P2. Otro tren más..

Un tren se mueve sobre una línea recta horizontal con velocidad constante $v_0\hat{i}$. En un instante, el maquinista lanza una maleta con velocidad $u_0\hat{j}$ verticalmente hacia arriba.

(a) De acuerdo al maquinista, ¿cuál es la trayectoria de la maleta?

(b) Para un observador en reposo a un costado del tren, ¿cuál es el desplazamiento de la maleta desde que es lanzada hasta que cae de nuevo sobre el tren?

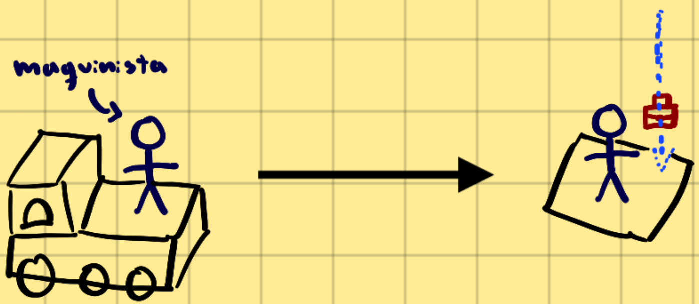
Si ahora la maleta es lanzada por el maquinista con una velocidad $u = -v_0\hat{i} + nv_0\hat{j}$ y cada vagón del tren tiene una longitud L.

(c) Bosqueje en el plano $x - y$ la trayectoria de la maleta registrada por un observador en reposo a un costado del tren.

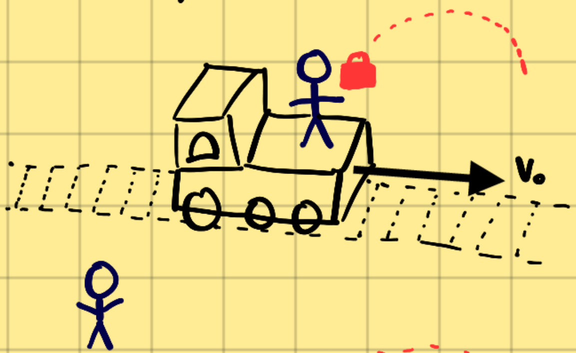
(d) Determine el valor mínimo de v_0 para que la maleta caiga sobre el vagón k-ésimo.

(a) Trayectoria de la maleta según el maquinista

Desde el punto de vista del maquinista (sobre el tren) la maleta solo va subir y bajar, solamente moviendose verticalmente



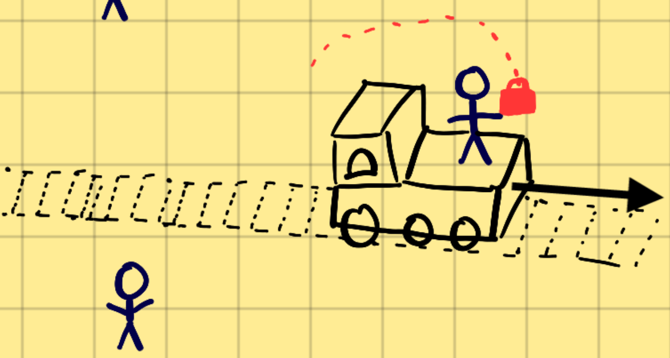
(b) Desde el punto de vista de un observador que se no se encuentra el tren, la maleta va a seguir una trayectoria parabolica. ¿Por qué?



Un lanzamiento parabolico tiene 2 movimientos:

↳ Movimiento horizontal

↳ Movimiento vertical



El movimiento vertical lo induce el maquinista al lanzar la maleta para arriba ✓

El movimiento horizontal es producto de que cuando el maquinista lanzó el maletín, el indivi-duo se estaba moviendo horizontalmente al estar parado sobre un tren que se desplaza.

Si el tren se mueve horizontalmente a 10 km/h $\longrightarrow$ el maquinista se mueve horizontalmente a 10 km/h

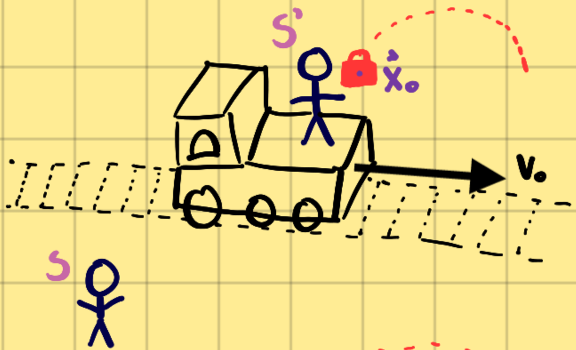
Por lo que cuando el maquinista lanzo la maleta para arriba, inconcientemente le agregó una velocidad horizontal a la maleta ✓

