Verifique que los campos satisfacen la ecuación de onda de un campo electromagnético.
- Calcule el vector de Poynting y la densidad de energía.
- Describa estas ondas con palabras y esquemas. Refiérase a la polarización, y comente sobre por qué no cumplen la propiedad “típica” de ortogonalidad entre \vec{E} y \vec{B} . ¿Siguen siendo perpendiculares a la dirección de propagación?

O-21 Una corriente dependiente del tiempo, $I(t) = I_0 t / \tau$, circula por un solenoide cilíndrico infinitamente largo de radio a y n vueltas por unidad de largo.

- Determinar los campos eléctrico y magnético, \vec{E} y \vec{B} , dentro del solenoide.
- Verificar la ley de conservación de la energía electromagnética (teorema de Poynting), para una superficie interna, cerrada y cilíndrica, coaxial al solenoide.
- Verificar ahora el teorema de Poynting para una superficie externa, cilíndrica y coaxial al solenoide (recordar que en zona externa al solenoide infinito, $\vec{B} = 0$).

O-22 Ondas gravitacionales

Se han detectado ondas gravitacionales emitidas por colisiones entre agujeros negros. Para analizar dicho fenómeno es necesario recurrir a la relatividad general; sin embargo, se puede intentar utilizar gravitación newtoniana para intentar entender las ondas gravitacionales.

- La fuerza gravitacional que ejerce una partícula con masa m' en posición \vec{r}' , sobre otra con masa m en posición \vec{r} , está dada por

$$\vec{F}_m = -Gmm' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}.$$

y donde G es la constante de gravitación universal. Análogo al camino seguido en electrostática,

- defina el campo gravitacional \vec{E}_g debido a una partícula de masa m ;

- usando el principio de superposición, encuentre el campo gravitacional producido por una densidad de masa $\rho(\vec{r}')$ en un punto \vec{r} ;

- encuentre el rotor y la divergencia de \vec{E}_g producido por una densidad de masa ρ . Estas serían el equivalente, para la gravitación (versión estática), a dos de las leyes de Maxwell.

b) Hay un campo análogo al campo magnético, un campo gravitomagnético \vec{B}_g , que se produce por el movimiento de la masa (“corriente de masa”). Se tiene que para una masa m con velocidad \vec{v} , la fuerza debida al campo gravitomagnético es $F_m = m\vec{v} \times \vec{B}_g$.

- Se define una corriente de masa como $I = \frac{dm}{dt}$. Además, se define la densidad volumétrica de corriente \vec{J} a través de $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$. Entonces, el campo \vec{B}_g producido por una densidad \vec{J} es

$$\vec{B}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_g}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV',$$

con μ_g una constante a determinar. Calcular el rotor y la divergencia de \vec{B}_g : dos nuevas leyes de Maxwell!

- Expresar la conservación de la masa a través de ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

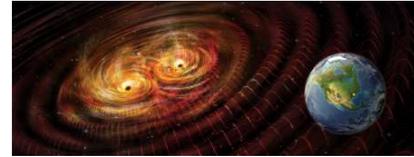
c) Si el campo gravitomagnético \vec{B}_g cambia en el tiempo, se tiene $\nabla \times \vec{E}_g = -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}$. Complete sus ecuaciones de Maxwell, justificando cualquier cambio que haga.

d) Derive algunas conclusiones

- Encuentre la ecuación que describe ondas gravitacionales.
- Si las ondas gravitacionales viajan a la velocidad de la luz c , determine la constante μ_g .
- ¿Cuál es el vector de Poynting asociado a ondas gravitacionales? ¿Y la intensidad de las ondas?
- Describa en palabras por qué dos agujeros negros que colisionan emiten ondas gravitacionales.
- La fórmula de Larmor indica la potencia irradiada por una carga q con aceleración a :

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

¿Cuál es la ecuación análoga en gravitación? Considere agujeros negros de 36 y 29 masas solares, orbitando uno en torno al otro. Cuando están a una distancia de 2×10^5 [m], ¿aproximadamente, qué potencia irradia el sistema? Se observó este sistema en la vida real y su máxima emisión fue 3×10^{49} [W]. Comente.



