

124] Queremos demostrar que:

$$\Delta x_f^{\min} = \left(\frac{2\hbar}{m} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{2H}{g} \right)^{1/4}$$



Consideremos que por cinemática:

$$x_f = (\cancel{x_i} + \Delta x_i) + (\cancel{v_{ix}} + \Delta v_{xi}) \cdot t$$

$$\underbrace{0 + \Delta x_f}_{\text{red circle}} = \Delta x_i + \Delta v_{xi} \cdot t$$

$$\Rightarrow \Delta x_f = \Delta x_i + \Delta v_{xi} \cdot t \dots (1)$$

hint del enunciado ↗

Por otro lado, por el principio de incertidumbre:

$$\Delta x_i \cdot \Delta p_{xi} \geq \frac{\hbar}{2}$$

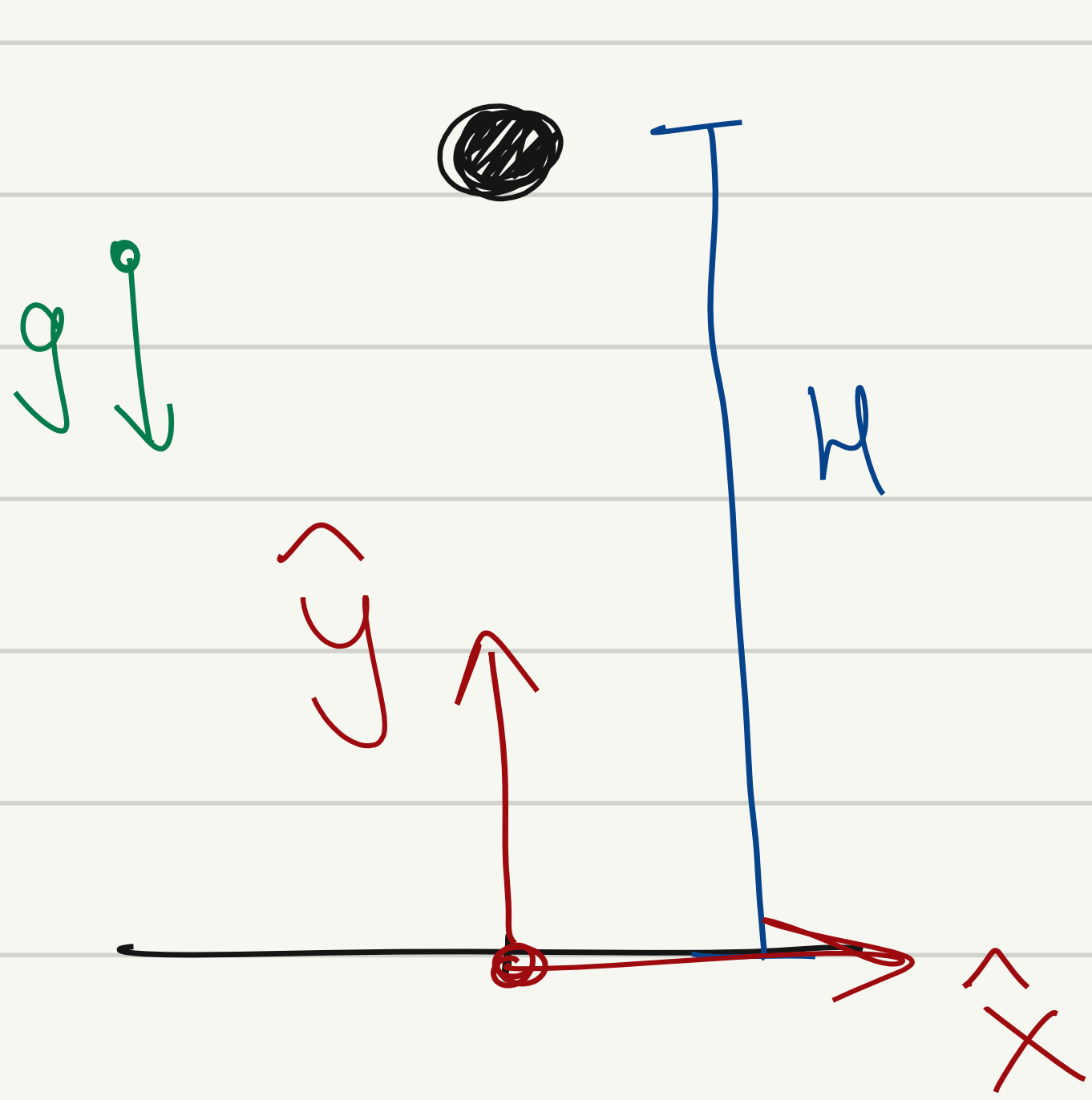
$$\Rightarrow \Delta x_i \cdot (m \cdot \Delta v_{xi}) \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta v_{xi} \geq \frac{\hbar}{2m \Delta x_i} \dots (2)$$