Ahora que entendemos la trayectoria de la maleta procedemos a calcular su desplazamiento

Cuál es el desplazamiento de un lanzamiento parabólico ?

es un vector

El desplazamiento $\vec{d}$ se define como la diferencia entre la posición final $\vec{x}_f$ y la posición inicial $\vec{x}_0$



Vamos a plantear 2 sistemas de referencia:

↳ S: puesto en el observador que está al costado

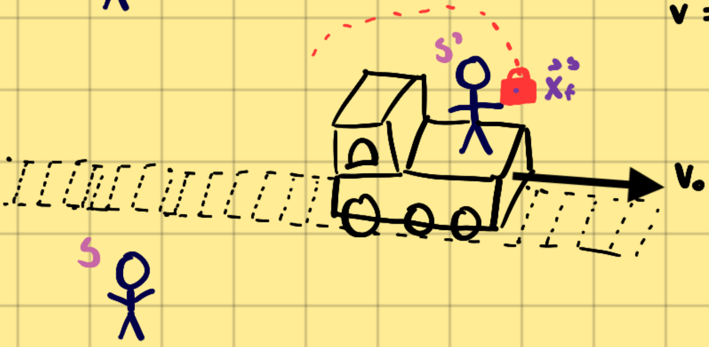
↳ S': puesto en el maquinista (sobre el tren)

Recordemos del colegio la definición de velocidad

$$\vec{v} = \frac{\vec{d}}{t} \longrightarrow \vec{d} = \vec{v} \cdot t_{vuelo}$$

lo que buscamos

tiempo que estuvo volando la maleta

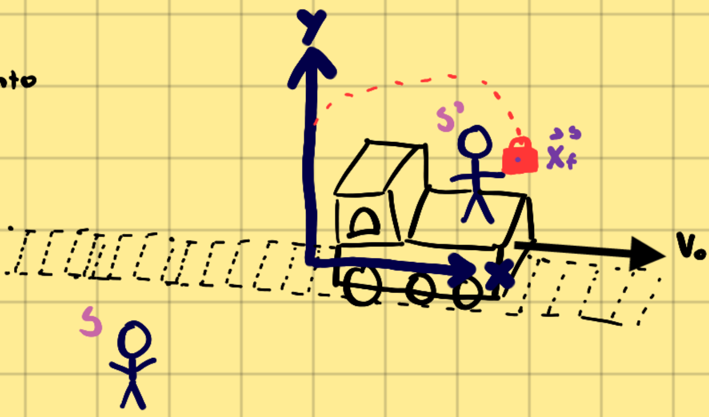


Como desde el sistema de referencia S' no se aprecia un desplazamiento (la posición inicial y final es la misma)

entonces el desplazamiento solo se aprecia desde el observador S

*Por lo que se explicó en (a)

Por último, es necesario notar que el desplazamiento es meramente horizontal (la altura de la maleta inicial es la misma que la final $\longrightarrow$ no hay un desplazamiento vertical)

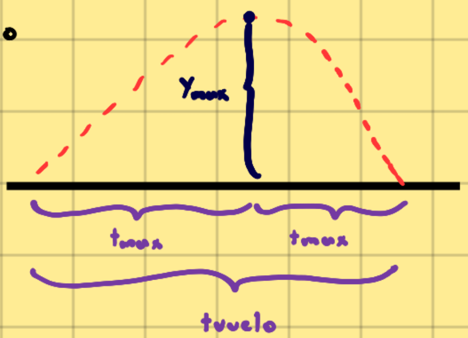


Por lo que en la expresión $\vec{d} = \vec{V} \cdot t_{vuelo}$ se ocupa la velocidad en el eje x (la velocidad del tren $V_0 \hat{x}$

$\longrightarrow$

$$\vec{d} = V_0 \hat{x} \cdot t_{vuelo}$$

Falta encontrar el tiempo de vuelo, para ello ocupamos la ecuación de itinerario en el eje y, y recordamos que el t_{vuelo} es el doble del tiempo que se demora en llegar al punto más alto



$$\boxed{t_{vuelo} = 2 \cdot t_{max}}$$

Planteamos la ecuación de itinerario para $V_y(t)$: $V_y(t) = V_{y0} - gt$

↳ V_{0y} es la velocidad inicial vertical otorgada por el maquinista (u)

$\rightarrow$ $0 = u - g t_{max}$

↳ La velocidad del maletín en el punto más alto es nula ($V_y(t_{max}) = 0$)