O-23 Considere una superposición de ondas viajando en la dirección del eje z ,

$$\vec{E}(\vec{r}; t) = \text{Re} \left[E_1 e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} + E_2 e^{i(kz - \omega t)} \hat{y} \right] \quad \vec{B}(\vec{r}; t) = \text{Re} \left[\frac{E_1}{c} e^{i(kz - \omega t)} \hat{y} - \frac{E_2}{c} e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} \right]$$

donde E_1 y E_2 pueden ser complejos, $E_1 = C_1 e^{i\phi_1}$, $E_2 = C_2 e^{i\phi_2}$, C_1 y C_2 reales.

a) Calcule el flujo promedio de energía por unidad de área y tiempo, $\langle \vec{S} \rangle$.

b) Suponga que $E_1 = C$ y $E_2 = iC$, es decir, $C_1 = C_2 = C$ y $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi$. Determine la dirección de \vec{E} en función de t , en un punto de plano (x, y) . Describa el resultado mediante palabras y dibujos.

c) Para el mismo campo en la parte (b), determine la dirección de \vec{E} en función de z , para el instante en $t = 0$. Describe el resultado en palabras y dibujos.

O-24 (C3.1-2022P) Un haz de luz incide normalmente desde el aire ($n_1 = 1$) en un bloque de vidrio dieléctrico transparente con un índice de refracción n_2 y grosor t . La luz atraviesa el bloque y entra a un tercer medio con índice de refracción n_3 que se extiende hasta el infinito. Calcular el coeficiente de reflexión R como función de t para un rayo de luz monocromático con longitud de onda λ_0 . Graficar R en función de t para $n_3 = 1, 5$ y $n_2 = 1, 0; 1, 2; 1, 6$.

O-25 Un haz de luz monocromática (frecuencia angular ω) en el vacío incide normalmente sobre una película dieléctrica de constante ϵ_r e índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon_r}$. El espesor de la película es d . Calcular el coeficiente de reflexión para la onda reflejada en función de d y n .

O-26 Encontrar la densidad de carga superficial y la corriente por unidad de ancho en la superficie de un conductor perfecto sobre el cual inciden ondas electromagnéticas planas, cuando el vector eléctrico es

- a) perpendicular al plano de incidencia;
- b) paralelo al plano de incidencia.

Complemento matemático

CM-1 ECUACIONES DE MAXWELL (en vacío)

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r};t) &= \frac{\rho_\ell(\vec{r};t)}{\epsilon_0} \\
 \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r};t) &= 0 \\
 \nabla \times \vec{E}(\vec{r};t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r};t)}{\partial t} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{B}(\vec{r};t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r};t)}{\partial t} &= \mu_0 \vec{J}_c(\vec{r};t) \\
 \text{Rapidez de la luz en vacío } c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

CM-2 ECUACIONES DE MAXWELL (en medio material)

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r};t) &= \rho_\ell(\vec{r};t) \\
 \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r};t) &= 0 \\
 \nabla \times \vec{E}(\vec{r};t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r};t)}{\partial t} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{H}(\vec{r};t) - \frac{\partial \vec{D}(\vec{r};t)}{\partial t} &= \vec{J}_c(\vec{r};t)
 \end{aligned}$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\begin{aligned}
 \vec{D}(\vec{r};t) &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r};t) + \vec{P}(\vec{r};t) \\
 \vec{B}(\vec{r};t) &= \mu_0 \vec{H}(\vec{r};t) + \vec{M}(\vec{r};t)
 \end{aligned}$$

medios lineales \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ \vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \quad \begin{array}{l} (\epsilon = \epsilon_0 [1 + \chi_e]) \\ (\mu = \mu_0 [1 + \chi_m]) \end{array}$