Reemplazando (2) en (1), obtenemos:

$$\Rightarrow \Delta x_f \geq \Delta x_i + \left(\frac{\hbar}{2m \Delta x_i} \right) \cdot t$$

Wego, t es el tiempo de vuelo de las píldoras. Por cinemática:



$$y_f(t) = y_i + v_{y_i} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$\begin{matrix} \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ 0 & H & 0 \end{matrix}$

$$\Rightarrow 0 = H - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$\swarrow$
 tiempo de vuelo

Ahora que tenemos t , solo falta conocer Δx_i para calcular Δx_f :

$$\Delta x_f \cong \Delta x_i + \left(\frac{h}{2m \Delta x_i} \right) \cdot t$$

$\Rightarrow \Delta x_f$ es una función de Δx_i !

1) El valor mínimo de Δx_f es con la igualdad.

$$\Rightarrow \Delta x_f^{\min} = \Delta x_i + \left(\frac{h}{2m \Delta x_i} \right) \dots (3)$$

2) Podemos escribir la ecuación anterior como:

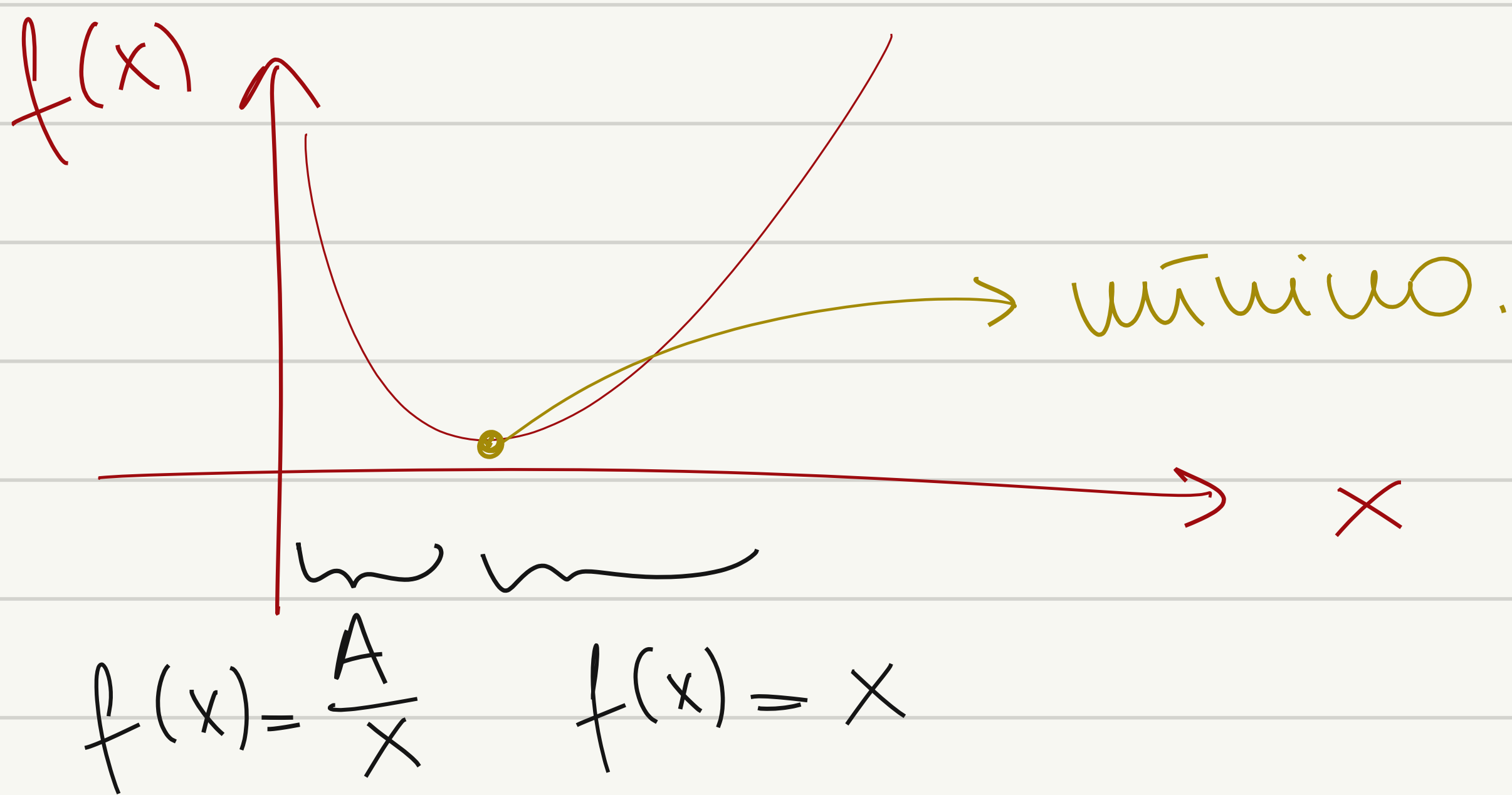
$$\rightarrow \underbrace{\Delta X_f^{\min}} = \underbrace{\Delta X_i}_x + \underbrace{\left(\frac{h \cdot t}{2m} \right) - \frac{1}{\Delta X_i}}_{\equiv A}$$

