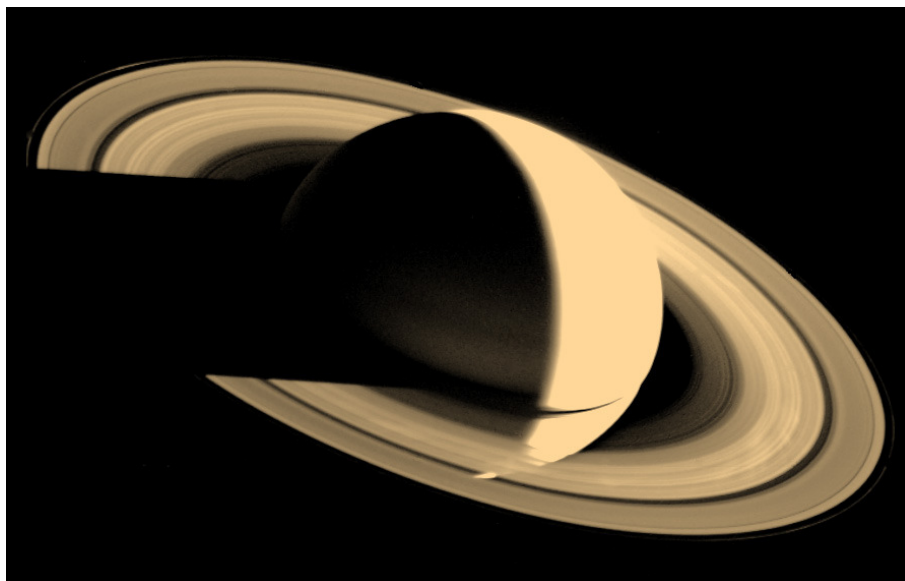


Introducción a la Física Newtoniana



Hugo F. Arellano
Departamento de Física - FCFM
Universidad de Chile

Impreso el 12 de junio de 2017

Índice de materias

1. Introducción	11
1.1. Números, aritmética y estimaciones	12
1.2. Geometría	16
1.3. Elementos de trigonometría	29
1.4. Problemas propuestos	36
2. Cinemática elemental	41
2.1. Movimientos rectilíneos y circunferenciales	41
2.1.1. Definiciones	42
2.1.2. Interpretación de áreas	47
2.1.3. Movimientos con velocidad constante	49
2.1.4. Movimientos con aceleración constante	50
2.1.5. Movimiento circunferencial	52
2.1.6. Caída vertical por gravedad	55
2.1.7. Projectiles en 3D	60
3. Cinemática vectorial	67
3.1. Vectores	67
3.1.1. Operaciones elementales	68
3.1.2. Propiedades vectoriales	71

3.1.3.	Vector posición y desplazamiento	71
3.1.4.	Representación cartesiana de un vector	73
3.1.5.	El producto punto entre dos vectores	75
3.1.6.	Desplazamientos y velocidad media en cartesianas	78
3.1.7.	Tres ejemplos ilustrativos sobre vectores	79
3.2.	Movimiento relativo	80
3.2.1.	Un ejemplo ilustrativo	81
3.3.	Velocidad y aceleración en forma vectorial	84
3.3.1.	Movimiento rectilíneo	86
3.3.2.	Movimiento circunferencial	87
3.3.3.	Virajes con cambio de rapidez	91
3.3.4.	El caso general	93
4.	Leyes de Newton	95
4.1.	Nociones básicas	95
4.1.1.	El principio de relatividad	96
4.1.2.	Masas	97
4.1.3.	Momentum	98
4.1.4.	Interacciones	99
4.2.	Las Tres Leyes de Newton	101
4.2.1.	El principio de superposición	103
4.2.2.	Dimensiones y unidades	103
4.2.3.	Las fuerzas más elementales	104
4.2.4.	Fuerzas de contacto	104
4.2.5.	Cuerdas y tensiones	105
4.3.	Aplicaciones	106

4.3.1.	Sensación de peso en un ascensor	106
4.3.2.	Resbalamiento sobre plano inclinado	108
4.3.3.	Posición de un anillo pasada por un aro que rota	112
4.3.4.	Objetos puntuales	113
4.3.5.	Problemas distintos pero muy similares	114
4.4.	Fenomenología de la fuerza de roce	115
4.4.1.	Caso estático	117
4.4.2.	Caso con resbalamiento	118
4.4.3.	Ejemplos ilustrativos	119
4.5.	Fuerzas elásticas y el resorte	123
4.5.1.	Representación cartesiana de una fuerza elástica	125
4.5.2.	Algunos ejemplos	126
4.5.3.	Combinación de resortes	129
4.6.	Aplicaciones más completas	130
4.7.	La Ley de Gravitación Universal	135
4.7.1.	Las Leyes de Kepler	135
4.7.2.	La conjetura de Newton	138
4.7.3.	Los Teoremas de Newton	141
4.7.4.	La aceleración de gravedad g	144
5.	Trabajo y energía	151
5.0.5.	La energía cinética y trabajo mecánico	152
5.0.6.	Aplicaciones	155
5.0.7.	La energía potencial gravitacional	158
5.0.8.	Trabajo de una fuerza que es función de la posición	161
5.0.9.	Trabajo de la fuerza de un resorte y su energía potencial	163

5.0.10. Fuerzas conservativas	166
5.0.11. Trabajo debido a un campo gravitacional	168
5.0.12. Energía potencial gravitacional	171
5.0.13. La rapidez de escape	172
5.0.14. La energía potencial en proximidades a la superficie terrestre . .	173
5.0.15. Potencia	174
6. Sistemas binarios y leyes de conservación	179
6.1. Colisiones elásticas	183
6.1.1. Clasificación de colisiones	185
6.2. Choques y tirones son la misma idea	187
6.3. Impulso	190
6.3.1. Rebotes de objetos duros y blandos	192
A. Addenda	195
A.1. Partes del círculo (terminología)	195
A.2. Aproximación práctica	195
A.3. La ecuación cuadrática	196
A.4. Aproximación cuadrática de una circunferencia	197
A.5. Variación de funciones	198
A.6. Cálculo de raíces por Newton	201
A.7. Identidades trigonométricas	203

Prólogo

Este escrito es un resumen de parte del material que tradicionalmente he presentado en la asignatura *Introducción a la Física Newtoniana*, dirigida a estudiantes que cursan su primer semestre en la Escuela de Ingeniería y Ciencias de la FCFM¹ de la Universidad de Chile. Este consiste en un curso semestral de quince semanas lectivas, donde nos reunimos dos veces a la semana en sesiones de noventa minutos.

Si bien parte importante de este material ya estaba escrito en el año 2010, sólo en los últimos años he logrado darle una forma relativamente estructurada. Sin embargo, al poco rato de revisarlo constato innumerables detalles que requieren de corrección, temas que reubicaría, fusionaría, frasearía de distinta forma, agregaría (uso de computador), etc. Ciertamente no es la versión definitiva, pero espero que en este intertanto su contenido sirva de apoyo al estudiante en su estudio personal de lo visto en cátedra.

Las temáticas a estudiar se restringen a la Física Newtoniana, centradas en sistemas de uno o pocos cuerpos. Por física newtoniana entendemos aquella que postula a que una partícula es totalmente ubicable en el espacio y en el tiempo. En otras palabras, la trayectoria de una partícula es una propiedad medible con precisión ilimitada. En este contexto, la teoría de Newton nos provee de herramientas para calcularla. La idea es presentar y conceptualizar los fundamentos de la física en contextos simples, buscando un buen dominio de ellos. En una asignatura de segundo semestre, *Sistemas Newtonianos*, se amplía el dominio de aplicación de estas ideas a sistemas más complejos constituidos por sistemas de partículas, vale decir de muchos cuerpos o sistemas extendidos. Para ese entonces los estudiantes contarán con herramientas matemáticas un tanto más avanzadas para abordar situaciones más complejas.

Este texto ha sido organizado de la siguiente manera: En el Cap. 1 se revisan aspectos básicos de geometría, aritmética y trigonometría. Si bien este material pudiera ser ya conocido por los estudiantes, su dominio como herramienta de trabajo en los capítulos posteriores es imprescindible. Por lo mismo su aplicación busca estimular algún grado de desafío poco común en su enseñanza tradicional, además de exponer al estudiante al

¹Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

análisis e interpretación de un resultado. En el Cap. 2 se focaliza al estudio del movimiento de los cuerpos, *cinemática*, abarcando movimientos rectilíneos, circunferenciales y parabólicos, prescindiendo de herramientas vectoriales. En el Cap. 3 se introduce la noción de vector, presentan propiedades y operaciones, y se aplica a la descripción del movimiento. En este capítulo también se estudia movimiento relativo a la Galileo. El Cap. 4 se destina a la descripción de cambios en el movimiento a partir de sus causas: fuerzas e interacciones. Se presentan las Leyes de Newton y estudian situaciones bastante diversas, incluyendo la *Ley de Gravitación Universal*. El Cap. 5 está destinado al estudio de trabajo y energía mecánica, conceptos que adquieren creciente importancia en la caracterización de un sistema físico, condicionando fuertemente las variables participantes. El Cap. 6 está destinado al estudio de colisiones en sistemas binarios.

Si bien este curso no contempla conocimiento previo de cálculo diferencial, durante su desarrollo se irán presentando algunas ideas en esa línea. Estas tienen un tremendo potencial en la construcción de descripciones cuantitativas. El desarrollo del cálculo diferencial por Newton (un físico) y Leibnitz (un matemático) constituyó un hito de suma trascendencia en curso de nuestra civilización. Su aprendizaje a partir de rudimentos es una buena vía para conceptualizarlos y aplicarlos. Algo de estas herramientas se incluyen en algunos de los Apéndices, los que serán discutidos en clases en la medida que el contexto extienda la invitación.

Hugo F Arellano
Santiago, junio de 2016

Créditos

Como toda aparición en este cosmos... ¡nada surge de la nada!. Las divagaciones en geometría de la primera parte de estos escritos se motivaron fuertemente de mi participación como docente en la *Escuela de Verano de Física*, dirigida por el Prof. Nelson Zamorano. De su material de trabajo me he permitido tomar algunos ejemplos que considero muy valiosos y didácticos. Por supuesto la interacción con colegas de la Facultad, inventando problemas y desafiándonos de alguna manera, también contribuye a afinar el gusto por lo valioso, agudo, estético o instructivo. En esa línea menciono a Romualdo Tabensky, a quien nunca le ha faltado ingenio para jugar con las ideas y sorprendernos.

El descubrimiento de los anillos de Saturno se le atribuye indudablemente a Galileo Galilei. Este descubrimiento fué uno de los resultados más impresionantes luego de su invención del telescopio. En la portada de este escrito se muestra una de las imágenes más bellas de Saturno, tomada por la sonda espacial *Voyager 1* de la NASA en el año 1980.

Capítulo 1

Introducción

Un legado de alcance inimaginable de la cultura griega, aquella que surge unos seis siglos antes de Cristo, lo constituyó ese afán de buscar una visión unificada del universo a partir de números y geometría. Por ejemplo, Pitágoras de Samos (570 – 495 a. C.) buscó describir todos los aspectos del universo a partir de números naturales, los que frecuentemente eran representados por figuras geométricas. O Platón (428 – 347 a. C.), quien se vuelca a la geometría, postulando cinco poliedros regulares para explicar todos los patrones del cosmos. Estos denominados *sólidos platónicos*, ilustrados en la Fig. 1.1, corresponden al *Tetraedro*, con cuatro caras triangulares; *Hexaedro*, con seis cara cuadradas; *Octaedro*, con ocho caras triangulares; *Dodecaedro*, con doce caras pentagonales; e *Icosaedro*, con veinte caras triangulares. Más tarde Aristóteles (384 –

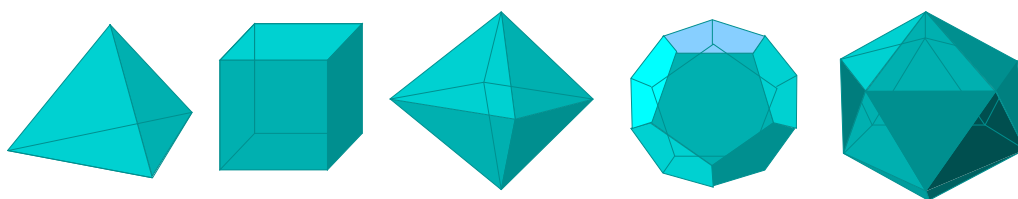


Figura 1.1: Los cinco sólidos platónicos, intuitivamente asociados con el fuego, la tierra, el aire, el éter, y el agua, respectivamente.

322 a. C.), discípulo de Platón, desarrolla reglas para el razonamiento lógico. Bajo este esquema Euclides (325 – 265 a. C.) profundiza en las ideas geométricas de Platón, dándoles una estructura lógica rigurosa que actualmente conocemos como *Los Elementos de Euclides*. Estos principios geométricos siguen vigentes, a más de veintitres siglos de que fueran creados.

Luego de la caída del Imperio Romano, el que había logrado un dominio casi total de Grecia, fué en los monasterios cristianos ortodoxos de Europa del Este donde parte

importante del conocimiento griego hibernó por siglos, durante el Imperio Bizantino. Con la caída de Constantinopla ante los otomanos, hacia el año 1453, muchos intelectuales bizantinos emigraron a Italia, nutriendo fuertemente el desarrollo del *Renacimiento* a comienzos del siglo XV. Fué entonces cuando emerge con mucha vehemencia la búsqueda de respuestas racionales a los fenómenos que nos rodean. En esa línea el pensamiento griego constituyó un referente importante, tanto en sus virtudes como defectos.

Con el creciente protagonismo del razonamiento lógico para la comprensión de los fenómenos naturales, nuestra evolución como civilización ha sido marcada por hitos científicos que han sorprendido nuestro intelecto. En esta evolución, nociones y conceptos aparentemente bien definidos según nuestra intuición, han sufrido cambios profundos luego de reinterpretaciones introducidas por figuras tales como Galileo Galilei, Isaac Newton, James C. Maxwell, Ludwig Boltzmann, Albert Einstein, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli, Paul M. Dirac, Richard Feynman y John S. Bell, sólo por nombrar algunas. Este curso es una invitación a revisar los albores de este trayecto. Comencemos revisando algunos rudimentos.

1.1. Números, aritmética y estimaciones

Nuestro entorno físico nos invita a innumerables conjeturas y preguntas acerca de cantidades, traducidas a números, que permitan establecer comparaciones. Esta es una práctica que todos adquirimos desde temprana edad, nuestra niñez, cuando juzgábamos “al ojo” lo qué era más grande, lo qué estaba más lejos, lo que involucraba mayor esfuerzo, etc. Un manejo más refinado de los números y sus operaciones aritméticas nos puede resultar muy útil para sostener o descartar tempranamente una afirmación. Una estimación numérica permite dar cuenta de cantidades aproximadas que surgen de supuestos que permitan obviar detalles. Es un cálculo grueso. Su ventaja es que tal cálculo puede requerir de unos pocos minutos, sin necesidad de una calculadora.

Comencemos con una estimación típica: ¿Cuántos cabellos tiene una persona? En este caso no buscamos un número exacto pues sabemos que dependerá de persona en persona: será un número aproximado. Pero si podemos afirmar con bastante seguridad que no pueden ser menos que 100 ni más que un millón de cabellos. Entonces, ¿cuál es un número razonable N , entre medio de estas dos cifras, que de cuenta aproximada del número de cabellos en una persona?

Para estimarlo podríamos afirmar que en una superficie de 1 mm^2 de cuero cabelludo hay alrededor de 1 pelo (¡constatelo!). Lo que necesitamos ahora es una estimación de la superficie de cuero cabelludo. Para ello podemos suponer que la cabeza es esférica, y que el cuero cabelludo cubre una semi-esfera de radio R , aproximadamente igual a 10

cm, o sea 100 mm. El área de esta semiesfera resulta

$$\frac{4\pi R^2}{2} \approx 6 \times 100^2 = 6 \times 10^4 \text{ mm}^2.$$

Con ello $N \approx 60,000$ cabellos. Esta estimación se puede refinar examinando más acuciosamente el radio medio de la cabeza y la densidad de cabellos en la cabeza. Además, se utilizó $\pi \approx 3$. El error que tal aproximación acarrea es menor que el supuesto esférico de la forma de la cabeza.