$\longrightarrow$ $t_{max} = \frac{u}{g}$

Dado que $t_{vuelo} = 2 \cdot t_{max}$

$\longrightarrow$

$$t_{vuelo} = \frac{2u}{g}$$

Recordando, buscábamos $\vec{d} = V_0 \hat{x} \cdot t_{vuelo}$

$\longrightarrow$

$$\boxed{\vec{d} = V_0 \frac{2u}{g} \hat{x}}$$ ✓

(c)

componente horizontal

Si ahora el maquinista lanza la maleta con velocidad $-V_0\hat{i} + nV_0\hat{j}$

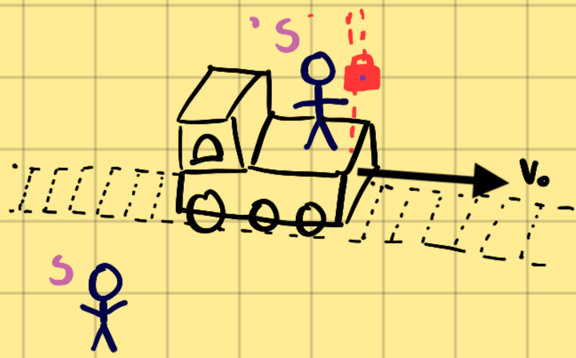
componente vertical

Recordando que como el maquinista está sobre un tren con velocidad $V_0\hat{i}$, entonces él también tiene esa misma velocidad $V_0\hat{i}$, y por consiguiente, cuando lanza el maletín con la nueva velocidad, un observador desde el punto S va a observar que el maletín tiene velocidad

$$V^{S}_{maletín} = V_{tren} + V^{S'}_{maletín}$$

$$\rightarrow \quad V^{S}_{maletín} = \cancel{V_0}\hat{i} + (-\cancel{V_0}\hat{i} + nV_0\hat{j})$$

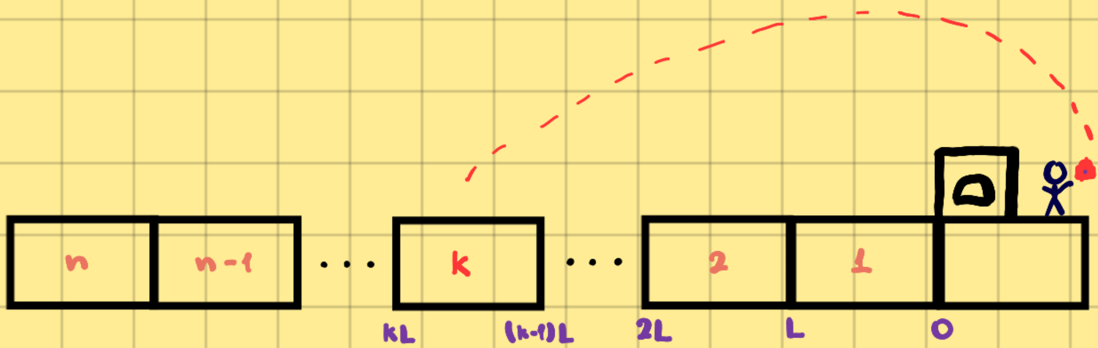
$$\rightarrow \quad \boxed{V^{S}_{maletín} = nV_0\hat{j}} \checkmark$$



→ El observador en S va a ver que la maleta sube y baja (no se desplaza horizontalmente)

(d)

Para encontrar la velocidad miníma es necesario saber cuanto se tiene que mover el tren para que la maleta caiga en el vagón k-ésimo (recordar que cada vagón mide L)



→ El tren se tiene que mover $d = (k-1)L$

Por definición de rapidez : $V_0 = \dfrac{d}{t_{vuelo}}$

Planteamos la ecuación de itinerario para $V_y(t)$: $V_y(t) = V_{y0} - gt$

↳ V_{0y} es la velocidad inicial vertical otorgada por el maquinista (nV_0)

$\rightarrow 0 = nV_0 - gt_{max}$

↳ La velocidad del maletín en el punto más alto es nula $(V_y(t_{max}) = 0)$

$\rightarrow t_{max} = \frac{nV_0}{g}$

Dado que $t_{vuelo} = 2 \cdot t_{max}$

$\rightarrow t_{vuelo} = \frac{2nV_0}{g}$

Volviendo a $V_0 = \frac{d}{t_{vuelo}}$

$\rightarrow V_0 = \frac{(k-1)L}{\left(\frac{2nV_0}{g}\right)} \rightarrow V_0^2 = \frac{(k-1)Lg}{2n}$

$\rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{(k-1)Lg}{2n}}}$ ✓