CM-3 IDENTIDADES VECTORIALES

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} \\
\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \\
\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= 0 \\
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= \vec{A} \cdot [\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})] \\
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \\
(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) &= [(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{D}]\vec{C} - [(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}]\vec{D}
\end{aligned}$$

CM-4 IDENTIDADES CON OPERADORES DIFERENCIALES

$$\begin{aligned}
\nabla(\phi \psi) &= \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi \\
\nabla \cdot (\phi \vec{A}) &= \vec{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{A} \\
\nabla \times (\phi \vec{A}) &= \phi \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla \phi \\
\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \\
\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} \\
\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} \\
\nabla \times \nabla \phi &= 0 \quad \forall \phi \\
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= 0 \quad \forall \vec{A}
\end{aligned}$$

Casos particulares de interés

$$\begin{aligned}
\nabla(r) &= \hat{r} \\
\nabla\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{\vec{r}}{r^3} \\
\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) &= 4\pi \delta(\vec{r}) \\
\nabla \cdot \vec{r} &= 3 \\
\nabla \cdot \hat{r} &= \frac{2}{r} \\
(\vec{a} \cdot \nabla)\hat{r} &= \frac{1}{r}[\vec{a} - \hat{r}(\vec{a} \cdot \hat{r})] \equiv \frac{a_{\perp}}{r} \\
\nabla \times \vec{r} &= 0 \\
\nabla \times \hat{r} &= 0
\end{aligned}$$

CM-5 SIMBOLO DE LEVI-CIVITA

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \\
\varepsilon_{321} &= \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1 \\
\varepsilon_{ijk} &= 0 \quad \text{el resto de los casos}
\end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} &= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \\
\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jlm} &= 2\delta_{ij} \\
\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} &= 6 \\
\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} &= 0
\end{aligned}$$

CM-6 SISTEMAS DE COORDENADAS

Cartesianas: $(x, y, z) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz \\ d\tau &= dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi \\ \nabla^2\psi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \vec{A} &= \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Cilíndricas: $(\rho, \theta, z) \rightarrow (\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z})$

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \hat{\rho}d\rho + \hat{\theta}r d\theta + \hat{z}dz \\ d\tau &= \rho d\rho d\theta dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\theta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi \\ \nabla^2\psi &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \vec{A} &= \hat{\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] + \hat{\theta} \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \hat{z} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

Esféricas: $(r, \theta, \phi) \rightarrow (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \hat{r}dr + r\hat{\theta}d\theta + \hat{\phi}r \operatorname{sen}\theta d\phi \\ d\tau &= r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \psi \\ \nabla^2\psi &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \vec{A} &= \hat{r} \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen}\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{\theta} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ &\quad + \hat{\phi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

CM-7 TEOREMAS VECTORIALES

elemento de superficie: $d\vec{S} \equiv \hat{n}dS$ elemento de volumen: $d\tau = d^3r$

$$\oint_{\mathcal{C}(\Sigma)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{Stokes})$$

$$\oint_{\mathcal{C}(\Sigma)} \psi d\vec{\ell} = - \int_{\Sigma} (\nabla \psi) \times d\vec{S}$$

$$\int_{\Sigma(V)} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) d\tau \quad (\text{Gauss})$$

$$\int_{\Sigma(V)} \vec{F} \times d\vec{S} = - \int_V (\nabla \times \vec{F}) d\tau$$

$$\int_{\Sigma(V)} \psi d\vec{S} = \int_V (\nabla \psi) d\tau$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) d\tau = \int_{\Sigma(V)} \phi (\nabla \psi \cdot d\vec{S}) \quad (\text{Green, 1ra identidad})$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\tau = \int_{\Sigma(V)} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\vec{S} \quad (\text{Green})$$