He aquí otra pregunta: ¿Cuanto tardaría un ser humano en contar verbalmente desde 1 a un billón?¹ Aquí partamos suponiendo que una persona tarda alrededor de un segundo en contar un número (esto no es efectivo pues cronometre el tiempo en verbalizar el número 1.349.923.221). En cualquier caso, el resultado lo podemos corregir multiplicando por un coeficiente adicional. Indaguemos entonces cuantos segundos hay en un día, para lo cual multiplicamos 3600 segundos (1 hora) por 24:

$$3600 \times 24 \approx 3600 \times 100/4 = 900 \times 100 \approx 10^5.$$

Esto es, cien mil números por día. Observar que la aritmética no es exacta, lo cual para nuestro propósito es totalmente válido. Con este resultado, en un año contamos a lo sumo $3,7 \times 10^7$ números. Entonces, el número de años que se requieren para contar 1 billón es

$$\frac{10^{12}}{3,7 \times 10^7} \approx \frac{10^5}{4} = 2,5 \times 10^4.$$

Se requieren 25.000 años. Si corregimos el tiempo en contar un número a unos 5 segundos, el tiempo resultante es cercano a 125.000 años. Esto es, ¡sin comer ni dormir mientras se cuenta!

Consideremos esta vez la distancia entre la Tierra y la Luna. Se sabe que un haz de luz tarda en ir y volver aproximadamente 2,5 segundos. De hecho la separación S entre la Luna y la Tierra es de 384.000 km, cerca de 4×10^8 m. Ahora tomemos una hoja de papel, la partimos por la mitad con un cuchillo y juntamos dos de sus caras, duplicando el espesor. Repetimos la operación, duplicando nuevamente el grosor. Entonces, ¿cuantas operaciones se requieren para que el grosor resultante cubra la distancia entre la Luna y la Tierra?. Para esto necesitamos saber (estimar) el grosor de una hoja de papel. Podemos suponer que 10 hojas juntas cubren 1 mm, de modo que el espesor d de cada hoja es 0,1 mm, o bien 10^{-4} m. Luego de n duplicaciones el grosor S del papel es $d \times 2^n$, de modo que planteamos

$$S = d 2^n \quad \Rightarrow \quad 2^n = \frac{S}{d} = 4 \times 10^{12}.$$

¹En Latinoamérica y Europa, 1 billón = 1 millón de millones (10^{12}). En EEUU, 1 billón se entiende como mil millones.

En esta ecuación buscamos n , para lo cual nuevamente procedemos en forma aproximada, sin calculadora.² Observar que

$$2^4 = 16, \quad 2^6 = 64, \quad 2^{10} = 1024 \approx 10^3.$$

Entonces, $10^{12} = 1000^4 \approx (2^{10})^4 = 2^{40}$. Por lo tanto,

$$2^n = 2^{42},$$

con lo cual identificamos $n = 42$, el número de cortes. Lo impresionante de este resultado es que no son muchas las operaciones de corte para cubrir una gran distancia. A partir de este resultado se propone estimar el ‘ancho’ de las hojas cortadas. Esto nos permitirá dilucidar si es factible lo planteado. Si el ancho resulta menor que el tamaño típico de un átomo ($\sim 10^{-10}$ m), lo planteado es físicamente inviable pues implicaría romper los átomos.

Por último consideremos la siguiente pregunta: ¿Cuántas moléculas de agua de Platón, en su último día de vida, tenemos en nuestro cuerpo? Para ello debemos darnos algunas hipótesis de trabajo. Primero, que el número de moléculas de agua es invariable en el tiempo. En rigor esto no es efectivo, pero es una suposición inicial razonable. Luego de la muerte de Platón, el agua de su cuerpo se difunde en todo el orbe. Es un proceso lento pero totalmente factible. La cantidad de agua de Platón la podemos estimar en unos 100 litros, es decir $0,1 \text{ m}^3$. Ello partiendo de la base que un adulto tiene una masa del orden de 100 kg, siendo ésta mayoritariamente agua. Entonces, ¿qué fracción representa esa cantidad con respecto al agua en todo el orbe?. Para responderlo necesitamos información de la cantidad de agua en la Tierra: $2/3$ del planeta es cubierto por mares y la profundidad media P de los mares es 4 km. Denotemos por R el radio de la Tierra. Entonces el volumen V de agua en la Tierra queda dado por

$$V = \frac{2}{3} \times 4\pi R^2 \times P.$$

Considerando el radio de la Tierra igual a 6400 km obtenemos $V \approx 1,3 \times 10^{18} \text{ m}^3$. Entonces la fracción n de agua de Platon en el orbe es $n \approx 10^{-19}$. Bastante pequeña, pero veamos a cuantas moléculas se traduce. Sabemos que aproximadamente 18 gramos de agua conllevan 6×10^{23} moléculas, por lo que en 100 kg hay 3×10^{27} moléculas. Multiplicamos por la fracción n de moléculas de Platón y obtenemos $N_P \approx 3 \times 10^8$: ¡Casi trescientos millones! Aun si la estimación de moléculas estuviese sobredimensionada en un factor diez, seguimos teniendo varios millones de moléculas de agua del cuerpo de Platón en su último día de vida.

²Una solución exacta conduce a $n = \log(4 \times 10^{12})/\log(2) = 41,9 \approx 42$.

Aproximación práctica de x^p

Hemos visto que no siempre es necesario un cálculo aritmético preciso. Hay una infinidad de situaciones en las que una estimación numérica razonable es suficiente para dimensionar adecuadamente alguna cantidad. En esa línea la aproximación

$$(1 + \varepsilon)^p \approx 1 + p\varepsilon ,$$

puede resultar extremadamente útil. Esta es una *receta* que surge de una aproximación de la función $f(x) = x^p$, asimilándola a una línea recta con pendiente p para valores de x cercanos a la unidad, es decir, $x \approx 1$. Esto es ilustrado en la Fig. 1.2, para las potencias $p = -2, -1, 1/3, 1/2, 2$ y 3 , respectivamente.

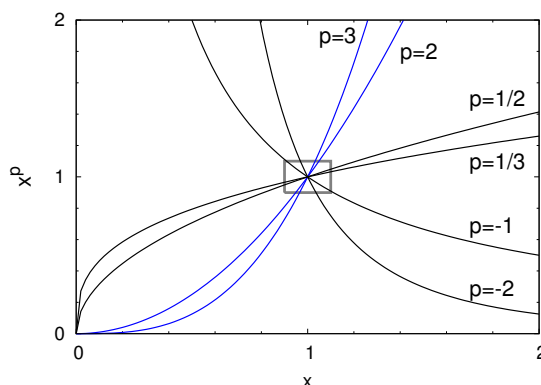


Figura 1.2: Dentro del recuadro, la función $y = x^p$ se comporta casi como un segmento rectilíneo.

Esta aproximación es adecuada para cualquier potencia p finita, mientras la magnitud de ε sea *considerablemente* menor que la unidad: $|\varepsilon| \ll 1$. Los tres casos siguientes corresponden a $p = 2, 1/2$, y -1 , respectivamente.

$$(1 + \varepsilon)^2 \approx 1 + 2\varepsilon; \quad \sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon; \quad \frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon .$$

A modo de ejemplo, estimemos $\sqrt{0,9}$:

$$\sqrt{0,9} = \sqrt{1 - 0,1} = (1 - 0,1)^{1/2} \approx 1 - 0,5 \times 0,1 = 0,95 .$$

En el desarrollo anterior tomamos $\varepsilon = 0,1$, claramente menor que 1. A fin de verificar cuan acertada es esta aproximación verificamos con el resultado que obtenemos mediante el uso de una calculadora: $\sqrt{0,9} = 0,9486$. Vemos que el error en este caso es menor que el 0,2%, lo que es bastante impresionante.

Podemos complementar la aproximación anterior con con las siguientes observaciones: $\pi \approx 22/7$ (válida al 0.04 %) y $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ (válida al 2 %). A modo de ilustración calculemos $\sqrt{3}$. Observe atentamente la siguiente secuencia y trate de dilucidar la intención de cada paso...

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \frac{\sqrt{9 \times 3}}{3} = \frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{\sqrt{25 + 2}}{3} = \frac{5(1 + 2/25)^{1/2}}{3} \\ &\approx \frac{5}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2}{25}\right) = \frac{5 \times 52}{3 \times 50} = \frac{26}{15} \approx 1,73.\end{aligned}$$

El resultado por calculadora arroja $\sqrt{3} = 1,73205$, de modo que la aproximación es correcta al 0.1 %. Las operaciones mostradas en este ejemplo se pueden agilizar con la práctica.

1.2. Geometría

Revisemos algunos elementos básicos de geometría, muchos de los cuales les son ya familiares. El sentido de esto es más bien convenir un lenguaje, además de resaltar algunas herramientas o ideas que serán útiles más adelante. No buscamos rigor matemático sino más bien formas de hilvanar ideas en forma racional y que permitan agilizar conjeturas.

Puntos y rectas

Comencemos con la noción de un punto, definiéndolo como un ente inmaterial de tamaño nulo posicionado en el espacio. Esta es una idea bastante abstracta pero también muy instrumental, que nos será útil para caracterizar posiciones en el espacio. Dados dos puntos en el espacio podemos imaginar innumerables trayectorias que los unen. Cada una de ellas es en sí una colección infinita y continua de puntos. De todas ellas existe una curva particular, la de menor longitud, que denominaremos *segmento*. Como es posible imaginar, tal colección de puntos corresponde a lo que intuitivamente denominamos una recta. Así entonces, un segmento queda completamente determinados por sus puntos extremos y lleva asociado una longitud.

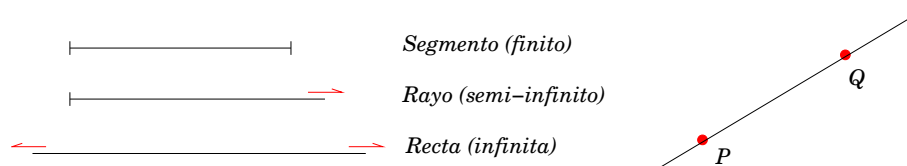


Figura 1.3: Un segmento, un rayo y una recta, todos ellos completamente determinados por dos puntos de soporte.

Un rayo consiste en una prolongación del segmento, donde el segmento es replicado indefinidamente desde uno de sus extremos cuidando de no cambiar la dirección. Así entonces, la longitud de un rayo es infinita. En el caso de una recta, el segmento original es replicado en ambos sentidos. La recta entonces queda completamente determinada por los dos puntos que la soportan. Su longitud es también infinita.

Ángulos

Si contamos con dos rayos (o segmentos) que tengan en común uno de sus extremos (vértice), entonces podemos definir un plano. Al tener sus extremos comunes los segmentos se interceptan, por lo que construiremos una forma de cuantificar el grado de *oblicuidad* entre los segmentos. Tal cuantificación se hace mediante el *ángulo*.

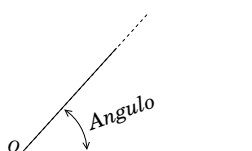


Figura 1.4: Dos segmentos oblicuos con vértice común.

Convenimos en que si dos rayos con vértice común se alínean en sentidos opuestos, conformando una recta, entonces el ángulo entre ellos es 180° (ángulo extendido).

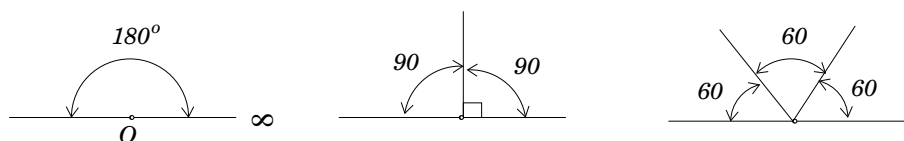


Figura 1.5: El ángulo extendido (180°), recto (90°) y de 60° .

Al incluir un tercer rayo coplanar y con vértice común, cuya oblicuidad sea la misma a ambos rayos originales, entonces el ángulo entre ellos es la mitad de 180° , vale decir 90° .

(ángulo recto). Esta idea nos lleva a darles el carácter de sumables a los ángulos. Así, al subdividir un ángulo extendido en tres partes iguales, el ángulo de cada parte es 60° .

Al contar con una medida de la oblicuidad entre rectas, rayos y segmentos, podemos explorar algunas propiedades universales entre rectas. Por ejemplo, consideremos dos rectas coplanares que se cruzan en un punto común que llamamos vértice. Desde el punto del cruce emergen cuatro rayos, por lo que también identificamos cuatro ángulos, uno para cada par de rayos contiguos: α , β , γ y δ .

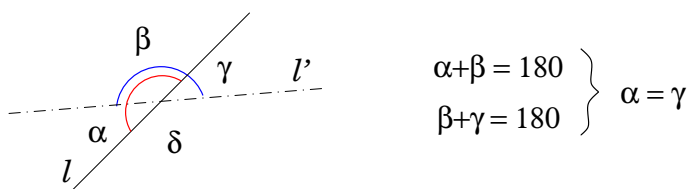


Figura 1.6: Cuando dos rectas se cruzan, sus ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Para la recta ℓ , de la cual emerge un rayo, los ángulos α y β suman 180° . De igual forma para la recta ℓ' los ángulos β y γ suman 180° . Todos los rayos son coplanares, de modo que

$$\alpha + \beta = 180^\circ \quad \beta + \gamma = 180^\circ \quad \Rightarrow \alpha = \gamma.$$

En otras palabras, los ángulos opuestos por el vértice de dos rectas que se cruzan son iguales.

Este es un resultado muy conocido. Sin embargo es importante notar que ha sido *deducido* a partir de premisas verdaderas, valiéndonos de pasos algebraicos también verdaderos. Gran parte de los desarrollos que abordaremos más adelante se basan en premisas que son verdaderas. A la inversa, si el resultado hubiese sido un *sinsentido*, entonces alguna de las premisas utilizadas es falsa. Este esquema es parte de un sistema lógico-racional con que contamos para establecer el alcance de nuestras conjeturas.

Ángulos internos

Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se cruzan. Al trazar una tercera recta oblicua y coplanar a las anteriores entonces los ángulos correspondientes son iguales.

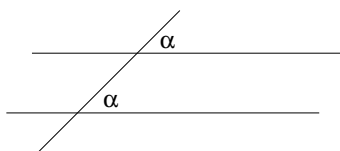


Figura 1.7: Ángulos correspondientes en rectas paralelas interceptadas por una oblicua.

Esta propiedad nos permite demostrar que los ángulos internos de cualquier triángulo suman 180° . En efecto, consideremos el triángulo ABC de la Fig. 1.8. Trazamos una recta que pase por los vértices A y C. En el vértice B trazamos una recta paralela al trazo AC. Los ángulos α y γ son correspondientes; los ángulos β quedan determinados pues son opuestos por el vértice B. Claramente $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ pues la recta se entiende como dos rayos opuestos que emergen del vértice B.

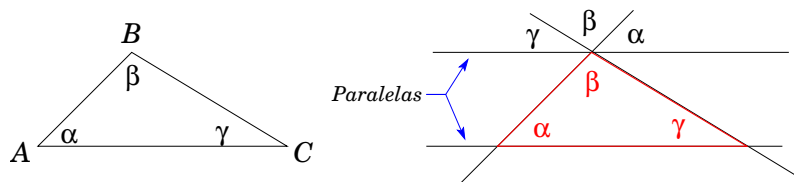


Figura 1.8: Los ángulos internos de todo triángulo plano suman 180° .

Dependiendo de los valores que tomen los ángulos internos de un triángulo, identificamos tres tipos de interés recurrente y que se ilustran en la Fig. 1.9. Los triángulos isósceles se caracterizan por tener dos ángulos iguales, o bien dos lados iguales. Como se ilustra en la figura, existe un eje de simetría con respecto al cual el triángulo se replica (espectralmente) a si mismo. Otro tipo de triángulo es el equilátero, que se caracteriza por tener todos sus ángulos iguales, es decir 60° . Por último tenemos el caso del triángulo rectángulo, en el cual uno de sus ángulos es recto (90°). Por lo tanto, la suma de sus otros dos ángulos internos es 90° : $\alpha + \beta = 90^\circ$.

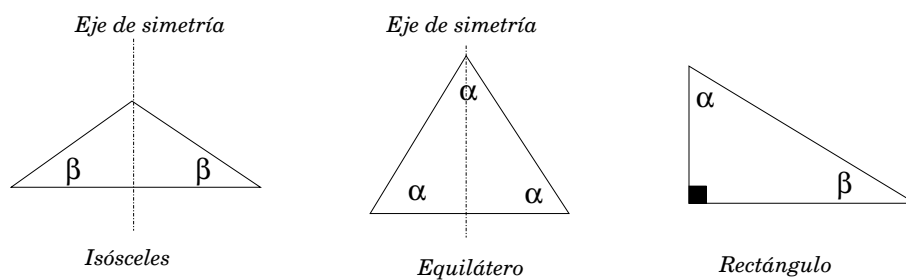


Figura 1.9: Triángulos isósceles, equilátero y rectángulo.

