Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI-2001 – Mecánica

Auxiliar 13: Popurrí lagrangiano

Q(o_o Q)

Profesor: César Fuentes
Auxiliares: Javier Aliste, Cristóbal Cárcamo

1 de diciembre, 2023

P1 Cilindros.-

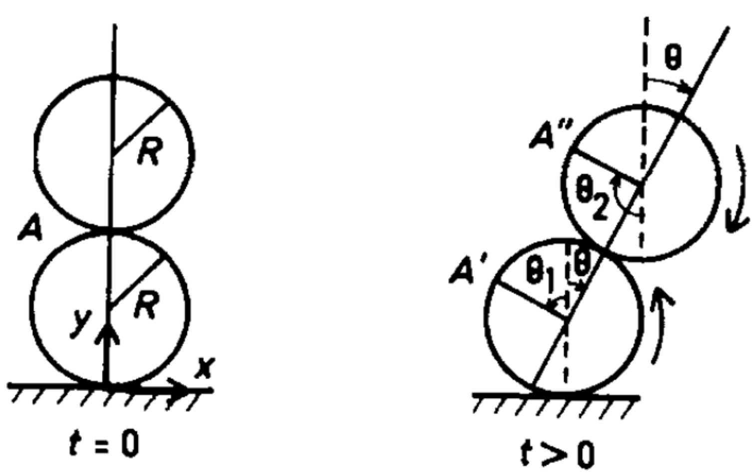
Un cilindro solido y uniforme de radio R y masa M reposa horizontalmente en un otro cilindro idéntico como muestra la figura. Al cilindro superior se le da un desplazamiento infinitesimal tal que ambos cilindros ruedan sin resbalar.

a) ¿Cual es el lagrangiano del sistema?

b) ¿Cuales son las constantes de movimiento?

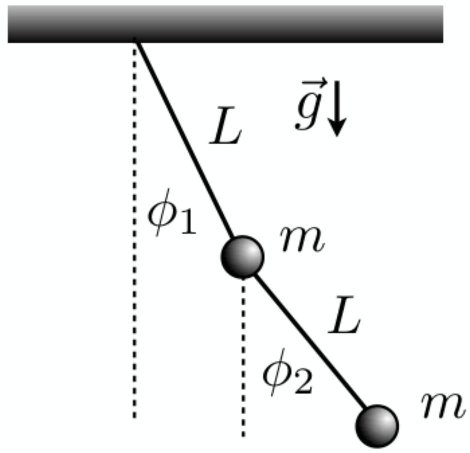
c) Muestre que mientras ambos cilindros se mantengan en contacto $\dot{\theta}^2$ cumple la siguiente relación:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12g(1-cos\theta)}{R(17+4cos\theta-4cos^2\theta)} \tag{1}$$



P2 Péndulo doble, el clásico de ayer y hoy.-

Desde un péndulo de masa m y largo L se sujeta otro péndulo exactamente igual de modo que ambos pueden oscilar libremente en el plano vertical (ver figura). Sus oscilaciones se describen respecto a los ángulos que cada péndulo forma con respecto a la vertical, ϕ_1 y ϕ_2:

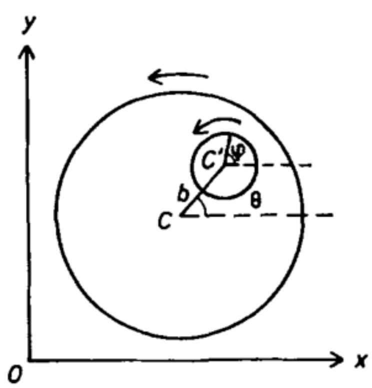


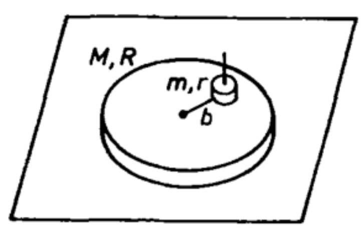
a) Deduzca el sistema de ecuaciones de movimiento acopladas para ϕ_1 y ϕ_2 pequeños. A partir de estas, deduzca la matriz de frecuencias.

b) Determine las frecuencias propias del sistema y los modos normales asociados a éstas (incluya un bosquejo de los modos encontrados).