Respuestas problemas seleccionados

Capítulo 2: Electrostática

E-5

$$\vec{F} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R(R+d)} \hat{r}$$

E-7

$$\vec{F} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \pi R^2 \hat{n} \quad \hat{n} \equiv \text{normal a plano de corte}$$

E-9

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{F} &= \frac{4\pi}{3} \rho (a^3 - b^3) \vec{E}_0 \\ b) \quad \vec{\tau} &= -\frac{4\pi}{3} \rho b^3 \vec{d} \times \vec{E}_0 \quad \text{con respecto a } O_a, \\ c) \quad \vec{E} &= \vec{E}_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \vec{d} \end{aligned}$$

E-10

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{F} &= -Q \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{z}{[z^2+a^2]^{3/2}} \right\} \hat{z} & v_{max} &= \sqrt{\left(\frac{Q\lambda}{m\epsilon_0} \right)} \quad \text{en } z=0 \\ b) \quad \vec{F} &= -Q \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{z}{[z^2+a^2]^{3/2}} - \frac{(z-L)}{[(z-L)^2+a^2]^{3/2}} \right\} \hat{z} & \text{velocidad nula en } z^* &= \frac{L}{2} \end{aligned}$$

E-12

$$\begin{aligned} r < a: \quad \vec{E} &= 0, & \text{no cambia el resultado;} \\ a < r < b: \quad \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \hat{r}, & \text{el campo invierte su dirección;} \\ r > b: \quad \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2+b^2}{r^2} \right) \hat{r}, & \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{b^2-a^2}{r^2} \right) \hat{r}. \end{aligned}$$

E-18

$$\begin{aligned} r \geq R: \quad V(r) &= \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r} \\ r < R: \quad V(r) &= \frac{2\rho_0 R^2}{15\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{6} (r^2 - R^2) - \frac{1}{20R^2} (r^4 - R^4) \right] \end{aligned}$$

E-19

- Indicaciones: * la energía total del sistema se conserva;
* la energía total inicial del sistema corresponde a la energía eléctrica almacenada

en cada esfera de carga (la energía de interacción es aproximadamente nula, $x_0 \gg R$, y se desprecia);

* A medida que se acercan las esferas, considerar la energía potencial de interacción;

* Analizar con cuidado la situación presentada en (c).

E-25

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{E} &= \frac{Nqe}{3\epsilon_0} \vec{r} & b) \quad \eta &= \frac{m_H}{e} \sqrt{4\pi G \epsilon_0} \simeq 8,7 \times 10^{-19} \\ c) \quad v_r(r) &= r\sqrt{\lambda} & \left(\lambda &= \frac{N(qe)^2}{3m_H \epsilon_0} - \frac{4\pi GNm_H}{3} \right) & d) \quad T &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

E-28

$$a) \quad \vec{E}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{Ne}{\epsilon_0} z \hat{z} & 0 \leq x \leq \eta \\ \frac{Ne}{\epsilon_0} \eta \hat{z} & \eta \leq x \leq h \\ -\frac{Ne}{\epsilon_0} (z - [h + \eta]) \hat{z} & h \leq x \leq (h + \eta) \\ 0 & x > (h + \eta) \end{cases} \quad \begin{aligned} b) \quad \vec{F} &= \frac{(NeL)^2}{\epsilon_0} \left[-h\eta + \frac{1}{2}\eta^2 \right] \hat{z} \\ c) \quad \omega &= NeL \sqrt{\frac{h}{\epsilon_0 M}} \end{aligned}$$

E-31

$$W = -\frac{\sigma_0 \lambda l^2}{4\epsilon_0}$$

E-36

$$\begin{aligned} a) \quad \rho_N &= eN_p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \\ b) \quad \vec{E}(r < a) &= \frac{\rho_p r}{2\epsilon_0} \hat{r}; \quad \vec{E}(a \leq r \leq b) = \frac{\rho_N (r^2 - b^2)}{2r\epsilon_0} \hat{r}; \quad \vec{E}(r > b) = 0; \\ c) \quad W &= \frac{(eab)^2}{2\epsilon_0 (b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