Circunferencias

Otra figura de importancia en geometría es la circunferencia. Esta es una curva cerrada donde todos los puntos que la conforman se mantienen a una distancia fija – igual a su radio– a un punto fijo denominado centro. Aquella recta en contacto con un punto P de la circunferencia y que además es perpendicular al segmento que une P con el centro constituye una *tangente* a la circunferencia en P (ver esquema derecho de la Fig. 1.10).

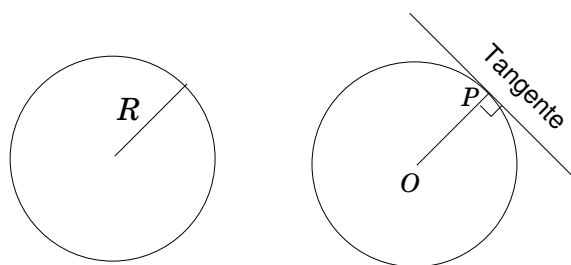


Figura 1.10: Circunferencia donde todos sus puntos distan R del centro. Su tangente en P es perpendicular al segmento OP .

Una propiedad interesante que surge al considerar una circunferencia es la siguiente: tomar dos puntos arbitrarios B y C de la circunferencia de la Fig. 1.11. Desde cada uno de estos puntos se trazan segmentos con extremos comunes en el centro de la circunferencia. Denotemos el ángulo entre estos dos segmentos φ (se lee *fi*). Por otro lado, tome un tercer punto A en la circunferencia y trazar dos segmentos que unen este punto con B y con C , respectivamente. Denotemos el ángulo entre estos dos segmentos por α . El *Segundo Teorema de Tales* establece que

$$\varphi = 2\alpha .$$

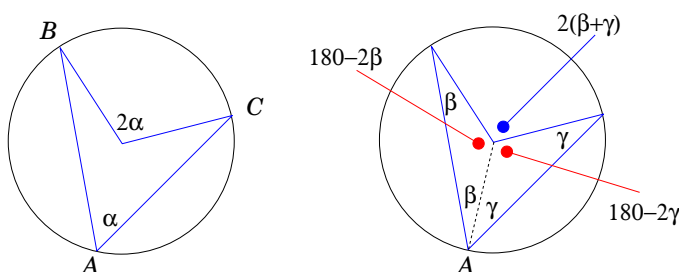


Figura 1.11: El segundo teorema de Tales.

Antes de aplicar esta fórmula a modo de receta, es importante intentar alguna forma de demostrarla o justificarla. De hecho su demostración es bastante sencilla si se considera el diagrama del lado derecho de la Fig. 1.11. En ella se ha trazado un segmento que une el centro de la circunferencia con A. Ello permite la identificación de dos triángulos isósceles, a los cuales se les asignan ángulos β y γ , respectivamente. Por lo tanto, los ángulos en el vértice del centro, de cada triángulo, son $180^\circ - 2\beta$ y $180^\circ - 2\alpha$, respectivamente. Puesto que

$$\varphi + (180^\circ - 2\beta) + (180^\circ - 2\gamma) = 360^\circ ,$$

entonces $\varphi = 2(\beta + \gamma) = 2\alpha$.

Semejanza

Cuando contamos con una figura nos resulta natural pensar en *amplificarla o reducirla*, sin deformarla. Esto lo aprendemos tempranamente cuando hacemos nuestros primeros dibujos en nuestra infancia. Este concepto de amplificación o reducción es muy utilizado en la construcción de maquetas, las que son generalmente volumétricas. Lo mismo ocurre cuando bosquejamos un plano, fotocopiamos una imagen, o aplicamos las opciones acercamiento/alejamiento a una imagen en la pantalla del computador. Este concepto fué estudiado tempranamente por los griegos. En particular, Tales de Mileto introduce la idea de proporcionalidad entre triángulos, lo que va asociado al concepto de semejanza de triángulos. La idea detrás de esta construcción es mantener la forma del triángulo, sin que necesariamente sus dimensiones absolutas sean las mismas. Así, dos triángulos son semejantes si:

- Dos de sus ángulos correspondientes son coincidentes;
- Dos de sus lados son proporcionales y el ángulo entre ellos es el mismo.

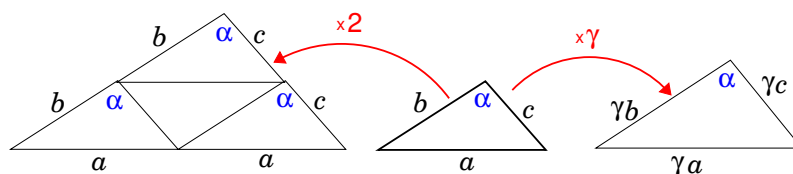


Figura 1.12: Triángulos semejantes, según Tales de Mileto.

En la Fig. 1.12 se ilustra a la izquierda la amplificación al doble ($\times 2$) del triángulo del centro. A la derecha se ilustra un triángulo escalado por γ , siendo cada uno de los tres lados multiplicado por un factor γ .

La idea anterior, aplicada a triángulos, se puede hacer extensiva a un semicírculo. Recordemos que un círculo queda completamente determinado por su radio. Si el semicírculo de radio R de la Fig. 1.13 es escalado por el factor $1/R$, entonces obtenemos el esquema de la derecha, donde

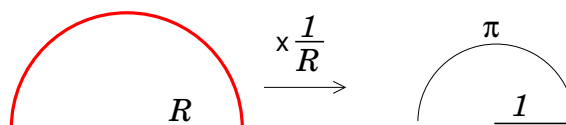


Figura 1.13: Pi, simbolizado por π , está dado por el cociente entre el semi-perímetro de un círculo y su radio.

el radio del semicírculo resultante es 1 y el semiperímetro correspondiente es π (*pi*). A aquel círculo de radio unitario se le denomina *círculo unitario*, el que nos permitirá varias construcciones simples. En particular, como se observa en la Fig. 1.14, su perímetro, semi-perímetro y cuarto de perímetro son 2π , π y $\pi/2$, respectivamente.

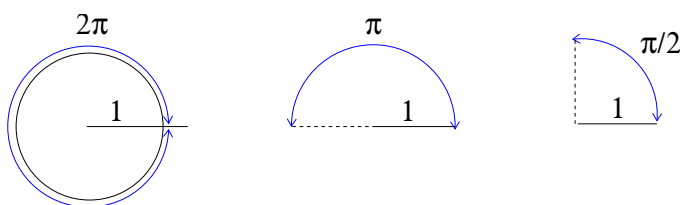


Figura 1.14: Perímetro, semi-perímetro y cuarto de perímetro de un círculo unitario.

Radianes

La observación anterior nos permite introducir una forma alternativa para cuantificar ángulos. La construcción $0 - 360^\circ$ fué hecha en forma totalmente arbitraria, conviniendo en que el ángulo extendido correspondía a 180° . Sin embargo, si nos valemos del círculo unitario, podemos establecer la correspondencia $360^\circ \leftrightarrow 2\pi$, $180^\circ \leftrightarrow \pi$, etc.

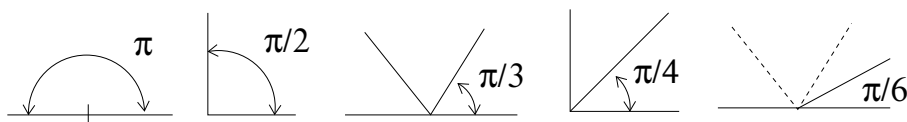


Figura 1.15: Equivalente en radianes de los ángulos 180° , 90° , 60° , 45° y 30° , respectivamente.

Bajo esta nueva construcción los ángulos quedan expresados en *radianes*, cantidad *adimensional* que en la disciplina de la física simbolizamos mediante 'rad'. Un resultado

natural y sumamente práctico de esta representación es la que se ilustra en la Fig. 1.16. En ella se muestra un *arco unitario*, vale decir, una porción de circunferencia de radio unitario. La longitud del arco es θ , igual al ángulo (en radianes) subtendido por el arco medido desde el centro.

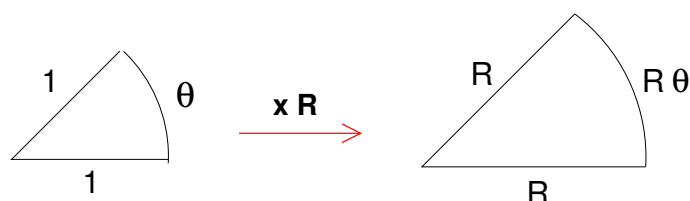


Figura 1.16: A la izquierda el arco θ representa el ángulo en radianes. A la derecha $R\theta$ corresponde al arco subtendido por θ en un círculo de radio R .

Si el arco unitario es amplificado por R , entonces tenemos un sector circular de radio R y arco de longitud $R\theta$. Lo anterior siempre y cuando θ esté expresado en radianes. En particular, si $\theta = 2\pi$ (ángulo completo), entonces la longitud del arco resulta igual a $2\pi R$, correspondiente al perímetro de la circunferencia.

Teorema de Pitágoras

Una de las identidades geométricas de mayor trascendencia es el conocido *Teorema de Pitágoras*, donde los tres lados del triángulo rectángulo de la Fig. 1.17 se relacionan mediante

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

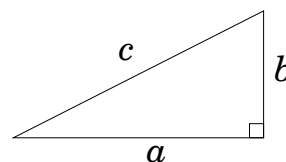


Figura 1.17: Triángulo rectángulo.

Se conoce un gran número de demostraciones de este teorema. Sólo para tener una idea sugiero visitar el sitio <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/>, donde se pueden apreciar formas muy ingeniosas para demostrarlo. Aquí presentaremos dos demostraciones.

En la Fig. 1.18 se ilustra un cuadrado formado por cuatro triángulos rectángulos idénticos.

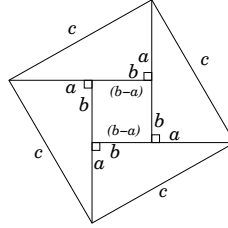


Figura 1.18: Cuatro triángulos rectángulos formando un cuadrado.

El área total del cuadrado, c^2 , es igual a la suma del área de los cuatro triángulos, más la del cuadrado interior de lados $(b - a)$:

$$c^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2} ab \right) + (b - a)^2 = a^2 + b^2 ,$$

el resultado planteado.

La segunda demostración es original de este autor (Arellano), presentada por primera vez en clases cerca del año 2000. A diferencia de la demostración anterior y muchas otras, ésta no hace consideraciones de áreas. La observación clave es que la longitud de la proyección de un segmento de longitud d sobre una línea oblicua es proporcional a d , con la constante de proporcionalidad dependiente exclusivamente del ángulo de la proyección.

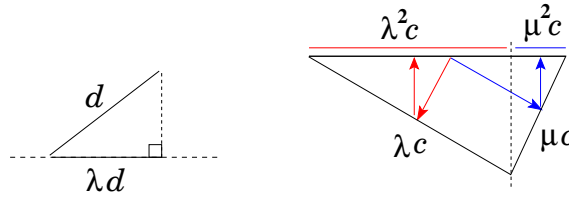


Figura 1.19: Proyecciones sucesivas hipotenusa-cateto-hipotenusa.

Entonces consideremos las dos proyecciones consecutivas ilustradas en la Fig. 1.19, donde i.- la hipotenusa de longitud c es proyectada sobre uno de los catetos (λc); y ii- el cateto (de longitud λc) es proyectado nuevamente sobre la hipotenusa: $\lambda(\lambda c) = \lambda^2 c$. Hacemos lo mismo considerando el otro cateto, donde esta vez la constante de proporcionalidad la denotamos por μ . La suma de las dos proyecciones debe resultar c :

$$c = \lambda^2 c + \mu^2 c$$

Puesto que $a = \lambda c$, entonces $\lambda = a/c$. De igual forma, $\mu = b/c$. Reemplazando y simplificando obtenemos $c^2 = a^2 + b^2$.

Áreas

Cuando contamos con una superficie y demarcamos un sector de ella, podemos cuantificar el área que queda delimitada. Una manera aproximada de calcular el área es introduciendo una grilla reticulada, donde cada celda toma la forma de un rectángulo de dimensiones medibles. Los bordes quedan formados por figuras semejantes a rectángulos o paralelogramos, todos ellos de área conocida si se conocen las longitudes de sus lados. Si el resultado no es lo suficientemente preciso, el reticulado se puede hacer aún más fino, hasta lograr la precisión deseada. El hecho de que se tengan que hacer más operaciones aritméticas no impide que, en principio, el área de una figura amorfa sea cuantificable.



Figura 1.20: El área de una superficie arbitraria como la suma de áreas de celdas.

Entonces, para comenzar, definiremos el área de una celda rectangular de aristas de longitudes a y b como

$$A_{\text{celda}} = ab.$$

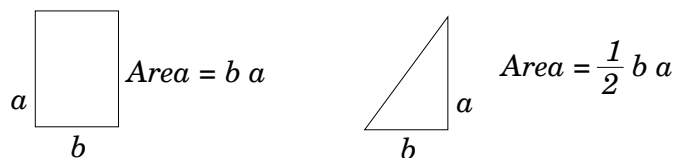


Figura 1.21: Área de un rectángulo y triángulo rectángulo.

Si además trazamos una diagonal a esta celda, obtenemos dos triángulos rectángulos de áreas idénticas, por lo que el área de cada triángulo es

$$A_{\text{trian}} = \frac{1}{2}ab.$$

Una manera alternativa de calcular el área de un triángulo se ilustra en la Fig. 1.22. En la imagen de la izquierda se ha subdividido la base en dos partes iguales, cada una

de base igual a $b/2$. Las alturas de cada rectángulo son $a/2$ y a , respectivamente. Por lo tanto, la suma de las áreas de ambas lonjas resulta

$$A_2 = \frac{b}{2} \left(\frac{a}{2} + a \right) = \frac{3}{4} ab = 0,75 ab .$$

Este resultado es algo tosco (difiere en un 50 % del resultado correcto), pero es perfectible si subdividimos las bases nuevamente.

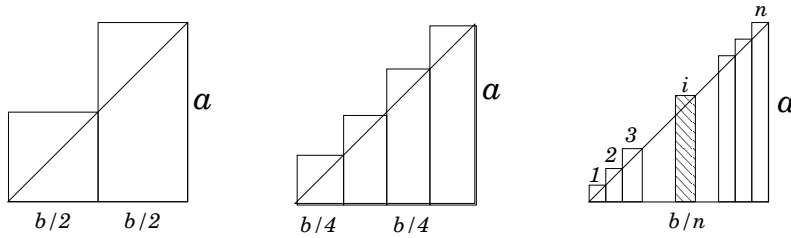


Figura 1.22: El área de un triángulo rectángulo como suma del área de lonjas rectangulares.

Al considerar cuatro lonjas el área total resulta

$$A_4 = \frac{b}{4} \left(\frac{1}{4} a + \frac{2}{4} a + \frac{3}{4} a + \frac{4}{4} a \right) = \frac{5}{8} ab \approx 0,625 ab .$$

Resulta sencillo visualizar que para n subdivisiones se tiene

$$A_n = \frac{b}{n} \left(\frac{1}{n} a + \frac{2}{n} a + \cdots + \frac{n-1}{n} a + \frac{n}{n} a \right) = \frac{ab}{n^2} [1 + 2 + \cdots + (n-1) + n] .$$

Se puede demostrar que la suma $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.³ Entonces,

$$A_n = \frac{ab}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{ab}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) .$$

Este es el resultado general para n lonjas, número aún no especificado. Podemos concebir que mientras más finas sean las subdivisiones, mejor resulta la aproximación del área del

³Denotemos $S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$, con n sumandos. Inviertiendo el orden de los sumandos, $S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$. Sumando ambas expresiones obtenemos, a la izquierda, $2S_n$. Los términos de la derecha se suman apareando $1 + n$, $2 + (n-1)$, $\cdots$, $(n-1) + 2$ y $n + 1$. Cada uno de ellos suma $(n+1)$. Entonces, la suma de los n pares lleva a que $2S_n = n(n+1)$, o bien

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

triángulo como suma de lonjas rectangulares. Por lo tanto, tomamos n tan grande como imaginable ($n \gg 1$). En tal caso vemos que $1/n$ resulta ínfimo al ser comparado con 1, lo que en jerga física se dice “ $1/n$ despreciable frente a 1”. Así, si n se incrementa indefinidamente ($n \rightarrow \infty$), entonces

$$1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad A_{\infty} = \frac{ab}{2},$$

resultado ya conocido.

