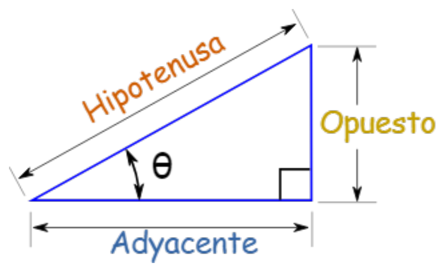
Auxiliar 1

Trigonometría

Profesor: Ignacio Bordeu
Auxiliares: Maximiliano Rojas, Fabián Corvalán, Simón Yáñez
Ayudante: Josefina Livesey

1. Resumen

Para el siguiente triángulo:



Se pueden definir sus funciones trigonométricas como:

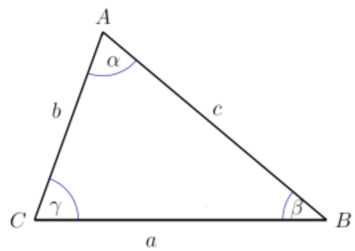
$$\cos(\theta) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$
$$\sin(\theta) = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$
$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

- ¿Opuesto y Adyacente a que? *al vértice en que se define el ángulo θ mostrado en la figura.*

- ¿Para que sirven estas funciones trigonométricas? *para calcular ángulos y distancias en los problemas de física que se van a tratar en el curso.*

- ¿Estas funciones solo se aplican para triángulos rectángulos? *son admitidas por cualquier tipo de triángulo.*

Existen dos teoremas, que se cumplen para cualquier triángulo, muy importantes que se van a utilizar a lo largo de toda la carrera.



- **Teorema del Seno:**

$$\frac{sin(\alpha)}{a} = \frac{sin(\beta)}{b} = \frac{sin(\gamma)}{c}$$

- **Teorema del Coseno:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos(\gamma)$$

Las siguientes identidades trigonométricas son las más usadas resolviendo problemas generalmente:

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

P1. **Altura de un edificio**

Estamos en el punto A, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio y se obtiene $\alpha = 42°$, nos alejamos del edificio $D = 40m$ y volvemos a medir el ángulo obteniendo $\beta = 35°$. ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?

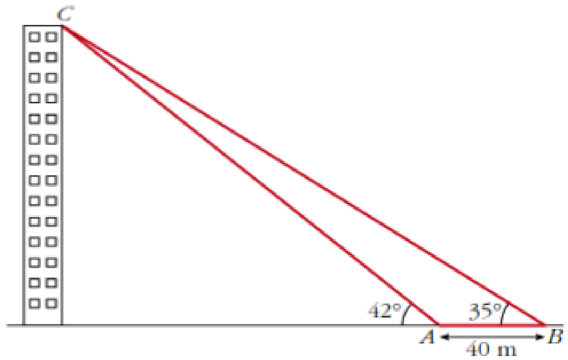


Figura 1: Edificio

P2. **Altura de una antena y un poste**

Un poste y una antena se encuentran a una distancia a en un camino horizontal. Desde el pie del poste se mide el ángulo de elevación de la antena y desde el pie de la antena, el del poste, encontrándose que el primer ángulo es el doble del segundo. Si un observador se ubica en el punto medio M del trazo que une las bases de la antena y del poste, observa que los ángulos de elevación medidos desde M al poste y a la antena son complementarios. Calcular las alturas de la antena y del poste.