E-38

$$x(x_0; t) = x_0 \left[1 + \frac{q^2 n_0}{m\epsilon_0} t^2 \right] \quad \text{donde } x_0 \text{ es la posición de la partícula en } t = 0$$

E-41

$$W_e = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

E-47

$$\begin{aligned} b) \quad d &= \frac{4\pi\epsilon_0 E_0 R^3}{Ze} & \text{restricción: } E_0 &\ll \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R^2} \\ c) \quad \|\vec{p}\| &= 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0 & V(r, \theta) &= \frac{Zed \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

E-49

$$\begin{aligned} a) \quad \rho_e &= \frac{3N|e|}{4\pi R^3} & R_e &= [1 - \alpha]^{1/3} R & Q_t &= \alpha N |e| & \text{distribuida en } R_e \leq r \leq R \\ b) \quad \vec{E} &= \frac{N|e|}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{\delta} & c) \quad \Omega &= \sqrt{\frac{N|e|^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}} \end{aligned}$$

Capítulo 3: Campos eléctricos en la materia

CD-4

a) $\vec{E}(z) = -\frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \frac{s}{s^2+z^2} \hat{x}$ b) $V(z) = 0$ c) $\sigma_{\pm} = \pm \frac{\lambda}{\pi} \frac{s}{s^2+z^2}$ (± frente a ∓ λ)
 d) $x < 0$: semiespacio es equipotencial y $\vec{E} = 0$ $x > 0$: \vec{E} original producido por +λ y σ_-

CD-5

<p>(a)</p> $\rho_p(r) = -\frac{2P_0}{r}$ $\sigma_p(a) = -P_0$ $\sigma_p(b) = P_0$ $\sigma_\ell(a) = 0$ $\sigma_\ell(b) = 0$ $\sigma_\ell(c) = 0$ $V(b) - V(a) = \frac{P_0}{\epsilon_0} (b-a)$	<p>(b)</p> $\rho_p(r) = -\frac{2P_0}{r}$ $\sigma_p(a) = -P_0$ $\sigma_p(b) = P_0$ $\sigma_\ell(a) = -P_0 \left(\frac{b}{a}\right)$ $\sigma_\ell(b) = P_0 \left(\frac{a}{b}\right)$ $\sigma_\ell(c) = -P_0 \left(\frac{ab}{c^2}\right)$ $V(b) - V(a) = 0$
---	--

CD-14

$$\vec{T} = \frac{Q^2 ab}{4\pi \epsilon_0 L^2 (a+b)^2} \hat{r}$$

CD-20

$$\sigma(\theta) = \frac{Q}{4\pi a^2} \frac{\left[\left(\frac{d}{a}\right)^2 - 1\right]}{\left[\left(\frac{d}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{a}\right) \cos \theta + 1\right]^{3/2}} \quad \|\vec{F}\| = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{ad}{(a^2 - d^2)^2} \quad (\text{atractiva})$$

CD-17

a) $\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{en conductor} \\ \frac{\sigma}{\epsilon} \hat{z} & \text{en dieléctrico} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} & \text{fuera de conductor y dieléctrico} \end{cases}$

b) $\sigma_p = \begin{cases} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \sigma & \text{en } z = h \\ -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \sigma & \text{en } z = 0 \end{cases}$

c) Nada cambia No hay fuerza sobre dieléctrico

CD-29

a) $\vec{E}(r) = 2k_e \frac{Q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r}$ $\sigma_{tot} = \frac{Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$
 $\sigma_{\ell_1} = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$ $\sigma_{\ell_2} = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$
 $\sigma_{p_1} = -\frac{(\epsilon_1 - 1)Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$ $\sigma_{p_2} = -\frac{(\epsilon_2 - 1)Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$

b) $Q = \sqrt{\frac{4\pi R^3(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2(\rho_1 + \rho_2 - 2\rho)g}{3k_e(\epsilon_1 - \epsilon_2)}}$