Es claro que el procedimiento recién descrito no es tan breve como el primero que usamos. Sin embargo tiene la virtud de sugerir otros contextos en los cuales el resultado $ab/2$ se replica. Como se ilustra en la Fig. 1.23, las tres figuras tienen igual área. La condición para ello es que la lonja horizontal en cada caso crezca proporcionalmente con la distancia x al vértice superior. La constante de proporcionalidad λ ha de ser la misma en los tres casos: ($\lambda = a/b$). Lo interesante es que el triángulo del centro ya no es rectángulo, en tanto que el de la derecha tiene la particularidad de tener dos de sus aristas curvas.

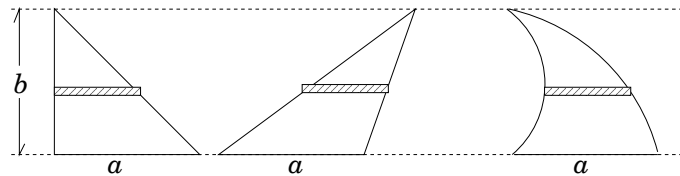


Figura 1.23: Tres triángulos de igual área.

La idea de subdividir en lonjas la podemos aplicar para calcular el área de un sector circular subtendido por un ángulo θ . En el esquema derecho de la Fig. 1.24 se muestra el sector circular subdividido en sectores más pequeños, cada uno de ángulo $\delta\theta$. Si $\delta\theta$ es suficientemente pequeño, entonces éste se asemeja a un triángulo isóseles de altura R y base $R\delta\theta$. El área de cada lonja resulta $(R\delta\theta)R/2 = \frac{1}{2}R^2\delta\theta$. Al sumar todas las contribuciones resulta que el área del sector es

$$A_{\text{sector}} = \frac{1}{2}R^2\theta.$$

En el caso particular de un círculo completo, para el cual $\theta = 2\pi$, obtenemos πR^2 para su área.

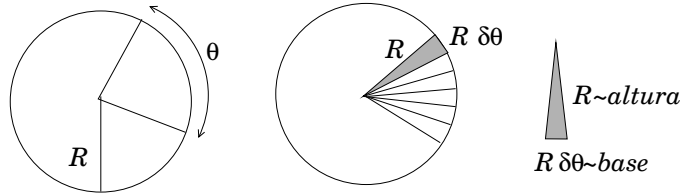


Figura 1.24: Círculo cubierto por lonjas casi triangulares.

Cálculo de π

El número π es irracional, vale decir, no es posible expresarlo como el cociente entre dos números enteros. Por lo tanto su representación decimal acarrea infinitos decimales. Esto nos fuerza –en evaluaciones numéricas– a recurrir a valores aproximados de π , donde la cantidad de decimales a considerar dependerá del grado de precisión que se desee. Estos decimales se pueden encontrar tabulados en libros de referencia o a partir de algoritmos numéricos. En lo que nos atañe, tratemos de hacer una estimación numérica de π a partir de su definición:

$$\pi = \frac{\text{Perímetro}}{\text{Diámetro}}$$

En la Fig. 1.25 se ilustra un círculo de radio R , por lo que su diámetro es $2R$. En el segundo esquema desde la izquierda se incluyen dos cuadrados. Uno de ellos envuelve el círculo y el otro es contenido por el círculo. Los perímetros respectivos son $8R$ y $4R\sqrt{2}$, respectivamente. Con ello, el perímetro del círculo está entre estos dos valores. Consecuentemente,

$$\frac{8R}{2R} > \pi > \frac{4R\sqrt{2}}{2R} \Rightarrow 4 > \pi > 2\sqrt{2}.$$

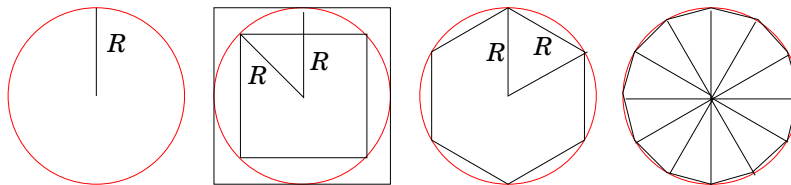


Figura 1.25: Círculo cubierto por lonjas casi triangulares.

A partir de este resultado podemos afirmar que π está entre $\sim 2,828$ y 4 . Una manera de refinar este resultado es considerando esta vez un hexágono, el cual es formado por

seis triángulos equiláteros de lados de longitud R . En este caso el perímetro resultante es $6R$, por lo que

$$\pi \approx \frac{6R}{2R} = 3,$$

resultado correcto al 5%.

En el último esquema de la Fig. 1.25 se muestra el círculo envolviendo un polígono de doce aristas idénticas. Se propone como estudio personal calcular el perímetro de esta figura para así mejorar la estimación de π . Con estas ilustraciones queda claro que contamos con herramientas geométricas que permiten refinar la representación numérica de π .

1.3. Elementos de trigonometría

La trigonometría es bastante simple, pero a su vez es tremendamente fértil en propiedades exóticas, curiosidades diversas y aplicaciones. Por lo mismo es fácil encontrar textos íntegramente dedicados al tema. En nuestro caso será una herramienta totalmente manejable con un par de ideas básicas y algunas propiedades elementales.

Definiciones

Consideremos una circunferencia unitaria en un sistema de ejes cartesianos definido por sus ejes x e y . La circunferencia está centrada en el origen del sistema coordenado. Consideremos ahora un punto P en el círculo unitario. La ubicación de P en el círculo queda determinada por θ , el ángulo (o arco) medido desde el eje x . A partir de esta

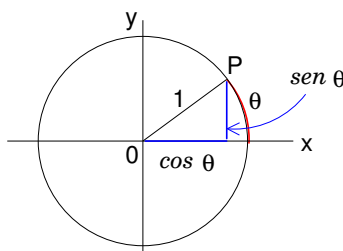


Figura 1.26: Las funciones $\text{sen } \theta$ y $\text{cos } \theta$ como proyecciones de hipotenusa unitaria.

figura definimos:⁴

⁴Convenimos en que $\text{sen } \theta = \text{sen}(\theta)$, al igual que $\text{cos } \theta = \text{cos}(\theta)$. Trataremos de usar la forma sin paréntesis, aunque hay casos donde el uso del paréntesis es conveniente para evitar confusión.

- $\text{sen } \theta$ (se lee *seno de teta*), correspondiente a la altura de P con respecto al eje x . Por lo tanto, el máximo valor de $\text{sen } \theta$ es 1 (para $\theta = \pi/2$), nunca mayor. De igual manera, el valor mínimo de $\text{sen } \theta$ es -1 , para el caso $\theta = 3\pi/2$.
- $\text{cos } \theta$ (se lee *coseno de teta*), correspondiente a la ubicación en x del punto P. De igual forma, $\text{cos } \theta$ puede tomar valores entre -1 y 1 .

De estas definiciones es inmediato observar que $\text{sen } \theta = 0$, y que a medida que θ es incrementado en $\pi/2$ (noventa grados) entonces $\text{sen}(\theta)$ toma los valores $1, 0, -1, 0, \dots$ etc. De igual forma, para $\theta = 0$, $\text{cos } \theta = 1$. Al incrementar el ángulo en $\pi/2$ entonces $\text{cos } \theta$ toma los valores $0, -1, 0, 1, \dots$ etc. Observar que para $\theta = 2\pi$ las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ se repiten cíclicamente. Por lo tanto, podemos afirmar que

$$\text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}(\theta) \quad \text{cos}(\theta + 2\pi) = \text{cos}(\theta).$$

Estos resultados los resumimos en la Fig. 1.27, donde se grafican las funciones $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$ como función del ángulo.

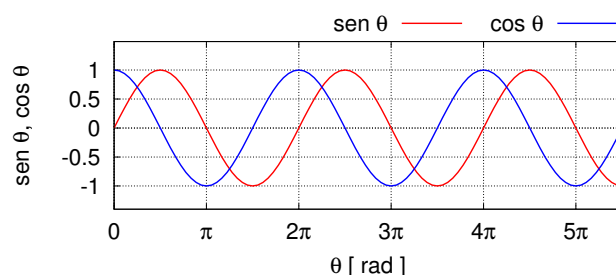


Figura 1.27: Las funciones armónicas $\text{sen}(\theta)$ y $\text{cos}(\theta)$.

Notar la similitud que tienen ambas funciones. La curva de $\text{cos}(\theta)$ se superpondría a la de $\text{sen}(\theta)$ si fuese trasladada en $\pi/2$ hacia la derecha. En otras palabras,

$$\text{sen}(\theta) = \text{cos}(\theta - \pi/2).$$

Una identidad fundamental que relaciona $\text{cos}(\theta)$ y $\text{sen}(\theta)$ es

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1,$$

que surge directamente de la Fig. 1.27 si se observa que $\sin \theta$ y $\cos \theta$ son los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa unitaria. De esta forma, si conocemos $\sin \theta$, entonces obtenemos $\cos \theta$ (salvo por un signo debido a la raíz cuadrada):

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \pm (1 - \sin^2 \theta)^{1/2}.$$

El signo dependerá de la situación específica a estudiar, cuidando siempre de que las soluciones tengan sentido físico.

Más adelante nos encontraremos con situaciones en las que el ángulo θ es pequeño. Para fijar ideas, ángulos del orden o menores que $\pi/10 \sim 0,3$ rad. Nuevamente observemos la Fig. 1.27 y notemos que, si θ es muy pequeño, entonces el arco θ de la circunferencia se asemeja bastante a la altura del punto P, o sea $\sin \theta$. Así,

$$\sin \theta \approx \theta,$$

para $\theta \approx \pi/10$, o menor. Sólo para ilustrar este punto, a tres decimales vemos que $\pi/10 = 0,314$, en tanto que $\sin(\pi/10) = 0,309$. El error numérico es del orden de un 2%.

Para ciertos ángulos especiales los valores de las funciones $\sin$ y $\cos$ resultan particularmente sencillas. Tal es el caso de 45° , 60° y 30° , ilustrados en la Fig. 1.28

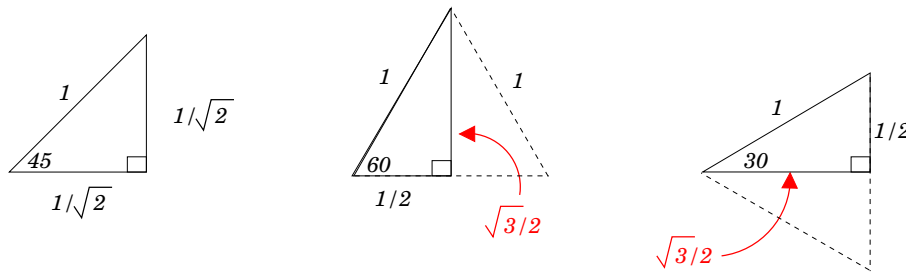


Figura 1.28: Valores de $\sin \theta$ y $\cos \theta$ para $\theta = \pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/6$, respectivamente.

Recordamos que $\sin \theta$ viene dado por la altura del triángulo rectángulo de hipotenusa unitaria. En el caso de $\theta = 45^\circ$, o sea $\theta = \pi/4$, ambos catetos miden $1/\sqrt{2}$, por lo que $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$.

En el caso de $\theta = 60^\circ \equiv \pi/3$, construimos un triángulo equilátero de lados unitarios, con su base horizontal. Al trazar una vertical desde el vértice superior dividimos el triángulo en partes simétricas. La base del sub-triángulo izquierdo mide $1/2$, por lo que inmediatamente inferimos que $\cos(60^\circ) = 1/2$. Aplicando el teorema de Pitágoras a este resultado obtenemos que $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$. Un procedimiento totalmente análogo se

aplica para $\theta = 30^\circ$, equivalente a un ángulo de $\pi/6$. En este caso resulta evidente que $\sin(30^\circ) = 1/2$, de donde se infiere $\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$.

Es frecuente que las funciones trigonométricas sean introducidas a partir de cuocientes entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Tal enfoque tiene limitantes considerables. Por ejemplo, ¿cuánto vale $\sin \pi$? No hay triángulo rectángulo que podamos imaginar que tenga uno de sus ángulos igual a 180° y que además sea rectángulo. Como sabemos, los ángulos internos de todo triángulo suma justamente 180° , y en este caso los ángulos suman a lo menos $180 + 90 = 270^\circ$. Sin embargo, nos podemos valer de la definición general que hemos introducido para hacer contacto con estas definiciones *tradicionales*.

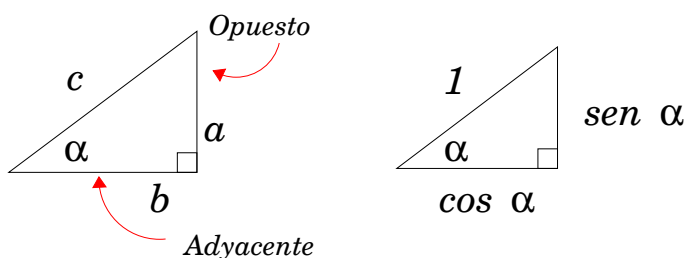


Figura 1.29: Proporcionalidad entre un triángulo rectángulo general con un triángulo rectángulo de hipotenusa unitaria.

Para ello consideremos la Fig. 1.29, donde dibujamos dos triángulos semejantes. A la izquierda el triángulo tiene una hipotenusa de longitud c , en tanto que el esquema de la derecha es de hipotenusa unitaria. Claramente vemos que

$$\frac{\sin \alpha}{1} = \frac{a}{c} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

De igual forma observamos

$$\frac{\cos \alpha}{1} = \frac{b}{c} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

Por lo tanto, la definición general de las funciones armónicas reproduce como caso particular las definiciones dadas como cuocientes entre los lados de triángulos rectángulos.

A partir de las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$, podemos definir la función *tangente*, dada por el cuociente

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

Esta función tiene dos particularidades importantes: a) Para $\theta \sim 0$, $\tan \theta \approx \theta$; y b) Para $\theta \rightarrow \pi/2$, la función coseno tiende a cero, por lo que la tangente crece indefinidamente.

Decimos entonces que ‘tiende’ a infinito. Estas particularidades se ilustran en la Fig. 1.30.

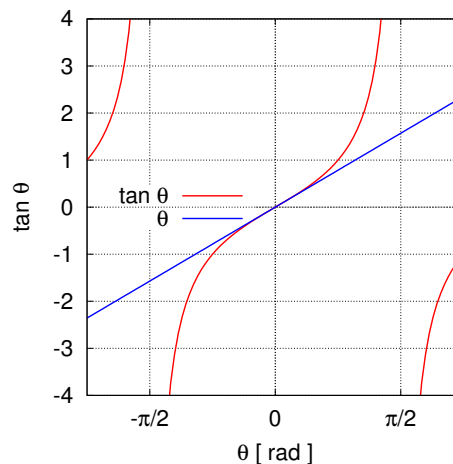


Figura 1.30: Si θ es pequeño, entonces $\tan \theta \approx \theta$.

Proyección ortogonal

Consideremos la siguiente situación: Una escalera de 2 m de altura se apoya sobre la pared vertical, formando un ángulo de 25° con la pared. Entonces, si el piso es horizontal, ¿cuán alto desde el piso se apoya la escalera?

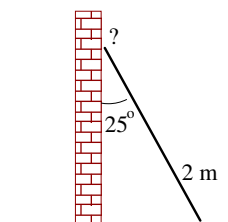


Figura 1.31: Escalera apoyada en una pared.

Este es un problema bastante sencillo y a su vez muy recurrente. En el fondo, necesitamos saber la extensión de la proyección de la escalera sobre la pared.

Para realizar una *proyección ortogonal* necesitamos un segmento a proyectar y una dirección especificada por su ángulo relativo al segmento. Una vez que el extremo del segmento coincide con la recta (definida por la dirección), entonces desplazamos imaginariamente los puntos hacia la recta, cuidando que sus desplazamientos sean perpen-

diculares a la recta. La extensión del segmento proyectado corresponde a la proyección ortogonal del segmento en la dirección especificada.

