Auxiliar 3

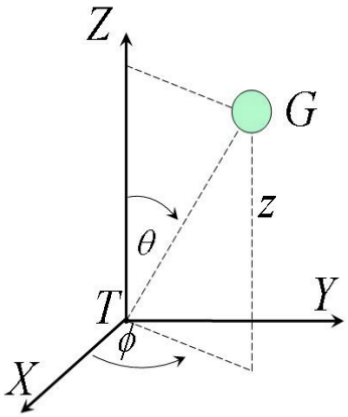
Cinemática: Esféricas

Profesor: César Fuentes
Auxiliares: Javier Aliste, Cristóbal Cárcamo

1 de Septiembre, 2023

Ejercicios Esféricas

P1 (Control Sotomayor 2012).- La técnica meteorológica de "globos pilotos" consiste en liberar un globo G inflado con Helio, cuya altura z(t) se supone conocida. La posición del globo es seguida por un observador a través de un anteojo teodolito ubicado en el punto T, de tal manera de registrar los ángulos zenital ($\theta(t)$) y azimutal ($\phi(t)$) de la posición de G en cada instante. El objetivo de la técnica es deducir la velocidad horizontal del globo a partir de los datos de z(t) , $\phi(t)$ y $\theta(t)$.

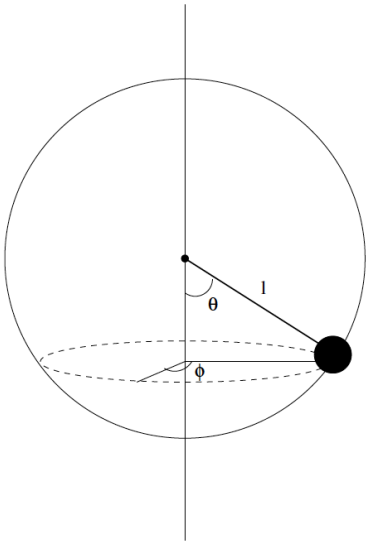


a) Determinar las componentes horizontales de la velocidad del globo $\dot{x}$ e $\dot{y}$ en función de z, θ, ϕ , $\dot{z}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$.

b) Si a partir de cierta altura la velocidad del globo es constante, con $\dot{x} = u_0$, $\dot{y} = v_0$ y $\dot{z} = w_0$, determine los valores a los cuales tienden los ángulos ϕ y θ cuando $t \to \infty$.

c) Para un globo que se mueve a altura constante z, con $\dot{x} = u_0$ e $\dot{y} = v_0$ constantes, determine expresiones para θ y ϕ en función de u_0, v_0, θ, z y ϕ. La práctica indica que para los observadores es muy difícil realizar el seguimiento del globo cuando éste por su trayectoria pasa justo por encima del punto T. Proponga una explicación cualitativa a este problema en base al resultado obtenido.

P2-Péndulo esférico.- Sin mucho preámbulo, calculemos el péndulo esférico.



a) Describa mediante las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas el movimiento del péndulo.

b) Analice las ecuaciones obtenidas y vea que condiciones se tienen que cumplir para tenga una rotación fija en el plano x-y.

Algunas Fórmulas

- Radio de curvatura:

$$\rho_c = \frac{v^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} \quad ; \quad \rho_c = \frac{v^2}{\left\|\hat{t} \times \vec{a}\right\|} \quad ; \quad \text{con } v = \|\vec{v}\|$$

- Producto cruz: Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ expresados en la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, tales que:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

  Su producto cruz vendrá dado por:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{e}_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{e}_3$$

- Módulo del producto cruz:

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 - (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

- Producto punto: Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ expresados en la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, tales que:

$$\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$$

  Su producto punto vendrá dado por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

- Longitud de Arco:

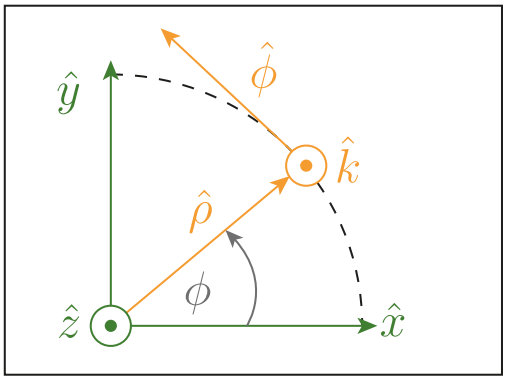
$$L_\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{v}\| dt$$

- Coordenadas cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
  - $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$
  - $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$
- Coordenadas cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + k\hat{k}$
  - $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{k}\hat{k}$
  - $\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{k}\hat{k}$
- Coordenadas esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\vec{r} = r\hat{r}$
  - $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}$
  - $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\varphi}$
- Coordenadas intrínsecas $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$:
  - $\dfrac{d\hat{t}}{ds} = \dfrac{\hat{n}}{\rho_c}$
  - $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = \dfrac{d\hat{t}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\hat{n}}{\rho_c}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n}$
  - $\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$
  - $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho_c}\hat{n}$

Cambios de bases coordenadas

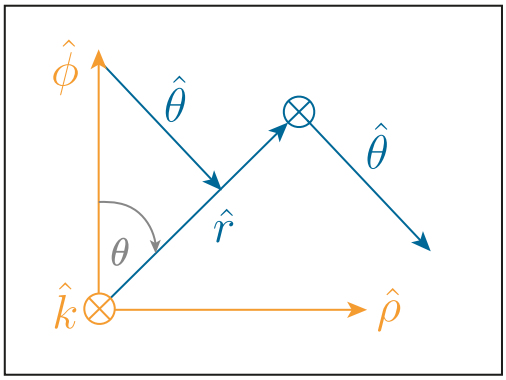
- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\hat{x} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}$
  - $\hat{y} = \sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}$
  - $\hat{z} = \hat{k}$

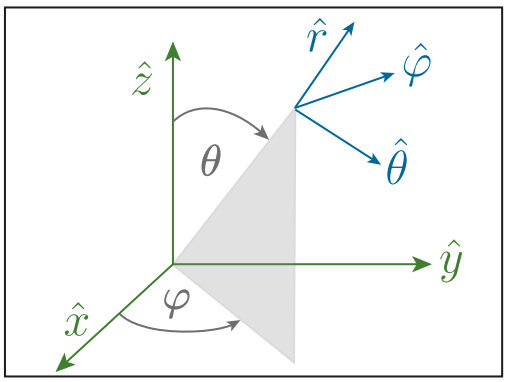
- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ a cartesianas$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$
  - $\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$
  - $\hat{k} = \hat{z}$



- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ a esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\hat{\rho} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}$
  - $\hat{\phi} = \hat{\varphi}$
  - $\hat{k} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$

- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ a cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$:
  - $\hat{r} = \sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{k}$
  - $\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{\rho} - \sin\theta\,\hat{k}$
  - $\hat{\varphi} = \hat{\phi}$



- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$:
  - $\hat{x} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}$
  - $\hat{y} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\varphi\,\hat{\varphi}$
  - $\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$

- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ a cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:
  - $\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$
  - $\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$
  - $\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$