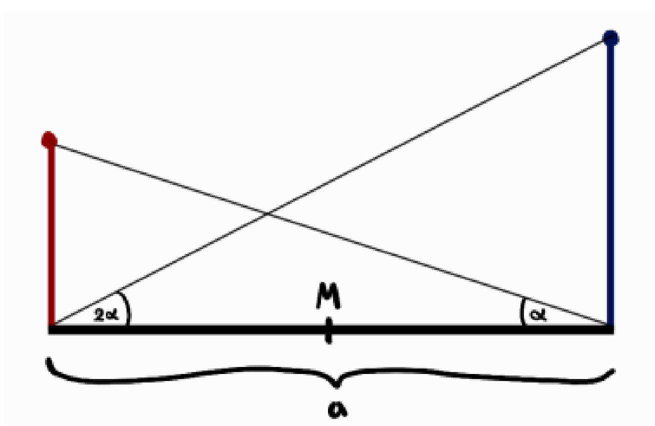


Figura 2: Antena y poste

P3. Circunferencia y triángulos

Considere la siguiente circunferencia y los triángulos que se muestran en la figura:

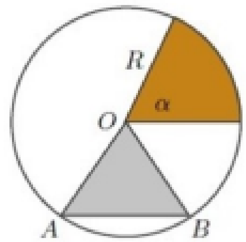


Figura 3: Circunferencia y triángulos

(a) Calcule el área del triángulo ABO en función del ángulo $\angle AOB$ y el radio R de la circunferencia. Grafique el área de este triángulo en función de $\angle AOB$. Por ejemplo, calcule el área para $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi$

(b) Encuentre el valor del ángulo central del triángulo isósceles $\angle OAB$, cuyo vértice es el centro de la circunferencia y que tiene la misma área que el sector circular cuyo ángulo central es α. Note que esto no es posible para valores arbitrarios del ángulo α. Para darse cuenta de ello basta pensar el caso $\alpha = \pi$.

(c) Determine el máximo valor de α (en radianes) para el cual el triángulo isósceles descrito existe.

P4. Teoremas seno y coseno

Un ratón se encuentra en un cerro cuya inclinación es γ. Desde cierta posición, el ratón avista, con un ángulo de elevación α respecto al piso, un queso que se encuentra en la punta de un poste vertical ubicado en la cima del cerro. Luego, el ratón avanza una distancia d en dirección al poste. En este lugar, avista el queso con un ángulo de elevación β. Queremos encontrar la altura h del poste.

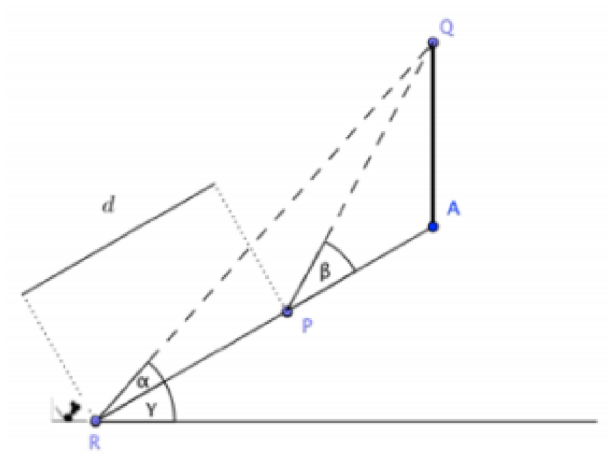


Figura 4: Ratón

P5. Demostración con teoremas

Sea ABC un triángulo de lados a, b, c y ángulos α, β y γ respectivamente. Demostrar que:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} + \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)}\right)$$

Indicación: Use Teorema del Seno y Teorema del Coseno apropiadamente

P6. Identidades trigonométricas

Demuestre las siguientes identidades trigonométricas:

(a)

$$sin(\alpha) = \frac{tan(\alpha)}{\sqrt{1 + tan^2(\alpha)}}$$

(b)

$$sin(\alpha) + sin(\beta) = 2sin(\frac{\alpha+\beta}{2})cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

(c)

$$sin(\alpha)cos(\beta) = \frac{1}{2}(sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta))$$

(d)

$$\frac{1 + cos(\alpha)}{sen(\alpha)} + \frac{sen(\alpha)}{1 + cos(\alpha)} = 2csc(\alpha)$$

(e)

$$\frac{tan(\alpha) - cot(\alpha)}{tan(\alpha) + cot(\alpha)} = 1 - 2cos^2(\alpha)$$