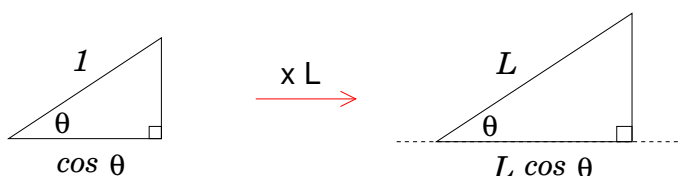


Figura 1.32: Proyección ortogonal de un segmento de longitud L .

Esta idea la podemos relacionar con la función $\cos \theta$ ilustrada en la Fig. 1.32, donde partimos con un triángulo rectángulo de hipotenusa unitaria. Al escalar esta figura por L , vemos que la hipotenusa tiene longitud L , en tanto que su proyección ortogonal vale $L \cos \theta$. Este resultado nos será de mucha utilidad más adelante.

En el caso del problema de la escalera vemos que el extremo superior de la escalera se ubica a una distancia $L \cos 25^\circ$ del piso, con $L = 2$ m. Evaluando obtenemos 1,81 m.

El teorema del coseno

En términos generales un triángulo queda completamente determinado si: a) Se conocen sus tres lados; b) Se conocen dos de sus lados y el ángulo entre ellos; o c) Se conocen uno de sus lados y dos de sus ángulos. El segundo caso es interesante por cuanto nos permitiría, por ejemplo, conocer la distancia entre dos exploradores a partir de nuestra lejanía a cada una de ellos y su separación angular con respecto a nosotros. La respuesta general a este problema se sintetiza mediante el *Teorema del Coseno*.

Este teorema no es más que una extensión del *Teorema de Pitágoras* a triángulos no rectángulos. Para el triángulo de la figura se cumple

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta ,$$

permitiendo conocer c a partir de a , b y el ángulo θ .

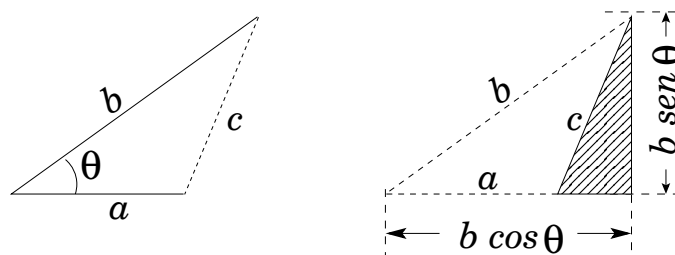


Figura 1.33: Esquema para la demostración del teorema del coseno.

Para demostrarlo, consideremos el triángulo rectángulo achurado de la Fig. 1.33, para el cual aplicamos el teorema de Pitágoras

$$c^2 = (b \cos \theta - a)^2 + (b \sin \theta)^2 .$$

Expandiendo y usando la propiedad $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, se obtiene el resultado deseado.

Funciones trigonométricas inversas

Supongamos que algún cálculo realizado nos lleva al resultado $\sin \theta = 0,52$. Nos preguntamos por θ que satisface tal condición. Para ello recurrimos a la función inversa del $\sin$, que denominamos $\arcsin$. Su rol es análogo al existente entre elevar al cuadrado vs extraer raíz cuadrada. De hecho:

$$\arcsin(\sin \theta) = \theta .$$

En calculadoras modernas esta función aparece indicada de dos formas: a.- $\sin^{-1}$; y b.- $\text{inv}+\sin$. Entonces,

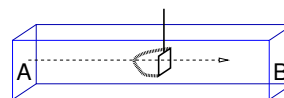
$$\begin{aligned} \sin \theta &= 0,52 & / \arcsin(\times) \\ \arcsin(\sin \theta) &= \arcsin(0,52) \\ \theta &= \arcsin(0,52) & \text{calculadora} \\ \theta &= 0,547 \text{ rad} = 31,33^\circ \end{aligned} \quad (1.1)$$

Para las funciones coseno y tangente se cuenta con $\arccos$, y de la tangente.

1.4. Problemas propuestos

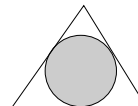
Aritmética

1. Calcule en forma aproximada y luego verifique con calculadora: $1/101$; $905/77$; $988/1,06$; $303/220$; $\sqrt{88}/0,015$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{22}$; $\sqrt{3/7}$; $\sqrt{51/71}$; $\sqrt{1,001}$; $(3/7)^{3/2}$; $\sqrt{\pi}$; $1/\pi$; $10^{1/3}$; $\sqrt{60,5}$; $2^{34}/10^3$; $2^{25}/3^{12}$; $7^{28}/\pi^6$; y $3^8/3\pi^7$.
2. Un tablero de ajedrez consta de 8×8 casilleros. En el primero de ellos se pone un grano de maiz; en el segundo el doble del anterior; en el tercero el doble del anterior, y así sucesivamente. Estime el volumen de granos para toda la operación y compárelo con el de Tierra, cuyo radio aproximado 6400 km. ★☆☆
3. Una hoja de papel es cortada a lo ancho en dos partes iguales, las cuales se adhieren formando una hoja de doble espesor pero de área igual a la mitad de la original. El procedimiento es repetido en forma sucesiva hasta que el espesor de la 'hoja' cubra la distancia tierra-luna. Calcule el área de las páginas en tal caso y el número de átomos por página. ★★
4. La densidad del aluminio (Al) es de 2.7 g/cc, lo que significa que 1 cc de Al compacto tiene una masa de 2.7 g. Además, el peso atómico del Al es 27, con lo cual un mol (6.02×10^{23} átomos) de Al tiene una masa de 27 g. Con estos datos calcule la distancia que cubre 1 cc de Al al poner los átomos en línea. Compare su resultado con la distancia media tierra-sol (1.5×10^{11} m). ★☆☆
5. La densidad del agua en estado líquido es de 1000 kg/m³ y la del hielo 920 kg/m³. Estime y compare porcentualmente la distancia media entre los átomos de oxígeno para el agua en cada estado. ★☆☆
6. Un acuario de longitud L (50 cm) y sección transversal S (25×25 cm²) es limpiado usando una red de área a (100 cm²). El procedimiento es arrastrar la red desde A hacia B tantas veces como sea necesario. A su paso la red captura todas las partículas gruesas del acuario. Suponiendo que cada vez que la red es pasada los desechos se distribuyen uniformemente, calcule el número de pasadas de la red para que la cantidad de desechos gruesos disminuya a la décima parte. ★★★



Geometría y trigonometría

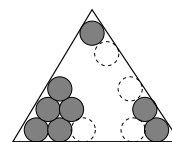
1. Calcule la razón entre el área de un círculo y del triángulo equilátero que lo contiene. ★☆☆



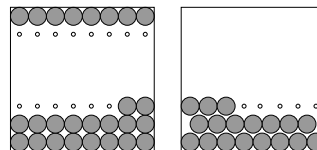
2. Considere tres figuras equiláteras de igual perímetro: un cuadrado, un triángulo y un hexágono. Compare porcentualmente el área entre ellas tomando como referencia el área del cuadrado. ★★☆☆



3. Calcule la razón entre el área abarcada por los $n(n+1)/2$ círculos de igual radio y el triángulo equilátero que los contiene en forma compacta. ★★☆☆

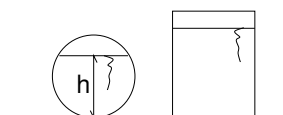


4. Hay que decidir el tipo de empaque que se les van a dar a pelotas de tenis de radio R en una bandeja cuadrada de lados de longitud $N(2R)$, con $N > 1$. En la base inferior de cada bandeja se ubicarán N de ellas, y el resto se ubicará siguiendo los dos patrones mostrados en la figura. Decida cual de las dos configuraciones resulta más conveniente calculando la razón entre el área abarcada por las pelotas y el área disponible. Estime un resultado para el caso $N \gg 1$. ★★★

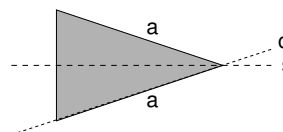


5. La altura de la roca más alta en una isla es de 50 m. Desde la punta del mástil de un velero, cuya altura es de 10 m, un marino avista la isla. Determine la distancia máxima del velero a la isla. ★☆☆

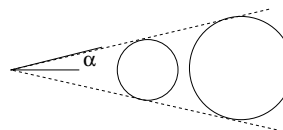
6. Desde el centro de un cubo emergen dos rayos a una misma cara de éste. Calcule el máximo ángulo entre ellos. ★☆☆
7. Un barril cilíndrico de radio R y altura L es llenado parcialmente con agua. Cuando el barril es dispuesto horizontalmente el nivel del líquido en su interior es h . Determine el nivel de agua en el barril cuando es dispuesto en forma vertical. ★★nz



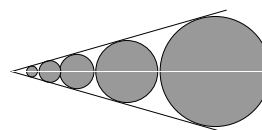
8. Un triángulo isósceles de lados simétricos de longitud a y ángulo α entre ambos, posa sobre un plano. El triángulo es rotado en un ángulo β en torno a su eje de simetría s . Determine las dimensiones y área del triángulo que resulta proyectado sobre el plano y compárelas con las que se obtendrían si la rotación se efectúa en torno a uno de los lados del triángulo (eje c). ★★★



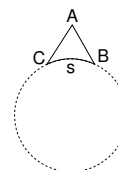
9. Determine la distancia entre los centros de dos esferas de radios R y r , respectivamente, cuando éstas se mantienen en contacto con las paredes de un cono cuyo ángulo entre su eje y una de sus directrices es α . ★☆☆



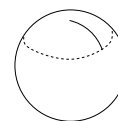
10. En la figura se muestra una secuencia de círculos cuyos centros se ubican a lo largo de una recta. Los círculos están en contacto entre sí y tienen una tangente común cuyo ángulo con la recta es β . El mayor de los círculos es de radio R . Determine el área abarcada por todos los círculos. ★☆☆



11. El triángulo ABC de la figura consiste en dos segmentos rectos de igual tamaño y un arco de longitud s en la periferia de un círculo de radio R . La altura h del triángulo está dada por la distancia del vértice A al punto medio del arco $\overline{BC}$. Determine el área del triángulo y analice el caso extremo en que la base s del triángulo es mucho menor que el radio R . ★★☆



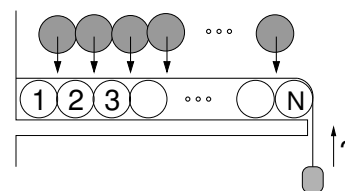
12. Sobre una superficie esférica de radio R se traza una circunferencia utilizando una cuerda de longitud r tensada, fija a la esfera en uno de sus extremos. Determine el perímetro de la circunferencia trazada. ★★☆



13. N niños cuyos brazos extendidos tienen una longitud b juegan a la ronda. Determine el ángulo entre el brazo derecho e izquierdo de cada uno y el radio de la circunferencia que cada uno de ellos describe mientras juega. Estime el número de niños que pueden jugar a la ronda en una cancha de baloncesto. ★★☆



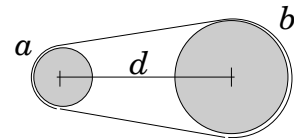
14. N tambores cilíndricos de radio R son dispuestos en línea como se indica. Un cordel estirado se extiende sobre los tambores y una carga cuelga verticalmente desde el extremo libre del cordel. Una segunda corrida de tambores es dispuesta, aplastando el cordel como se indica. Determine el ascenso vertical de la carga. ★★☆



15. Una bicicleta puede ser caracterizada por la separación b entre los ejes de sus ruedas. Si la rueda delantera es virada en un ángulo β con respecto al eje de desplazamiento de la bicicleta, determine y caracterize la trayectoria de la bicicleta.

★★☆

16. La longitud L de la cadena de una bicicleta queda completamente determinada por el radio a del piñón, el radio b del plato y la separación d entre los ejes de ambos. Determine L como función de a , b y d , verificando la validez de su solución en los casos particulares siguientes: a) Piñón y plato de radio nulo ($a = b = 0$); b) Piñón y plato de igual radio, con sus ejes coincidentes ($a = b$; $d = 0$); y c) Plato de radio nulo centrado en la periferia del piñón ($b = 0$; $d = a$). ★★☆



Capítulo 2

Cinemática elemental

2.1. Movimientos rectilíneos y circunferenciales

Imaginemos una pista recta de hielo sobre la cual se desplaza un pingüino. Para simplificar la descripción, supondremos que el tamaño del pingüino es minúsculo *en relación a* las longitudes del trayecto a considerar. En el límite de la abstracción lo visualizamos como un *móvil puntual*. Esta es una idealización que nos será útil para la descripción de su movimiento, vale decir su cambio de ubicación en el tiempo.

El pingüino estaba detenido en cierto lugar de la pista para luego: *i.-* Comenzar a caminar en un sentido; *ii.-* seguido de una carrera; *iii.-* y dejarse resbalar sobre el hielo hasta detenerse. *iv.-* El pingüino se devuelve hasta el punto medio del trayecto recorrido; *v.-* y nuevamente se aleja corriendo para dejarse resbalar hasta detenerse. Imaginemos que los dos tramos de alejamiento del punto de partida tienen la misma extensión, como se esquematiza en la Fig. 2.1.

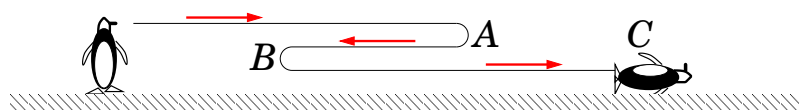


Figura 2.1: Pingüino alejándose, regresando y alejándose, hasta detenerse.

Para una descripción *cuantitativa* de este movimiento necesitaremos cierta instrumentación para cuantificar de alguna forma las posiciones del pingüino y el instante correspondiente. Lo que tenemos en mente es que, asociado a cada instante, hay una posición única para el pingüino. En otras palabras, para un instante dado él se ubica en un solo lugar. Desde luego estamos suponiendo que el pingüino en estudio es un ente único e identificable. Estos son supuestos sostenidos por nuestras vivencias (empírico)

que sin embargo dejan de ser válidos en el contexto de la *Mecánica Cuántica*, como discutiremos en clases.

La instrumentación que requerimos para cuantificar el movimiento del pingüino consiste en una huincha para medir longitudes y un cronómetro para medir intervalos de tiempo. Ambos se construyen en base a *patrones* de longitud (tramos) y de tiempo (lapsos), respectivamente. Suponemos además que ellos son aditivos, vale decir se pueden sumar. En el *Sistema Internacional de Unidades* (SI) la unidad (o patrón) de longitud es el *metro*, en tanto que la de tiempo es el *segundo*. Ambas son usadas frecuentemente en nuestra vida cotidiana.

Para describir cuantitativamente el movimiento del pingüino procedemos de la siguiente forma: sobre la pista construimos una recta imaginaria donde a cada punto le asociamos una *coordenada* que simbolizamos por x . Esta coordenada representa la lejanía (en unidades de longitud) entre el *origen* de coordenadas (escogido de forma arbitraria y/o conveniente) y el pingüino. La coordenada x puede ser positiva o negativa, dependiendo si se ubica a uno u otro lado del origen escogido. Así, en el ejemplo del pingüino, el origen de coordenadas se puede adoptar en su posición inicial del relato.

Para el tiempo, que denotaremos por t , también debemos adoptar un *origen temporal*, que comunmente denotamos por $t = 0$. Todo instante *posterior* a este origen de tiempo tiene signo positivo, en tanto que los *anteriores* tendrán signo negativo.

En el relato del movimiento del pingüino, para cada instante t existe una coordenada x .¹ Es más, podemos decir que tal posición x es *función de t* , lo que simbolizamos mediante

$$x = x(t) .$$

El movimiento del pingüino se puede sintetizar gráficamente como se muestra en la Fig. 2.2, donde se grafica su posición (altura en el eje vertical) en función del tiempo (eje horizontal). Los instantes t_A y t_B son los instantes en que el pingüino se ha detenido para cambiar de dirección de desplazamiento.

2.1.1. Definiciones

Supongamos que conocemos la dependencia temporal de la coordenada x de un móvil. Entonces definiremos:

¹Pudiéramos adoptar el símbolo x_p a fin de distinguir el ‘eje x ’ con la coordenada x_p . Tal distinción la mantenemos mentalmente, pero es conveniente tenerla presente. Sin embargo, ante dos o más móviles a estudiar es necesario el uso de rotulación adecuada para distinguir sus coordenadas.