CD-42

a) Placa conductora y dieléctrico en contacto

en placa conductora $\begin{cases} \text{superficie superior: } \sigma_1 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \left(\frac{Q}{a^2}\right) \\ \text{superficie inferior: } \sigma_2 = \frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} \left(\frac{Q}{a^2}\right) \end{cases}$

en dieléctrico: $\sigma_p = -\left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}\right) \left(\frac{Q}{a^2}\right) \quad \rho_p = 0$

campo eléctrico $\begin{cases} \vec{E}_1 = -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \hat{x} & x < -h \\ \vec{E}_c = 0 & -h < x < 0 \\ \vec{E}_d = \frac{\sigma_2}{\epsilon} \hat{x} & x > 0 \end{cases}$

Placa conductora y dieléctrico separados distancia ξ

Densidades superficiales σ_1 , σ_2 y σ_p se mantienen;

Campos eléctricos \vec{E}_1 y \vec{E}_d se mantienen;

Aparece un campo eléctrico entre el dieléctrico y la placa, $\vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \hat{x}$ para $-\xi < x < 0$.

b) Fuerza sobre conductor:
$$\vec{F} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \right) \left(\frac{Q}{a} \right)^2 \hat{x} \quad (\text{atractiva})$$

c) Dieléctrico de espesor finito: $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{a^2} \right) \quad \sigma_p = \rho_p = 0$

$$\vec{E}_1 = -\frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a^2} \right) \hat{x} \quad \vec{E}_d = -\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \vec{E}_1 \quad \text{sobre conductor:} \quad \vec{F} = 0$$

Capítulo 4: Corrientes eléctrica

(a)

(b)

(c)

I-2

$$V(a < r < b) = V_0 + \frac{I}{4\pi c} \ln\left(\frac{r}{b}\right) \quad Q(r=a) = -I \frac{\epsilon_0 a}{c} \quad R = \frac{1}{4\pi c} \ln(b/a)$$

$$V(r > b) = V_0 \frac{b}{r} \quad Q(a < r < b) = -I \frac{\epsilon_0}{c} (b-a) \quad Q(r=b) = I \frac{\epsilon_0 b}{c} + V_0 \frac{\epsilon_0}{b}$$

I-4

a) $t^* = \frac{(b-x)\epsilon_0 + x\epsilon}{\sigma_c x} \ln 2$ b) $\vec{F} = \frac{Q_0^2 (\epsilon - \epsilon_0) s}{2b[\epsilon_0(b-x) + \epsilon x]^2} \hat{x}$

c) $W(0) - W(\infty) = \frac{Q_0^2 s}{2b[\epsilon_0(b-x) + \epsilon x]}$

I-6

a) $\rho_\ell(r;t) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_1 \\ \rho_0 e^{-(\sigma_c/\epsilon)t} & R_1 < r < R_2 \end{cases}$

b) $\vec{E} = \rho_0 \frac{r^2 - R_1^2}{2\epsilon r} e^{-(\sigma_c/\epsilon)t} \hat{r}$

c) $\sigma_\ell(r=R_2) = -\rho_0 \frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2} e^{-(\sigma_c/\epsilon)t}$

I-10

a) $\vec{J}(a < r < b) = \begin{cases} \frac{\sigma_2 V}{r \ln(b/a)} & \text{si } 0 < z < d_2 \\ \frac{\sigma_1 V}{r \ln(b/a)} & \text{si } d_2 < z < (d_1 + d_2) \end{cases}$

b) $R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2)}; \quad C = \frac{2\pi(\epsilon_1 d_1 + \epsilon_2 d_2)}{\ln(b/a)};$

c) $W = \frac{1}{2} C V^2; \quad P = \frac{V^2}{R}$

I-18

a) $C = 4\pi\epsilon \frac{ab}{a+b}$ c) $W(t) = \frac{Q_0^2}{2C} e^{-2\sigma_c t/\epsilon}$