$$f(x) = x + A \cdot \frac{1}{x} \dots (*)$$

$\rightarrow$ Si queremos minimizar $f(x)$ en función de x , debe cumplirse.

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{df(x)}{dx}} \right\} \text{condición de mínimo.}$$

Obs: es un mínimo (y no un máximo) pues graficando $f(x)$:



Entonces, derivando (*) w.r.t a x e igualando a cero:

$$\frac{df(x)}{dx} = 1 - \frac{A}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \sqrt{A}$$

$$\Rightarrow x = \Delta x_i = \sqrt{A} = \left(\frac{t_h \cdot t}{2m} \right)^{1/2}$$

• Así, reemplazando Δx_i en (3) tenemos:

$$\Delta x_f^{\text{mín}} = \sqrt{A} + \frac{A}{\sqrt{A}} = 2\sqrt{A}$$

Reemplazando el valor de $A = \left(\frac{t_h \cdot t}{2m} \right)$

$$\Rightarrow \Delta x_f^{\text{mín}} = 2 \left(\frac{t_h}{2m} \right)^{1/2} \cdot t^{1/2}$$

... pero $t = \left(\frac{2H}{g} \right)^{1/2}$, por lo que finalmente:

$$\Rightarrow \Delta x_f^{\text{mín}} = \left(\frac{2t_h}{m} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{2H}{g} \right)^{1/4}$$

obs: en el enunciado el 2 estaba en el denominador, sorry! error de tipo 