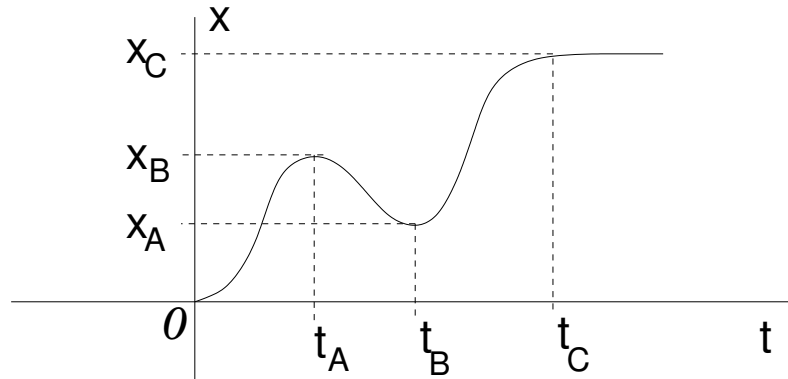


Figura 2.2: Pingüino alejándose, regresando y alejándose, hasta detenerse.

- I.- *Desplazamiento entre dos instantes:* Si x_1 y x_2 denotan las posiciones del móvil en los instantes t_1 y t_2 , con $t_2 > t_1$, entonces el desplazamiento entre esos instantes corresponde a la diferencia $x_2 - x_1$, que denotaremos Δx . En general, la letra griega *delta* mayúscula (Δ) la usaremos para denotar *variaciones* (o diferencias) netas, globales o totales. Entonces, el desplazamiento corresponde a

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1) .$$

Observar que $x_2 = x_1 + \Delta x$, de modo que si $\Delta x > 0$, entonces $x_2 > x_1$. En este caso el desplazamiento se produce en el sentido ascendente de x .

- II.- *Velocidad media:* Dados dos instantes t_1 y t_2 a los cuales les corresponde un desplazamiento Δx , entonces se define la velocidad media v_m^2 entre esos dos instantes como

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} ,$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Gráficamente la velocidad media está dada por la *inclinación* o *pendiente* del triángulo cuya base en el eje de abscisa es Δt y altura en el eje de ordenadas es Δx . Esta inclinación puede ser positiva ($\Rightarrow v_m > 0$), nula ($\Rightarrow v_m = 0$) o negativa ($\Rightarrow v_m < 0$). En la Fig. 2.3 se ilustran casos en que (A) $\Delta x > 0$ y (B) $\Delta x < 0$.

- III.- *Velocidad instantánea:* La velocidad media hace alusión a dos instantes diferentes que podemos representar por t y $t + \Delta t$, donde Δt representa el lapso entre ellos. El desplazamiento correspondiente queda dado por

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) .$$

²Otras notaciones usadas para velocidad media son $\bar{v}$ y $\langle v \rangle$.

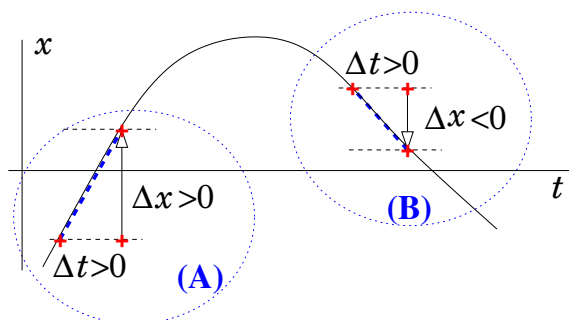


Figura 2.3: Velocidades medias como medida de la pendiente de rectas que unen dos puntos del gráfico: (A) pendiente positiva, y (B) pendiente negativa.

La velocidad media asociada está dada por

$$v \rightarrow \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Para construir la velocidad instantánea disminuirémos Δt a un valor abstractamente ínfimo ¡pero nunca cero!. Para fijar ideas, pensemos en un atleta que avanza a razón de 1 m/s. Esto quiere decir que en 1 segundo avanza 1 metro. En una décima de segundo avanza una décima de metro, con la velocidad media asociada

$$\frac{0,1 \text{ m}}{0,1 \text{ s}} = 1 \text{ m/s} .$$

Pero $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ sigue siendo finito. Tomemos entonces 0,00001 s, en cuyo caso $\Delta x = 0,00001 \text{ m}$, con lo que $v = 1 \text{ m/s}$. Abstractamente imaginamos entonces que Δt se hace infinitamente pequeño, lo que simbolizamos mediante

$$\Delta t \rightarrow 0 ,$$

queriendo significar que Δt *tiende a cero*, pero nunca es cero. En este proceso vemos que el numerador también $\Delta x \rightarrow 0$, sin embargo el cuociente $\Delta x / \Delta t$ mantiene un valor finito. En este caso el cuociente hace referencia solamente del instante t , es decir, v es función del instante t . Con esto justificamos la definición de velocidad instantánea en t mediante

$$v(t) = \text{Valor límite de } \dots \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \dots \text{ cuando } \Delta t \text{ se hace ínfimo.}$$

Ciertamente ésta no es una forma abreviada ni elegante de resumir la idea del proceso límite. Sin embargo haciendo uso de la simbología matemática esto se puede escribir de la forma

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} .$$

Más aún, cuando Δt se hace infinitamente pequeño se denota dt (se denomina *diferencial* de t). Asociado a este diferencial temporal se produce un desplazamiento también infinitamente pequeño, que denotamos dx . Entonces, la velocidad instantánea se representa mediante

$$v(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Más allá de como operar con esta simbología –que es totalmente accesible a este nivel– lo importante es rescatar la idea detrás de dx/dt . Para ello recurramos al gráfico de la Fig. 2.4, donde el triángulo rojo tiene asociada una pendiente igual al cociente $\Delta x/\Delta t$, representando una velocidad media. Sin embargo, el triángulo azul tiene asociado un lapso mucho más pequeño (digamos $\sim \Delta t/10$). Notar que el segmento el lado inclinado del triángulo tiende a coincidir con la porción de curva $x(t)$. De hecho a simple vista resultan casi indistinguibles. En este sentido

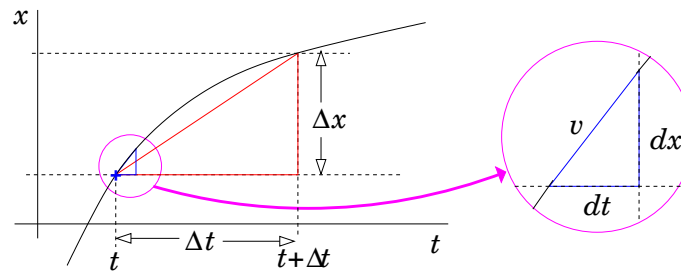


Figura 2.4: La velocidad instantánea está dada por la pendiente del triángulo azul, con dt ínfimo.

la velocidad instantánea representa la pendiente de la tangente de la curva x vs t , en el instante t .

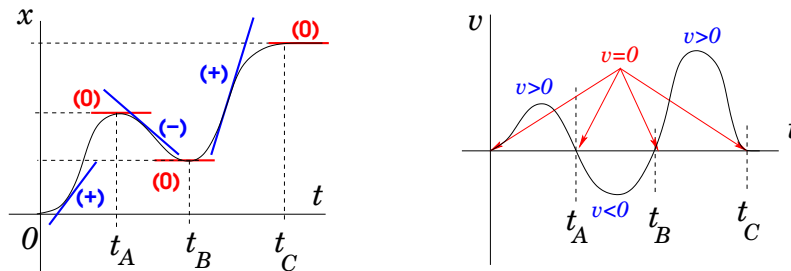


Figura 2.5: Izquierda: tangentes (escogidas) del gráfico de la Fig. 2.2; Derecha: bosquejo de la velocidad instantánea del pingüino en su movimiento

Relacionada con la velocidad (*velocity* en inglés) está la rapidez (*speed* en inglés). Esta se define como la magnitud (o valor absoluto) de la velocidad. En otras

palabras, la rapidez es siempre una cantidad positiva, indistintamente de cual sea la elección de sentido positivo de ejes.

- IV.- *Aceleración media*: Es un hecho empírico que las velocidades en general no son constantes en el tiempo. Basta subirse a un vehículo y constatar que ellas pueden ser variables. Entonces, al igual como se hizo para definir la velocidad media, definimos la aceleración media a_m mediante

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Esta misma definición se puede escribir como

$$a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

En el SI, el numerador se expresa en m/s, en tanto que el denominador en s. Por lo tanto la aceleración se expresa en m/s², representando la variación que experimenta la velocidad por unidad de tiempo. Como se sabe, todo cuerpo libre sobre la Tierra cae aceleradamente a razón de 9,8 m/s². Esto significa que al cabo de 1 segundo la velocidad aumenta en casi 10 m/s. A escala humana, esta es una tasa de variación bastante significativa.

- V.- *Aceleración instantánea*: Al igual como se definió la velocidad instantánea, definiremos la aceleración instantánea, que denotaremos por $a(t)$. Por mera analogía sustituimos el rol de x por v y definimos entonces

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

El significado geométrico es análogo al de $v(t)$: $a(t)$ está dada por la *pendiente de la tangente* en t , a partir del gráfico v vs t . En el gráfico de la derecha de la

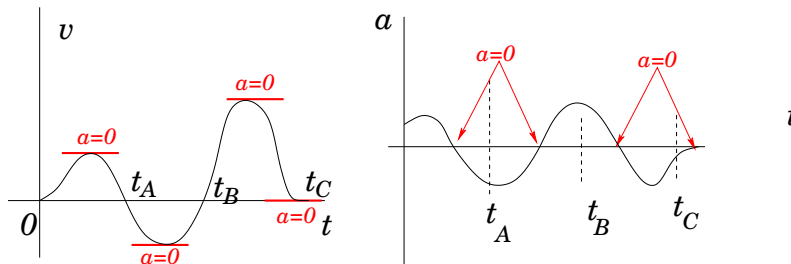


Figura 2.6: Izquierda: tangentes (escogidas) del gráfico de la Fig. 2.5; Derecha: bosquejo de la aceleración instantánea del pingüino en su movimiento

Fig. 2.6 se ha tratado de reproducir la ocurrencia de aceleración nula, dada en

aquellos instantes donde la pendiente de la tangente v vs t es nula. El resto del gráfico es cualitativo. Una descripción más detallada surge de un gráfico donde se proporcionen detalles de las curvas involucradas, o si contamos con la función explícita de $x(t)$, $v(t)$ o $a(t)$. También es posible proceder numéricamente, donde podemos aplicar técnicas numéricas sencillas una vez que se cuente con una tabulación temporal de alguna de las cantidades x , v o a .

2.1.2. Interpretación de áreas

Hasta ahora hemos utilizado los símbolos Δx para denotar una diferencia o variación ‘global’ de x , y dx para representar una variación infinitamente pequeña. Esta vez introduciremos la letra griega δ (delta minúscula) para denotar una variación muy pequeña pero finita, que eventualmente podríamos utilizar en un computador. En el caso de la variable x , δx representa una pequeña variación de x . En cierta forma es similar a dx , con la diferencia de que la primera se puede expresar numéricamente, en tanto que dx es abstracto. Con esta aproximación en mente la velocidad y aceleración instantánea en t quedan dadas aproximadamente por

$$v(t) \approx \frac{\delta x}{\delta t} \quad \Rightarrow \quad \delta x \approx v(t) \delta t ,$$

y

$$a(t) \approx \frac{\delta v}{\delta t} \quad \Rightarrow \quad \delta v \approx a(t) \delta t .$$

Si observamos los gráficos de la Fig. 2.7, vemos que la lonja de la izquierda tiene un área igual a $v \delta t$ (altura $\times$ base), por lo que físicamente representa un pequeño desplazamiento δx . De igual forma el área de la lonja achurada del gráfico derecho (a vs t) está dada

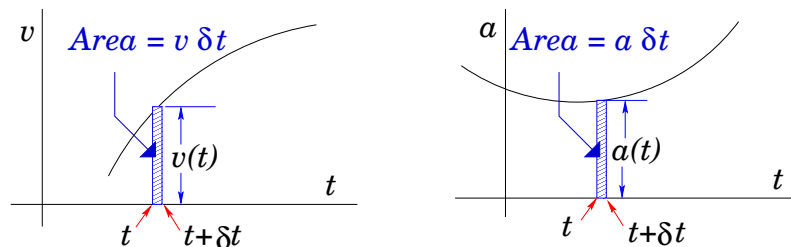


Figura 2.7: Izquierda: elemento de ‘área’ en el gráfico v vs t , representando físicamente un pequeño desplazamiento δx . Derecha: elemento de ‘área’ en el gráfico a vs t , representando una pequeña variación δv de la velocidad.

por $a \delta t$, representando un cambio o variación δv de velocidad.

Estos resultados se pueden combinar con la siguiente observación: *La suma de pequeñas variaciones de una propiedad P es igual a la variación global o total de P .* Esto lo simbolizamos

$$\sum_i \delta P_i = \Delta P.$$

Para ilustrar esta observación, consideremos una secuencia discreta $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{N-1}, P_N$. Las variaciones entre pares consecutivos están dadas por

$$\delta P_1 = P_1 - P_0, \quad \delta P_2 = P_2 - P_1, \quad \dots, \quad \delta P_{N-1} = P_{N-1} - P_{N-2}; \quad \delta P_N = P_N - P_{N-1},$$

los que al sumarlas en forma consecutiva dan

$$\sum_i \delta P_i = (\underline{P_1} - \underline{P_0}) + (P_2 - \underline{P_1}) + (P_3 - P_2) + \dots + (P_{N-1} - P_{N-2}) + (\underline{P_N} - P_{N-1})$$

Si se observa cuidadosamente, en esta suma se cancelan todos los P_i salvo los extremos de la secuencia, dados por P_0 y P_N . Por lo tanto,

$$\sum_i \delta P_i = P_N - P_0 = \Delta P.$$

Esta observación nos permite sostener que al sumar las áreas de las lonjas consecutivas v vs t en el gráfico izquierdo de la Fig. 2.7 obtenemos la variación global o total de x entre los instantes t y $t + \Delta t$, o sea Δx . A ésta se le denomina *desplazamiento total*, y se denota con el área achurada izquierda de la Fig. 2.8. De igual modo, el área achurada del gráfico de la derecha representa la variación total de velocidad, Δv .

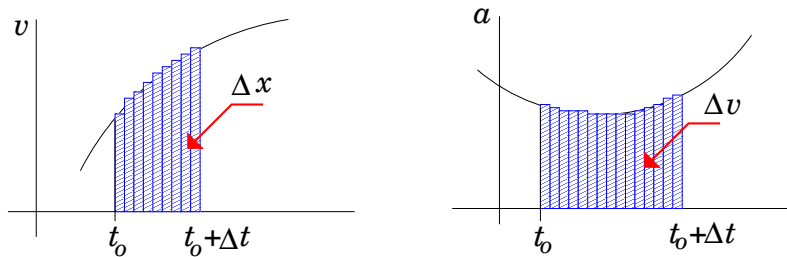


Figura 2.8: Izquierda: desplazamiento total Δx dado por el área bajo la curva v vs t . Derecha: variación total de velocidad Δv dado por el área bajo la curva a vs t .

Haciendo uso de las definiciones y propiedades recién expuestas, analicemos un par de situaciones particulares. Para simplificar haremos uso de un eje coordenado x , con dirección positiva y origen escogidos según el caso.

2.1.3. Movimientos con velocidad constante

Cuando la velocidad de un móvil es constante eso significa que mantiene un valor invariable en el tiempo:

$$v(t) = v_0 \quad \forall t.$$

Esto implica que $v(t + \delta t) = v(t) = v_0$, con lo que $\delta v = 0$, en todo instante. La aceleración es entonces nula. Para obtener el desplazamiento podemos hacer uso del gráfico izquierdo de la Fig. 2.9, donde se grafica $v(t)$ en función de t . Aquí se ve claro que el desplazamiento Δx entre $t = 0$ y t está dado por el área del sector achurado, el que se obtiene multiplicando t (base) por v_0 (altura). Así entonces

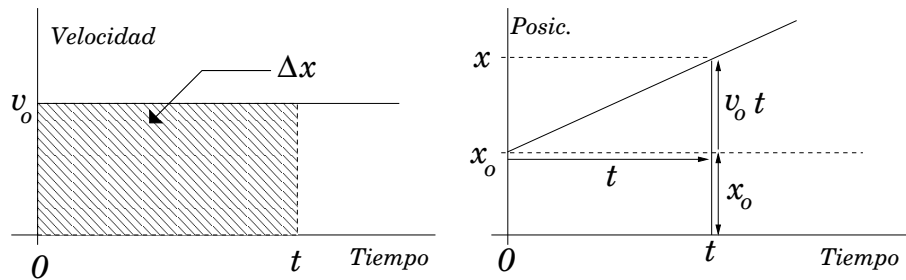


Figura 2.9: Izquierda: Gráfico v vs t para un movimiento con velocidad constante. Derecha: Gráfico correspondiente para la posición en función del tiempo.

$$\Delta x = x(t) - x(0) = v_0 \Delta t = v_0 (t - 0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_0 t,$$

donde hemos denotado $x(t = 0) = x_0$, la posición inicial. Esta dependencia para $x(t)$ representa una línea recta en el gráfico x vs t , cuya pendiente es v_0 , la velocidad. Esto se resume en el gráfico derecho de la Fig. 2.9.