I-20

$$I = 4\pi\kappa \left(\frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right)^2 \quad R = \frac{V}{I} \quad \rho_\ell = \frac{\epsilon V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad a \leq r \leq b$$

I-21

- b) Capacidad aumenta
 c) $Q_{\text{total}}(r = b; t) = -Q_0 \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} e^{-(\sigma_c/\epsilon)t} \right]$
 $Q_{\text{total}}(r = c; t) = -Q_{\text{total}}(r = b; t)$
 d) $W_{\text{disip}} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right]$

Capítulo 5: Magnetostática

M-2

$$\vec{B}(\alpha) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d \sin \alpha} [\cos \alpha - 1] \hat{z} \quad \longrightarrow \quad \vec{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{z}$$

M-11

$$\frac{V_0}{I} = \frac{1}{cC_\ell} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \simeq 300,000 \left[\frac{\text{Km}}{\text{s}} \right]$$

M-15

$$\vec{B}(y) = \begin{cases} 0 & y < -b \\ -\mu_0 J_0 (y+b) \hat{x} & -b < y < b \\ 0 & y > b \end{cases}$$

M-17

$$a) \quad I = V_0 \frac{4\pi\sigma_c}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} \quad b) \quad \vec{B} = 0$$

M-18

- a) $B_x = \frac{\mu_0 ID}{2\pi r^2}$ $B_y = 0$ $B_z = 0$
 b) $\vec{F} = -|e|vB\hat{y}$ $|e|$: magnitud carga electrón
 c) $\vec{E} = -vB\hat{y}$

M-38

- a) $\sigma = \frac{\epsilon_0 V_0}{h} = 1,77 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$
 b) $\vec{B}_c = \mu_0 \sigma \omega a \hat{k} = 1,4 \times 10^{-9} \text{ T}$ $B_r = \mu_0 \sigma \omega r$
 c) $\theta \simeq \frac{B_c}{B_*} = 2,8 \times 10^{-5} \text{ rad}$

M-42

$$a) \quad z = \left[\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi m_d g} \right]^{\frac{1}{4}} \quad b) \quad \text{si } \delta \equiv \frac{x}{y} \quad \delta \text{ solución de } \frac{1}{\delta^4} + \frac{1}{(\delta+1)^4} = 2 \quad (\delta \simeq 0,85\dots)$$

M-48

- a) $\vec{B} = \pi\mu_0 f \Sigma \omega \left[\frac{2z^2+a^2}{(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} - 2z \right] \hat{z}$
 b) $\vec{F} = 2m\pi\mu_0 f \Sigma \omega \left[1 - d \frac{d^2+\frac{3}{2}a^2}{(d^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \hat{z} \quad (m = I\pi r^2)$

Capítulo 6: Campos magnéticos en la materia

MM-17

$$\vec{P}(\rho) = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\mu}{\mu_0} B \Omega \vec{\rho} \qquad \lambda_p(\rho = a) = 2\pi a^2 (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\mu}{\mu_0} B \Omega$$

Capítulo 7: Inducción electromagnética

F-7

$$\begin{aligned} a) \quad \theta(t) &= \frac{\pi}{4} + \omega_0 \tau [1 - e^{-t/\tau}] & \text{con } \tau &= \frac{4RJ}{B_0^2 a^4} \\ b) \quad I_{OA}(t) &= I_{OB}(t) = \omega_0 \frac{B_0^2 a^2}{2R} e^{-t/\tau} & I_{arcoAB} &= I_{arcoBA} = \frac{1}{2} I_{AB} \\ c) \quad I_{OA}(t) &= \frac{B_0 a^2}{2} \left[\frac{1}{2R + \frac{R_a \theta}{2\pi}} + \frac{1}{2R + R_a - \frac{R_a \theta}{2\pi}} \right] \dot{\theta}(t) \end{aligned}$$