P3 Semidiscos.-

Un disco de masa M y radio R se desliza sin fricción en una superficie de manera horizontal. Otro disco de masa m y radio r, este esta sujeto al disco mayor tal que la distancia entre ambos centros es b. El disco pequeño puede rotar. Describa las ecuaciones de movimiento e identifique sus constantes.





Algunas Fórmulas

- Radio de curvatura:

$$\rho_c = \frac{v^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} \quad ; \quad \rho_c = \frac{v^2}{\left\|\hat{t} \times \vec{a}\right\|} \quad ; \quad \text{con } v = \|\vec{v}\|$$

- Producto cruz: Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ expresados en la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, tales que:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

Su producto cruz vendrá dado por:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{e}_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{e}_3$$

- Módulo del producto cruz:

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 - (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

- Producto punto: Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ expresados en la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, tales que:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

Su producto punto vendrá dado por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

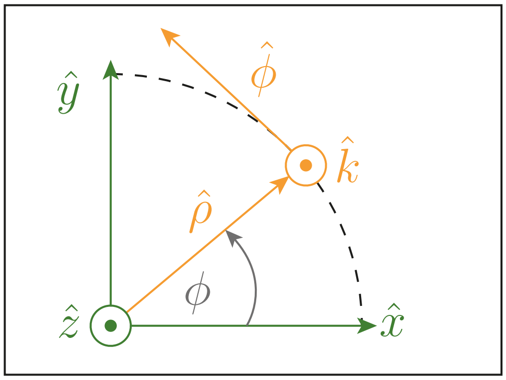
- Longitud de Arco:

$$L_\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{v}\| dt$$

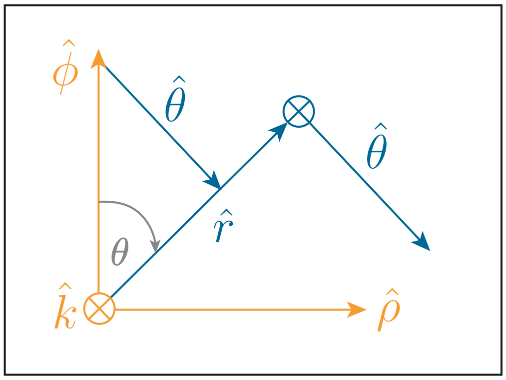
- Coordenadas cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
  - $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$
  - $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$
- Coordenadas cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + k\hat{k}$
  - $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{k}\hat{k}$
  - $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{k}\hat{k}$
- Coordenadas esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\vec{r} = r\hat{r}$
  - $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}$
  - $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\varphi}$
- Coordenadas intrínsecas $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$:
  - $\dfrac{d\hat{t}}{ds} = \dfrac{\hat{n}}{\rho_c}$
  - $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = \dfrac{d\hat{t}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\hat{n}}{\rho_c}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n}$
  - $\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$
  - $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n}$

Cambios de bases coordenadas

- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\hat{x} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}$
  - $\hat{y} = \sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}$
  - $\hat{z} = \hat{k}$
- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ a cartesianas$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$
  - $\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$
  - $\hat{k} = \hat{z}$



- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ a esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\hat{\rho} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}$
  - $\hat{\phi} = \hat{\varphi}$
  - $\hat{k} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$
- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ a cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\hat{r} = \sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{k}$
  - $\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{\rho} - \sin\theta\,\hat{k}$
  - $\hat{\varphi} = \hat{\phi}$



- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\hat{x} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}$
  - $\hat{y} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\varphi\,\hat{\varphi}$
  - $\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$
- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ a cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$
  - $\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$
  - $\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$