Problemas a resolver en clases

1. Una bolita es lanzada con rapidez v_0 contra una pared, rebotando en sentido opuesto al del impacto, con una rapidez distinta a la de incidencia y dada por λv_0 . El lapso para cubrir el trayecto de ida y vuelta al punto de partida es τ (tau) y la separación entre la pared y el lugar de partida es D . Determinar la constante λ . ¿Qué valores debe tomar τ para que $\lambda > 1$? ¿Cómo se explicaría tal situación?
2. Una bolita A es lanzada con rapidez v_A contra una pared, con la cual rebota en forma perfectamente elástica. La distancia inicial entre A y la pared es D . Cuando el móvil A ha recorrido una distancia $D/2$ hacia la pared, un móvil B es lanzado en la misma dirección con velocidad v_B . Determinar el lugar de encuentro entre las bolitas A y B.

3. Considere una cancha cuadrada de lados de longitud L . Partiendo de una misma esquina, dos móviles se desplazarán a la esquina diagonalmente opuesta. Uno de los móviles tomará un trayecto diagonal, manteniendo una rapidez v_0 constante. El otro móvil se desplazará con rapidez v_0 a lo largo de uno de los lados del cuadrado, hasta llegar a la esquina y virar hacia su destino. Determine la rapidez de B en su segundo tramo a fin de llegar a su destino simultáneamente con A.

2.1.4. Movimientos con aceleración constante

Un movimiento con aceleración constante está caracterizado por el gráfico izquierdo a vs t de la Fig. 2.10. De este gráfico obtenemos Δv a partir del área bajo la curva

$$\Delta v = a \Delta t = a(t - 0) \Rightarrow v(t) - v_0 = at,$$

por lo que

$$v(t) = v_0 + at \quad (2.1)$$

Por lo tanto la velocidad cambia linealmente con el tiempo. Al graficar este resultado

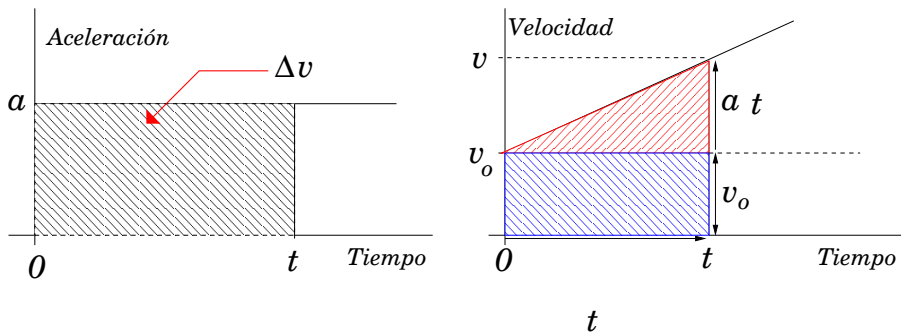


Figura 2.10: Izquierda: Gráfico a vs t para un movimiento con aceleración constante. Derecha: Gráfico correspondiente para v vs t .

—en el gráfico derecho de la Fig. 2.10— el área bajo la curva denotada por las regiones achuradas representa el desplazamiento Δx entre $t = 0$ y t . El área total es la suma de las áreas del a) paralelogramo ($t \times v_0$) y b) triángulo ($\frac{1}{2}t \times at$). Sumando estas contribuciones tenemos

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

por lo que

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \quad (2.2)$$

Aquí, x_0 y v_0 representan la posición y velocidad en $t = 0$, respectivamente. Por lo tanto, la posición cambia cuadráticamente con el tiempo. Claramente el caso $a = 0$ constituye un caso particular de este resultado, que representaría el primer caso que analizamos, aquel donde velocidad es constante.

La Ec. (2.2) permite obtener la posición del móvil en función del tiempo. Para ello se requieren de las *condiciones iniciales*: posición y velocidad. Esta es una característica general del problema donde se plantea obtener $x(t)$ a partir de la aceleración. Si se recuerda, para la obtención de $x(t)$ se buscó primero Δv (que requiere de la velocidad inicial); luego graficamos v vs t para obtener Δx , donde se requiere de $x(0)$ para determinar $x(t)$.

En el caso de movimientos con aceleración constante es posible obtener la velocidad del móvil en función de su posición. Esto es algebraicamente directo si se combinan las Ecs. (2.1) y (2.2) para eliminar la variable t . Es un ejercicio simple que queda propuesto. Una forma alternativa de proceder consiste en considerar el gráfico derecho de la Fig. 2.10. El área achurada representa el desplazamiento Δx , que queda dada por el producto de la base (lapso t) y la *semi-altura* $(v_0 + v)/2$. Por lo tanto

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v)t.$$

Por otro lado, cuando la aceleración es constante tenemos

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Multiplicando los lados correspondientes, simplificando y reordenando términos se obtiene

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x. \quad (2.3)$$

Esta relación puede ser bastante útil en algunas aplicaciones. Por ejemplo, ¿qué aceleración experimenta un pasajero si el vehículo en que viajaba venía a 80 km/h y se detiene luego de resbalar 50 m?

Adicionalmente, la relación anterior nos permite interpretar claramente el sentido de frenar/apurar. Si pensamos en un desplazamiento muy pequeño $\delta x = v\delta t$, vemos que

$$v_2 - v_0^2 = \delta(v^2) = 2av\delta t.$$

Claramente v^2 disminuye (su variación es negativa) si el signo del producto av es negativo. Esto quiere decir que la disminución de la rapidez (frenado) ocurre cuando el producto av es negativo, o sea cuando el sentido de la aceleración es opuesto al de la velocidad. Lo importante en esta observación es que el frenado está determinado por el signo *relativo* entre a y v , y no por el signo individual de a o v .

Problema a resolver en clases

1. Sobre un piso muy resbaladizo una pelota rueda con velocidad constante u . Tan pronto la pelota pasa al lado de un cachorro, éste emprende magna carrera a la siga de ella. El cachorro parte del reposo, resbala todo el tiempo, manteniendo una aceleración constante a hasta alcanzar la pelota. En ese instante –y sin tocar la pelota– el cachorro frena con aceleración de igual magnitud a la de partida. El movimiento de la pelota nunca es alterado. Determinar el instante en que el cachorro alcanza la pelota y la distancia entre ambos cuando el cachorro se detiene.

2.1.5. Movimiento circunferencial

Cuando pensamos en un recorrido lo más general posible de un móvil imaginamos una combinación de trazos rectos y curvos. Para simplificar consideremos el caso de un movimiento plano, donde todos los puntos de la trayectoria yacen sobre un plano. Con la debida información, los tramos rectos los podemos describir recurriendo a líneas rectas como las consideradas en las secciones recientes.

Para los virajes, sin embargo, podemos discurrir a la siguiente construcción: en un punto del trayecto trazamos una tangente y su perpendicular correspondiente. Nos desplazamos levemente a lo largo del trayecto y trazamos una nueva tangente con su perpendicular. Siendo curvo el tramo, las perpendiculares se cruzan en algún punto. El punto

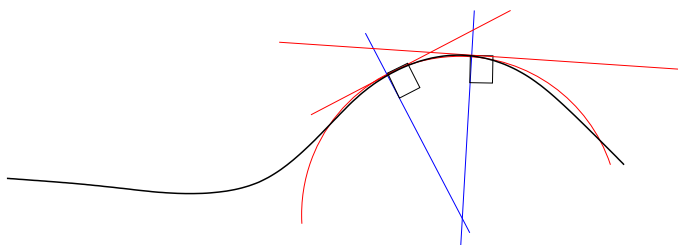


Figura 2.11: Una trayectoria curva donde en un pequeño tramo se identifica un arco de circunferencia. La intersección de las perpendiculares a las tangentes a puntos cercanos corresponde al centro de curvatura del tramo.

donde ello ocurre corresponden al centro de una circunferencia imaginaria, denominada *centro de curvatura*. En esta construcción el arco de la circunferencia entre los dos puntos donde se trazaron las tangentes se superpone al trayecto físico. En ese pequeño tramo el movimiento se puede considerar como circunferencial.

Con el ejemplo anterior ilustramos que el estudio de movimientos circunferenciales va más allá de aquellos estrictamente circunferenciales, como lo son la trayectoria de la Luna alrededor de la Tierra (en aproximación), una boleadora antes de ser lanzada, una de las estrellas de una estrella binaria, o el de un péndulo vertical.

Para comenzar consideremos un móvil en trayectoria circular de radio R , como se ilustra en la Fig. 2.12. En ésta hemos trazado un rayo horizontal que nos servirá de referencia para especificar la ubicación del móvil mediante el ángulo θ expresado en radianes. Este ángulo puede ser positivo, nulo o negativo. En este esquema haremos que los ángulos crezcan en el sentido opuesto al de los punteros del reloj. Entonces,

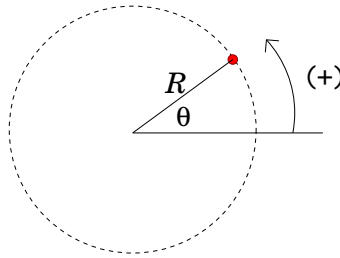


Figura 2.12: Movimiento circular descrito por la variable angular θ , medido con respecto al rayo de referencia horizontal.

la evolución del móvil queda completamente determinada por la dependencia temporal de θ , vale decir por $\theta(t)$. Este ángulo puede tomar valores entre $-\infty$ e ∞ . Al dividirlo por 2π y tomar la parte entera obtenemos el número de vueltas completas. Queda un remanente que permite obtener el ángulo con respecto a la dirección de referencia.

Movimiento angular

Al igual que como se hizo para un movimiento rectilíneo, podemos definir desplazamientos angulares $\Delta\theta$, velocidades angulares ω y aceleraciones angulares α . Las definiciones de estas cantidades son réplicas de las introducidas para movimientos rectilíneos, por lo que los análisis de los casos con velocidad o aceleración constante se replican. En particular, si el movimiento angular es con aceleración constante, entonces

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2; \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta.$$

En la Tabla ?? se resumen las unidades asociadas a estas cantidades. Cabe recordar que la unidad rad es adimensional. Su explicitación sirve de ayuda-memoria para evitar confundirlas con otras cantidades.

Magnitud	Notación	Definición	Unidades
Desplazamiento angular	$\Delta\theta$	$\theta - \theta_0$	rad
Velocidad angular	ω	$d\theta/dt$	rad/s
Aceleración angular	α	$d\omega/dt$	rad/s ²

Movimiento angular uniforme

Cuando la velocidad angular ω es constante surge naturalmente la noción de periodicidad. Se define entonces el período T del movimiento como la duración de un ciclo completo, que ocurre al desplazarse angularmente en 2π :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} .$$

Asociada a esta cantidad está la *frecuencia* (a secas), que aquí denotamos por f ,³ que representa el número de ciclos por unidad de tiempo y que se relaciona con T mediante

$$f = \frac{1}{T} .$$

En el SI la unidad para f es s^{-1} , que se denomina hertz (sin mayúsculas) y que se simboliza Hz. Así,

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1} .$$

En el contexto de velocidad angular constante, a la velocidad angular ω también se le denomina *frecuencia angular*. Como se explicó anteriormente, su unidad SI es rad/s.

Velocidad y aceleración tangencial

Volviendo al caso general de un móvil en un movimiento circunferencial de radio R , si su velocidad angular instantánea en un punto es ω , entonces su velocidad instantánea será ωR . En efecto, cuando la velocidad angular es ω , en un pequeño lapso δt recorre un ángulo $\delta\theta = \omega \delta t$, como se ilustra en la Fig. 2.13. El arco δs correspondiente será

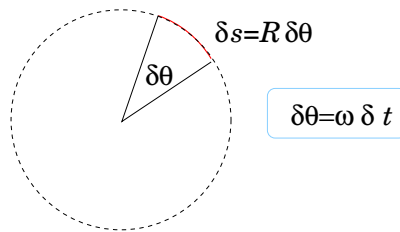


Figura 2.13: Pequeño desplazamiento δs en un lapso δt cuando el móvil tiene velocidad angular instantánea ω .

$\delta s = R \delta\theta = R\omega \delta t$. Por lo tanto

$$\delta s = R\omega \delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta s}{\delta t} = \omega R .$$

³También se denota por ν .

La cantidad δs representa el desplazamiento lineal recorrido a lo largo de la trayectoria en el lapso δt , por lo que $\delta s/\delta t$ representa una velocidad. Denotaremos a esta velocidad v_θ , con lo cual

$$v_\theta = \omega R .$$

Si la velocidad angular es variable, entonces también lo será v_θ . Ello conlleva necesariamente a una aceleración. Se puede justificar en forma muy sencilla que

$$\delta v_\theta = \delta \omega R \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta v_\theta}{\delta t} = \frac{R \delta \omega}{\delta t} \quad \Rightarrow \quad a_\theta = \alpha R ,$$

donde la cantidad a_θ representa la *aceleración tangencial* del movimiento circular y da cuenta del apurar/frenar del movimiento. Más adelante, cuando introduzcamos una descripción vectorial del movimiento, daremos cuenta de otra componente de la aceleración: aquella que da cuenta del viraje.

Problemas a resolver en clases

1. Suponga que el minutero y el horario de un reloj están completamente alineados. Determinar cuanto tiempo debe transcurrir para que se vuelvan a alinear.
2. Cada 2,14 años la distancia entre la Tierra y Marte es mínima. Suponiendo órbitas coplanares, circunferenciales y uniformes, determine el período de órbita de Marte en el sistema solar.
3. A partir de las Leyes de Newton se puede demostrar que, si $\omega^2 R = g$, entonces todo objeto en el ecuador terrestre levitaría. En esta expresión ω representa la velocidad angular de la Tierra, R su radio y $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Determine entonces la duración que tendrían los días en este caso hipotético.

2.1.6. Caída vertical por gravedad

Un hecho empírico que constatamos regularmente es el que todo objeto que sosten-gamos, al ser soltado, cae al suelo. También observamos que objetos tan livianos como una pluma caen al piso más lentamente que como ocurriría con una roca. Además, al observar la caída de una hoja pareciera que los objetos caen con velocidad constante.

Estas observaciones fueron objeto de las teorías de Aristoteles, quien afirmaba que los objetos una vez en el aire caen con velocidad constante y que los más pesados caen más rápidamente que los más livianos. Las ideas de Aristóteles en tiempos de Galileo, que cubrían un amplio campo del conocimiento, eran consideradas verdades absolutas y por lo tanto eran incuestionables. Sus escritos constituían fuente de conocimiento, siendo

estudiadas y aprehendidas profusamente en monasterios de Europa y en las primeras universidades.

Fué hacia fines del siglo XVI y comienzos del XVII, cuando Galileo Galilei plantea refutaciones impecables a muchas de las ideas de Aristóteles, lo que finalmente —con la introducción de la teoría heliocéntrica del sistema planetario— lo lleva a la excomunión por parte de la Iglesia Católica Apostólica Romana. Sólo para ilustrar el ingenio de Galileo, un argumento en contra de la constancia de la velocidad de los cuerpos al caer consiste en el siguiente. Es fácil constatar que al golpear el agua con la mano se salpica agua y que el salpicado es mayor cuanto más rápido sea el golpe. Por lo tanto, una medida indirecta para saber la velocidad con que algo golpea el agua es observando el salpicado. Pues bien, es también verificable que mientras más alto se suelte un objeto sobre una posa de agua, mayor es el salpicado al golpear el agua. De esto se infiere que los objetos al caer no lo hacen con velocidad constante. La velocidad aumenta con el camino recorrido en la caída.

