Auxiliar 9: Sistemas con restricción y quizás inercia

:)

Profesor: César Fuentes
Auxiliares: Javier Aliste, Cristóbal Cárcamo

10 de noviembre, 2023

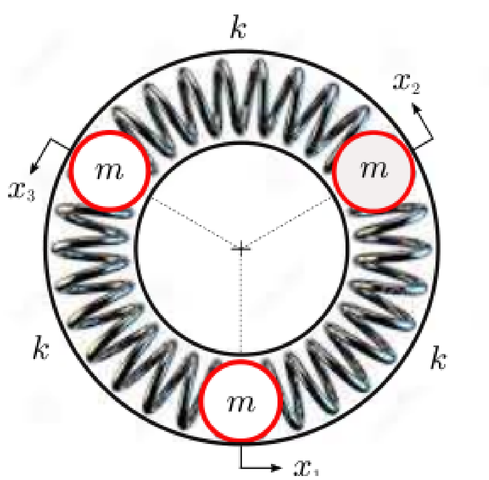
P1-Control 3 Brieva-2018.-

Considere un sistema de 3 masas iguales (m), conectadas por resortes idénticos de largo natural L y constante elástica k, que pueden moverse en una canaleta circular, con roce despreciable con sus paredes. Si llamamos x_1, x_2, x_3 los desplazamientos de las respectivas masas, a partir de la configuración de equilibrio, se pide:

a) Escribir las ecuaciones de movimiento de las masas.

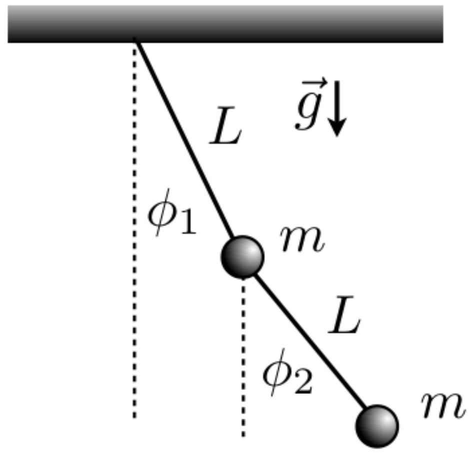
b) calcule las frecuencias normales (o propias) del sistema e interprete.

c) Determine los modos normales de vibración. Interprete los resultados.



P2 Péndulo doble, el clásico de ayer y hoy.-

Desde un péndulo de masa m y largo L se sujeta otro péndulo exactamente igual de modo que ambos pueden oscilar libremente en el plano vertical (ver figura). Sus oscilaciones se describen respecto a los ángulos que cada péndulo forma con respecto a la vertical, ϕ_1 y ϕ_2:

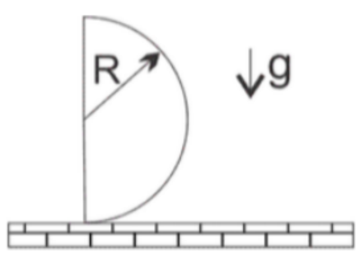


a) Deduzca el sistema de ecuaciones de movimiento acopladas para ϕ_1 y ϕ_2 pequeños. A partir de estas, deduzca la matriz de frecuencias.

b) Determine las frecuencias propias del sistema y los modos normales asociados a éstas (incluya un bosquejo de los modos encontrados).

P3 Semidisco.-

Un semidisco de masa M distribuida uniformemente se libera con su diámetro vertical, como muestra el dibujo. Determine la velocidad angular que alcanza el sólido cuando su energía cinética es máxima. Asuma que el cuerpo no resbala.



Algunas Fórmulas

- Radio de curvatura:

$$\rho_c = \frac{v^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} \quad ; \quad \rho_c = \frac{v^2}{\left\|\hat{t} \times \vec{a}\right\|} \quad ; \quad \text{con } v = \|\vec{v}\|$$

- Producto cruz: Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ expresados en la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, tales que:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

Su producto cruz vendrá dado por:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{e}_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{e}_3$$

- Módulo del producto cruz:

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 - (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

- Producto punto: Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ expresados en la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, tales que:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

Su producto punto vendrá dado por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

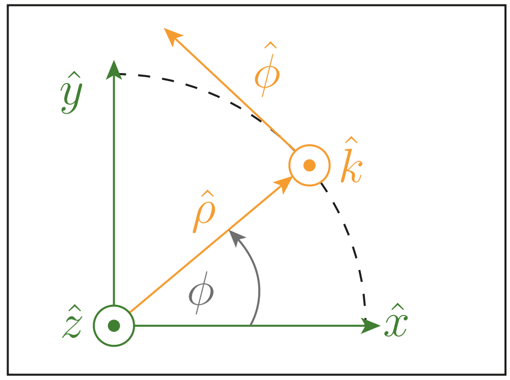
- Longitud de Arco:

$$L_\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{v}\| dt$$

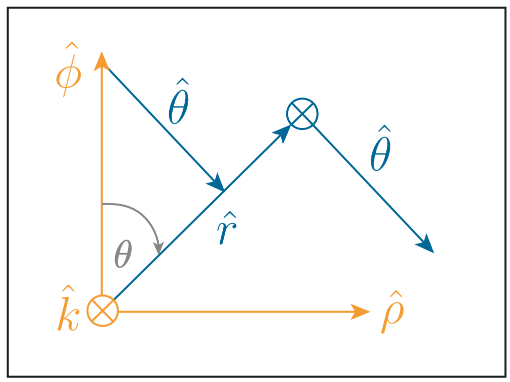
- Coordenadas cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
  - $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$
  - $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$
- Coordenadas cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + k\hat{k}$
  - $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{k}\hat{k}$
  - $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{k}\hat{k}$
- Coordenadas esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\vec{r} = r\hat{r}$
  - $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}$
  - $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\varphi}$
- Coordenadas intrínsecas $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$:
  - $\dfrac{d\hat{t}}{ds} = \dfrac{\hat{n}}{\rho_c}$
  - $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = \dfrac{d\hat{t}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\hat{n}}{\rho_c}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n}$
  - $\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$
  - $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n}$

Cambios de bases coordenadas

- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\hat{x} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}$
  - $\hat{y} = \sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}$
  - $\hat{z} = \hat{k}$
- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ a cartesianas$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$
  - $\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$
  - $\hat{k} = \hat{z}$



- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ a esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\hat{\rho} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}$
  - $\hat{\phi} = \hat{\varphi}$
  - $\hat{k} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$
- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ a cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\hat{r} = \sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{k}$
  - $\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{\rho} - \sin\theta\,\hat{k}$
  - $\hat{\varphi} = \hat{\phi}$



- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\hat{x} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}$
  - $\hat{y} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\varphi\,\hat{\varphi}$
  - $\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$
- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ a cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$
  - $\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$
  - $\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$