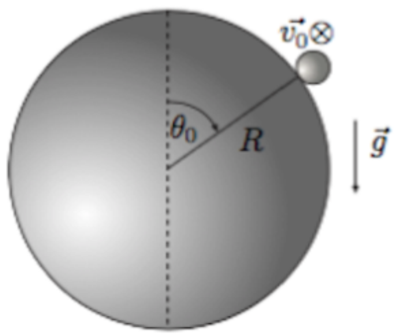
Auxiliar 6: Pre-control

Dinámica y otros

Profesor: César Fuentes
Auxiliares: Javier Aliste, Cristóbal Cárcamo

29 de Septiembre, 2023

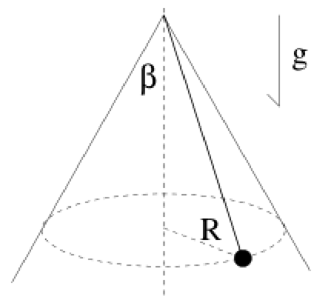
P1-C1 2018 Claudio Romero.- Una partícula de masa m está ubicada sobre la superficie de una esfera de radio R, en presencia de gravedad. En el instante inicial, se lanza la partícula con una velocidad horizontal $\vec{v_0} = v_0\hat{\phi}$, tangente a la superficie, y con un ángulo $\theta(t = 0) = \frac{\pi}{3}$.



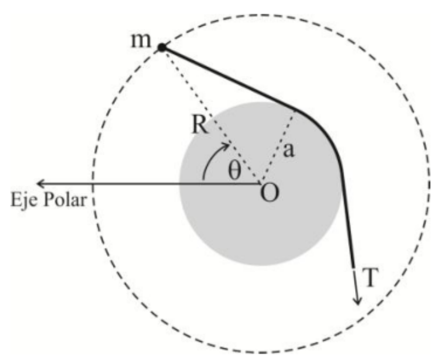
a) Encuentre la velocidad y aceleración de la partícula en función de θ.

b) Determine el valor del ángulo θ_c en que la partícula se despega de la superficie.

P2-C1 2016 Hugo Arellano .- Una moneda de masa m se mantiene atada al vértice de un cono mediante una cuerda ideal. La distancia entre la moneda y el eje del cono es R. El ángulo entre el eje del cono y su directriz es β. Entre la superficie del cono y la moneda hay roce caracterizado por el coeficiente de roce μ. A la moneda se le imprime una velocidad inicial v_0 perpendicular a la cuerda, tangencial al cono en su punto de contacto. La rapidez v_0 es tal que la moneda no pierda contacto con el cono. Calcule el tiempo que tarda la moneda en detenerse.



P3-C1 2015 Nestor Sepulveda.- Una partícula de masa m es forzada a describir un círculo de radio R, mientras es sometida a una tensión ajustable T. La tensión es aplicada al extremo de una cuerda ideal que está permanentemente en contacto con un poste central de radio a, concéntrico con la trayectoria circular que describe la partícula. Tanto la dirección del a tensión como su magnitud se ajustan adecuadamente de manera de asegurar que la partícula describa un circulo de radio R. El movimiento es plano y no existe gravedad.



a) Escriba las ecuaciones de movimiento en el sistema de coordenadas polares con origen en el centro del poste.

b) si en t=0 se tiene que $\theta(0) = 0 y \dot{\theta}(0) = \omega_0$, determine la velocidad angular de la partícula en función del tiempo.

c) Determine el ángulo θ de la partícula cuando la tensión de la cuerda es el doble de la tensión inicial.

Algunas Fórmulas

- Radio de curvatura:

$$\rho_c = \frac{v^3}{\|\vec{v}\times\vec{a}\|} \quad ; \quad \rho_c = \frac{v^2}{\left\|\hat{t}\times\vec{a}\right\|} \quad ; \quad \text{con } v = \|\vec{v}\|$$

- Producto cruz: Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ expresados en la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, tales que:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

  Su producto cruz vendrá dado por:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\hat{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\hat{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\hat{e}_3$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{e}_3$$

- Módulo del producto cruz:

$$\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 - (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

- Producto punto: Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ expresados en la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, tales que:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

  Su producto punto vendrá dado por:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

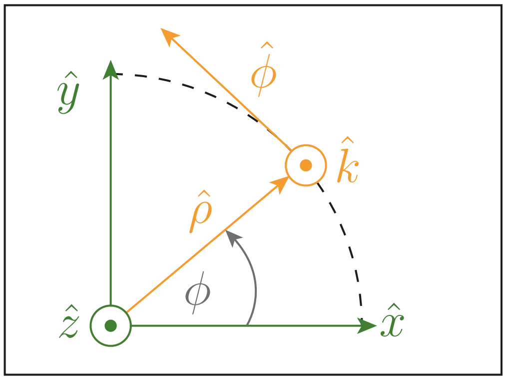
- Longitud de Arco:

$$L_\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{v}\| dt$$

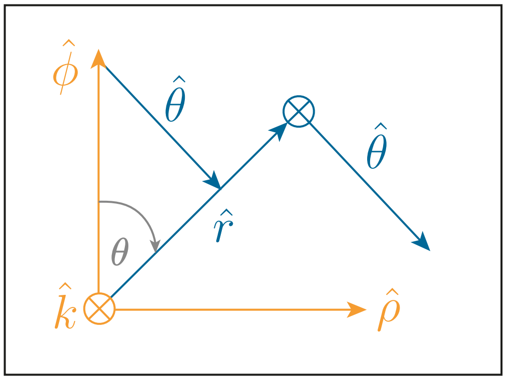
- Coordenadas cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
  - $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$
  - $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$
- Coordenadas cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + k\hat{k}$
  - $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{k}\hat{k}$
  - $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{k}\hat{k}$
- Coordenadas esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\vec{r} = r\hat{r}$
  - $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}$
  - $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\varphi}$
- Coordenadas intrínsecas $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$:
  - $\dfrac{d\hat{t}}{ds} = \dfrac{\hat{n}}{\rho_c}$
  - $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = \dfrac{d\hat{t}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\hat{n}}{\rho_c}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n}$
  - $\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$
  - $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n}$

Cambios de bases coordenadas

- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\hat{x} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}$
  - $\hat{y} = \sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}$
  - $\hat{z} = \hat{k}$
- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ a cartesianas$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$
  - $\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$
  - $\hat{k} = \hat{z}$



- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ a esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\hat{\rho} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}$
  - $\hat{\phi} = \hat{\varphi}$
  - $\hat{k} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$
- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ a cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\hat{r} = \sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{k}$
  - $\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{\rho} - \sin\theta\,\hat{k}$
  - $\hat{\varphi} = \hat{\phi}$



- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\hat{x} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}$
  - $\hat{y} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\varphi\,\hat{\varphi}$
  - $\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$
- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ a cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$
  - $\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$
  - $\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$