Auxiliar 8: Fuerzas centrales

Orbitas

Profesor: César Fuentes
Auxiliares: Javier Aliste, Cristóbal Cárcamo

12 de octubre, 2023

P1-P5.1 Kim hauser.-

Considere una partícula de masa m que se mueve en un campo de fuerza de atracción central $\vec{F} = -c\hat{r}$, donde c es una constante positiva (note que la magnitud de la fuerza es constante).

a) Demuestre que la partícula no puede escapar de este campo de atracción.

b) Si se verifica que la partícula se encuentra en una órbita circular de radio $r = r_o$, determine el período de pequeñas oscilaciones que experimenta la distancia entre la partícula y el centro de atracción cuando la partícula sufre una pequeña perturbación radial.

c) Suponga que la partícula se encuentra en la órbita circunferencial de la parte (b) y, como resultado de un impulso radial, en dirección opuesta al centro de atracción, la partícula queda en una órbita tal que su distancia máxima al centro de atracción es $2r_o$. Determine cuánto aumenta la energía mecánica total de la partícula como resultado de este impulso.

P2-Ejercicio 5 Romero 2017.-

Dos satélites (S1 y S2) giran en torno a la Tierra, de masa M, cada uno con masa m. Ambos giran en sentido antihorario, donde el primero órbita de forma circunferencial de radio R, y el segundo está en una órbita elíptica de radio menor $r_{min} = R$ y radio mayor $r_{max} = 8R$. En un cierto instante ambos satélites se acoplan (lo cual ocurre en un periodo Δt ínfimo), formando un satélite compuesto S12. Durante el acoplamiento se conserva el moméntum angular total, pero no la energía.

a) Calcule la velocidad $v_{\odot}$ del satélite S1 en su órbita circular, y su moméntum angular L1.

b) Calcule la velocidad del satélite S2 en los puntos A y B, luego calcule su moméntum angular L2.

c) Cuánta es la energía total E_i y el moméntum angular total L_i antes del acoplamiento? (Debe quedar en términos de G, M, m y R).

d) ¿Cuál es la velocidad resultante $v_{B,12}$ del satélite S12 después del acoplamiento?

e) ¿Cuál es el nuevo radio máximo $r_{A\prime} = \alpha R$ (encuentre α) y la velocidad en el punto A', $v_{A\prime,12}$?

Algunas Fórmulas

- Radio de curvatura:

$$\rho_c = \frac{v^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} \quad ; \quad \rho_c = \frac{v^2}{\left\|\hat{t} \times \vec{a}\right\|} \quad ; \quad \text{con } v = \|\vec{v}\|$$

- Producto cruz: Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ expresados en la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, tales que:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

  Su producto cruz vendrá dado por:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{e}_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{e}_3$$

- Módulo del producto cruz:

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 - (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

- Producto punto: Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ expresados en la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, tales que:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

  Su producto punto vendrá dado por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

- Longitud de Arco:

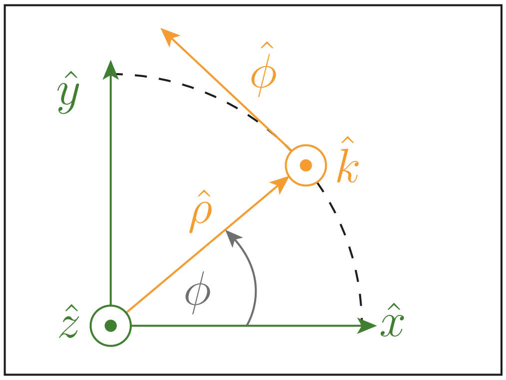
$$L_\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{v}\| dt$$

- Coordenadas cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
  - $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$
  - $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$
- Coordenadas cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + k\hat{k}$
  - $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{k}\hat{k}$
  - $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{k}\hat{k}$
- Coordenadas esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\vec{r} = r\hat{r}$
  - $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}$
  - $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\varphi}$
- Coordenadas intrínsecas $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$:
  - $\dfrac{d\hat{t}}{ds} = \dfrac{\hat{n}}{\rho_c}$
  - $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = \dfrac{d\hat{t}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\hat{n}}{\rho_c}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n}$
  - $\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$
  - $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n}$

Cambios de bases coordenadas

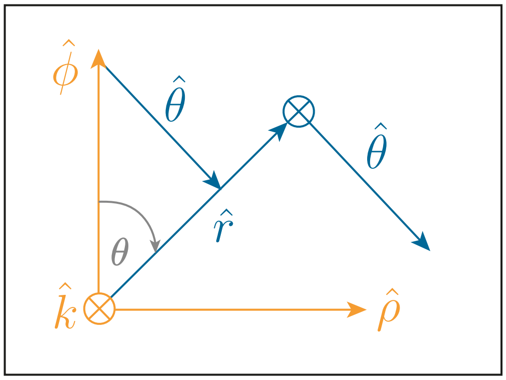
- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
    - $\hat{x} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}$
    - $\hat{y} = \sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}$
    - $\hat{z} = \hat{k}$

- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ a cartesianas$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
    - $\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$
    - $\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$
    - $\hat{k} = \hat{z}$



- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ a esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
    - $\hat{\rho} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}$
    - $\hat{\phi} = \hat{\varphi}$
    - $\hat{k} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$

- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ a cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
    - $\hat{r} = \sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{k}$
    - $\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{\rho} - \sin\theta\,\hat{k}$
    - $\hat{\varphi} = \hat{\phi}$



- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
    - $\hat{x} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}$
    - $\hat{y} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\varphi\,\hat{\varphi}$
    - $\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$

- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ a cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
    - $\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$
    - $\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$
    - $\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$