F-17

$$a) \quad \vec{J} = -\frac{1}{2} B_0 \sigma_c \omega r \cos(\omega t) \hat{\theta} \qquad b) \quad P = \frac{\pi}{8} \sigma_c h [B_0 \omega R^2 \cos(\omega t)]^2$$

F-18

$$a) \quad \phi(z) = \frac{1}{2} \mu_0 m \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = 1,96 \times 10^{-2} \text{ Tm}^2 \qquad c) \quad \vec{F} = \frac{9\mu_0^2 m^2 a^4 t^2 v^3}{4R(a^2 + v^2 t^2)^5}$$

F-27

$$\begin{aligned} a) \quad V_1 &= \pi a^2 \dot{B} \frac{R_1}{R_1 + R_2} & V_2 &= -\pi a^2 \dot{B} \frac{R_2}{R_1 + R_2} & V_A - V_B &= \begin{cases} V_1 & (\text{trayec. iz.}) \\ |V_2| & (\text{trayec. der.}) \end{cases} \\ b) \quad V_2 &= V_1 & V_A - V_B &= 0 \\ c) \quad & \text{No hay falla en la teoría} \end{aligned}$$

F-30

$$a) \quad V_{\text{der}} = -0,1 \text{ [V]} \qquad b) \quad I = 10^{-5} \text{ [A]} \qquad c) \quad \text{f.e.m.} = 0,25 \text{ [V]}$$

F-40

$$M \approx \mu_0 \frac{(\pi a^2)^2}{2\pi b^3}$$

F-44

$$\begin{aligned} a) \quad m\ddot{z}_1(t) &= mg - aBI(t) & m\ddot{z}_2(t) &= mg + aBI(t) & I(t) &= \frac{Ba}{R} [z_1 - z_2] \\ b) \quad I(t) &= v_0 \left(\frac{Ba}{R}\right) e^{-2t/\tau} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 & (\tau &= \frac{Rm}{(Ba)^2}) \\ v_1(t) \equiv \dot{z}_1(t) &= gt + \frac{1}{2} v_0 [1 + e^{-2t/\tau}] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2} v_0 + gt \\ v_2(t) \equiv \dot{z}_2(t) &= gt + \frac{1}{2} v_0 [1 - e^{-2t/\tau}] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2} v_0 + gt \\ c) \quad I(t) &= 0 & v_1(t) &= v_2(t) = gt \quad (\text{caída libre}) \end{aligned}$$

Capítulo 8: Ondas electromagnéticas

O-2 No irradia energía (campo magnético nulo fuera de la esfera).

O-11

$$P_{abs-total} \simeq 4,3 \times 10^{-6} \text{ [Pa]} \quad P_{reflex-total} = 2P_{abs-total}$$

O-16

- a) $B_x = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ [T]} \quad \hat{k} = \frac{4}{5}\hat{x} - \frac{3}{5}\hat{y} \quad \lambda = 500 \text{ [nm]} \quad \nu = 0,6 \cdot 10^{15} \text{ [Hz]}$
 b) $\vec{E}_i = -7,5 \cdot 10^2 \hat{z} \cos(\omega t - k_x x + k_y y) \text{ [N/C]}$
 c) $\langle \vec{S} \rangle = 7,5 \cdot 10^2 \text{ [W/m}^2\text{]}$
 d) $\vec{E}_r = 7,5 \cdot 10^2 \hat{z} \cos(\omega t - k_x x - k_y y) \text{ [N/C]}$
 e) $\vec{E}_{total} = 1,5 \cdot 10^3 \hat{z} \sin(\omega t - k_x x) \sin(k_y y) \text{ [N/C]}$
 f) $P_{abs} = 4,5 \cdot 10^{13} \text{ [W]}$