En relación a este mismo fenómeno, otra conjetura de Galileo fué que dos cuerpos de distinta masa deben caer con la misma velocidad. Para ello parte considerando dos cuerpos de igual masa, los que necesariamente caen con igual rapidez. Entonces, si estos cuerpos son dispuestos muy cerca uno del otro y son unidos mediante una tenue telaraña, entonces conformarían un sólo cuerpo del doble de masa. Sin embargo, el par unido por la telaraña cae con la misma velocidad que una de sus partes, como se ilustra en la Fig. 2.14. Con ello se demuestra mediante razonamiento lógico que la velocidad de un cuerpo

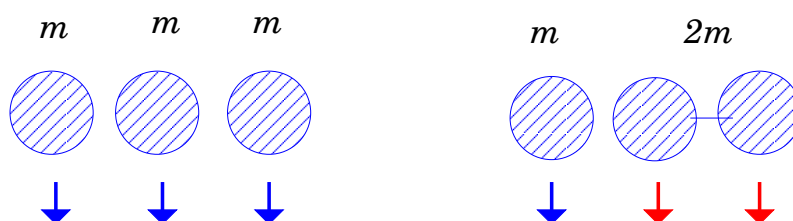


Figura 2.14: Si tres cuerpos de igual masa llegan al suelo simultáneamente, entonces uno de ellos llegará al mismo tiempo que el otro del doble de masa, formado por dos cuerpos unidos por una telaraña.

al caer no puede depender de su masa. Esta conjetura es la que finalmente lleva a Galileo, según se cuenta, al famoso experimento en la Torre de Pisa. Allí, cuerpos pesados pero de diferente masa se hicieron caer al suelo, llegando ellas —según se dice— al mismo instante al suelo. Esta constituiría una demostración empírica de que la aceleración de caída de los cuerpos es la misma.

Galileo argumentaba que la naturaleza no complica las cosas innecesariamente, aludiendo de esta forma a un *Principio de Simplicidad*. Detrás de esta idea hay también

una idea de estética. Su argumento entonces, en el caso de la caída de los objetos en la Tierra, fué que si la caída no era con velocidad constante entonces era con aceleración constante. Para verifivar tal conjeura, Galileo estudió experimentalmente el comportamiento de objetos rodando sobre planos inclinados, encontrando que un objeto partiendo del reposo en tiempos 1, 2, 3, 4, recorre distancias desde el lugar de partida en proporciones $1 : 4 : 9 : 16 : \dots$. Así constata que el desplazamiento del móvil aumenta cuadráticamente con el tiempo,

$$s = \frac{1}{2} a t^2 ,$$

verificando que el movimiento es con aceleración constante. Sin embargo experimentos sobre planos inclinados no permiten a Galileo obtener la aceleración de gravedad g . La determinación de g a partir de resbalamientos en planos inclinados es posible sólo a partir de las Leyes de la Mecánica de Newton, publicadas recién en 1687. Además, recién en tiempos de Galileo surge el péndulo como elemento para medir el tiempo con alguna precisión. Sin embargo, con la información accesible a este autor, no es claro a quien (previo a Newton) se le puede atribuir el valor de g que conocemos actualmente.

1.- Caída vertical. La caída vertical de los cuerpos en la superficie terrestre se explica por la fuerza de atracción gravitacional entre el cuerpo y la Tierra. Tal descripción se estudiará en la Sección subsiguiente. Por ahora aceptaremos como un hecho empírico el que cualquier objeto que se suelte desde el reposo experimentará una caída vertical acelerada hacia abajo⁴. La aceleración del cuerpo es g , con

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2 .$$

Para la descripción del movimiento de un objeto en caída libre nos valdremos de un eje vertical, creciente hacia arriba (puede ser invertido), como se ilustra en el esquema izquierdo de la Fig. 2.15. La coordenada y nos indicará la posición del móvil en ese eje. El nivel $y = 0$ se puede escoger en cualquier parte del eje. Si inicialmente ($t = 0$) el proyectil se ubica en la coordenada y_0 , donde tiene velocidad v_{0y} , entonces

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.4)$$

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (2.5)$$

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0) = -2g\Delta y \quad (2.6)$$

Como vimos en la subsección anterior, las ecuaciones de más arriba sintetizan un movimiento acelerado, con aceleración según el eje y igual a $-g$, vale decir,

$$a_y = -g .$$

⁴En el sentido de un nivel de mayor altitud hacia uno de menor altitud.

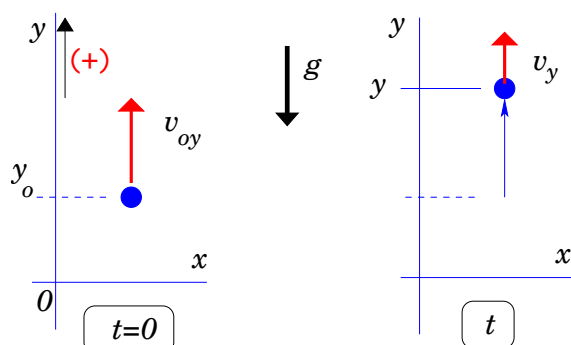


Figura 2.15: Izquierda: lanzamiento vertical de un cuerpo desde $y = y_0$, con velocidad inicial v_{0y} . Derecha: en el instante t el móvil se ubica en y y tiene velocidad v_y .

Aquí es conveniente hacer un par de alcances.

- Notar que la aceleración del cuerpo libre es constante e igual a $-g$. Este signo es consecuencia del sentido escogido para el eje y , creciente hacia arriba, contraria al sentido de la aceleración por gravedad del cuerpo (hacia abajo). De haber escogido el sentido positivo del eje y hacia abajo, entonces $a_y = +g$.
- Dado que la aceleración de gravedad es una manifestación de la fuerza de gravedad entre masas, la heterogeneidad de los suelos en la Tierra conlleva a que g no sea constante en el globo terrestre. En aquellas regiones con mayor densidad de masa –como lo son las regiones rocosas– la aceleración de gravedad resulta mayor que en lugares menos densas.
- La Tierra gira a razón de una vuelta en torno a su eje cada 24 h. Esta rotación conlleva a efectos sobre la *gravedad local*, alterando levemente la caída vertical del cuerpo, a menos que ella ocurra en los polos.

Altura máxima y tiempo de vuelo.-

Consideremos el lanzamiento vertical hacia arriba de un proyectil al cual se le imprime una velocidad de lanzamiento v_0 , como se ilustra en la Fig. 2.16. Para describir el movimiento del proyectil consideremos las Ecs. (2.4), (2.5) y (2.5). Si adoptamos $y_0 = 0$, con $v_{0y} = v_0$, entonces estas ecuaciones toman la forma

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.7)$$

$$v_y = v_0 - g t \quad (2.8)$$

$$v_y^2 - v_0^2 = -2 g y \quad (2.9)$$

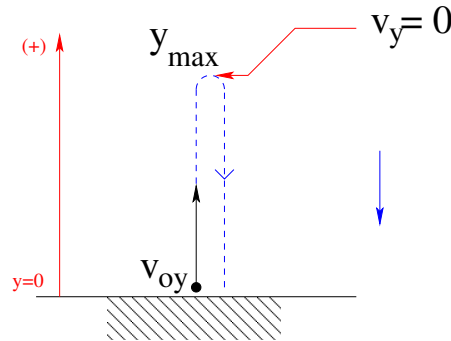


Figura 2.16: Lanzamiento vertical de un proyectil. En el punto de mayor altura la velocidad instantánea es nula.

Haciendo lectura de ellas vemos que la Ec. (2.8) permite conocer la velocidad para todo instante, o a la inversa, el instante para cierta condición en la velocidad. Por lo tanto ella nos puede ser útil para determinar el instante en que el proyectil deja de subir, es decir cuando (instantáneamente) $v_y = 0$. Detrás de este planteamiento está la observación de que cuando el proyectil sube su velocidad es positiva, mientras que cuando baja su velocidad es negativa. Si la velocidad cambia gradualmente con el tiempo, su paso de positiva a negativa exige que en algún instante sea nula. Imponemos en la Ec. (2.8) $v_y = 0$, lo que implica que

$$t \rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}.$$

donde t_1 denota el instante en que el proyectil se detiene instantáneamente.

Analicemos, bajo las mismas condiciones, la Ec. (2.9). Si imponemos $v_y = 0$, obtenemos el y para el cual eso ocurre. Reemplazando

$$0^2 - v_0^2 = -2gy \quad \Rightarrow \quad y \rightarrow y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Nótese cuan importante fué tener el signo correcto de la aceleración.

Por último, reemplacemos t_1 en la Ec. (2.7) para obtener la coordenada y correspondiente.

$$y = v_0 \left[\frac{v_0}{g} \right] - \frac{1}{2}g \left[\frac{v_0}{g} \right]^2 \quad \Rightarrow \quad y \rightarrow y_{max} = \frac{v_0^2}{2g},$$

coincidente con el resultado obtenido anteriormente.

Por último nos preguntamos por el instante en que el proyectil vuelve al lugar de lanzamiento. Uno se ve tentado en afirmar que es el doble del tiempo de subida, lo que es correcto. Sin embargo busquemos una forma de inferir tal resultado.

Observando la Ec. (2.7), si imponemos $y = 0$ nos queda una ecuación cuadrática en el tiempo, con t como única incógnita pues todas las otras variables están definidas. Reemplazando:

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Una solución inmediata es $t = 0$, consistente con la condición inicial que nos dimos ($y = 0$ para $t = 0$). Ahora, si $t \neq 0$, podemos dividir por t cada lado de esta ecuación, lo que implica

$$t \rightarrow t_2 = \frac{2v_0}{g} = 2t_1 ,$$

coincidente con nuestra conjetura. Más aún, con este resultado demostramos que el tiempo en subir hasta y_{max} es el mismo que el necesario para regresar al punto de lanzamiento.

Problemas a discutir en cátedra

1. Considerando el problema anterior, suponga que cuando el proyectil alcanza su punto de máxima altura, un segundo móvil es lanzado con rapidez v_0 hacia arriba. Determinar el punto de encuentro de ambos proyectiles y la altura donde ello ocurre. determine además la velocidad de cada proyectil antes de chocar.
2. Por la ventana pequeña de un edificio se ve pasar en caída vertical un tubo de longitud L (8 m). El tiempo de tránsito del tubo por una marca en la ventana es T (1 s). Determine la altura con respecto a la marca desde la cual comenzó a caer el tubo.

2.1.7. Projectiles en 3D

Otro de los aciertos de Galileo, donde también contravino a Aristóteles, fue el afirmar que los fenómenos físicos que ocurren en un sistema de referencia, han de ocurrir de igual forma en otro sistema que se mueva con velocidad relativa constante. Esto quiere decir, por ejemplo, que el tiempo de caída de un llavero al ser soltado a 1 m de altura con respecto al piso es el mismo si el experimento se hace en el suelo, en el último piso de un edificio, arriba de un ferri arrastrado por la corriente (uniforme), o a bordo de un avión comercial con velocidad constante. En este planteamiento Galileo se abstraía del efecto del aire.

Esta afirmación se contraponía a la noción aristotélica, donde se afirmaba que los cuerpos que se mueven en la Tierra tienen una tendencia natural a detenerse. Por ejem-

plo, si uno salta verticalmente arriba de un ferri en movimiento, entonces uno no cae al punto de donde saltó sino que un poco más atrás.

Si aplicamos el planteamiento de Galileo al fenómeno de caída vertical, imaginemos que un vagón de tren se mueve con respecto al andén con velocidad constante, digamos v_{0x} . El movimiento del vagón es ideal, al punto que la persona en el vagón no percibe el movimiento. Si ella lanza verticalmente un objeto, entonces la posición a lo largo de la vertical está descrita por la Ec. (2.7), vale decir

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2.10)$$

Según el pasajero, la trayectoria es una línea vertical, perpendicular al piso del vagón,

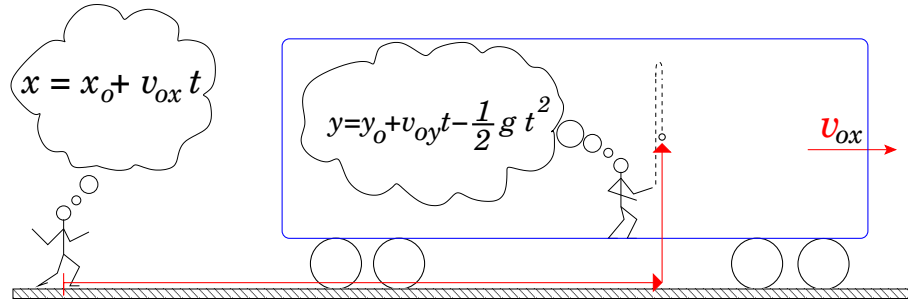


Figura 2.17: La persona en el vagón del tren observa un proyectil en movimiento vertical; la del andén ve alejarse ese trayecto vertical con velocidad constante v_{0x} , la del tren.

pasando por el lugar de lanzamiento del proyectil.

En tanto, una persona en el andén no cuenta con información sobre la altura del proyectil en el eje vertical. Sin embargo, si puede dar cuenta de la posición de la línea vertical a lo largo de la cual se desplaza el proyectil. Esa línea se aleja con la misma velocidad que la del tren, v_{0x} , constante. Por lo tanto, la ubicación del proyectil en la horizontal es

$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad (2.11)$$

donde x_0 representa la ubicación inicial ($t = 0$) del proyectil a lo largo del eje x .

Esta construcción nos permite dar cuenta de la posición espacial (x, y) del proyectil con respecto a un origen en el andén. Para ello nos valemos de la información $x(t)$ dada por la persona del andén, y altura $y(t)$ aportada por el pasajero. El movimiento del proyectil queda contenido en el plano vertical xy en la dirección del tren.

OBSERVACIONES:

1. Una vez lanzado un proyectil su *desplazamiento horizontal* es con velocidad constante.

2. El desplazamiento vertical se rige de forma idéntica a la estudiada en la subsección anterior.
3. Para especificar la velocidad de lanzamiento del proyectil podemos proporcionar las velocidades iniciales según x e y , especificadas por v_{0x} y v_{0y} . Alternativamente se pueden usar la rapidez de lanzamiento v_0 y el ángulo de elevación θ , como se ilustra en la Fig. 2.18. En esta figura el desplazamiento δx al cabo de un lapso δt

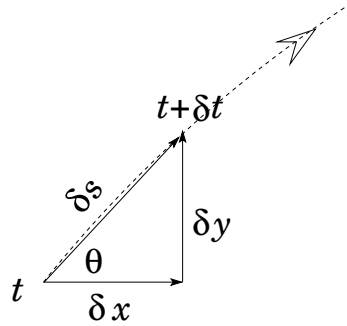


Figura 2.18: Geometría del lanzamiento de un proyectil, especificada por su rapidez inicial y ángulo de elevación θ .

es $v_{0x}\delta t$. Lo mismo para el desplazamiento según la vertical, por lo que

$$\delta x = v_{0x}\delta t, \quad \delta y = v_{0y}\delta t.$$

Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura y despejando δs (el desplazamiento a lo largo de la trayectoria) tenemos

$$\delta s = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \delta t \equiv v_0 \delta t.$$

En esta última hemos definido la *rapidez* inicial de lanzamiento como

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}.$$

Para el ángulo de elevación tenemos

$$\tan \theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}.$$

A la inversa, si contamos con la rapidez de lanzamiento v_0 y ángulo de elevación θ , entonces

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta.$$

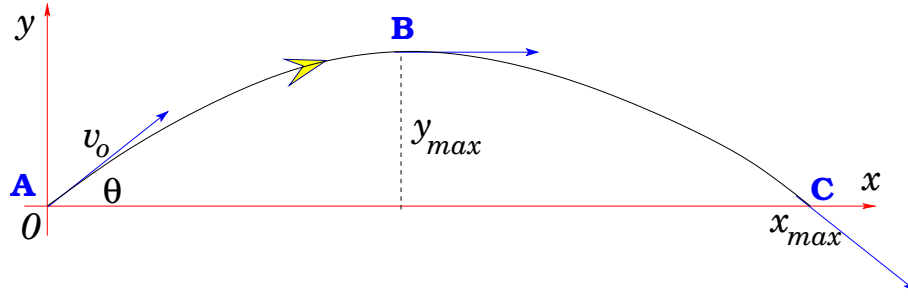


Figura 2.19: Trayectoria de un proyectil lanzado con rapidez v_0 y ángulo de elevación θ .

Estudiamos el movimiento de un proyectil lanzado sobre un plano horizontal. El lanzamiento se hace desde el piso, con ángulo de elevación θ y rapidez v_0 , como se muestra en la Fig. 2.19. Adoptamos un sistema de ejes xy , con x horizontal e y vertical hacia arriba. Supondremos que en $t = 0$ el proyectil parte desde el origen. Las velocidades iniciales son

$$\begin{Bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{Bmatrix}$$

La evolución en x queda dada por

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad \rightarrow \quad x = v_0 \cos \theta t . \quad (2.12)$$

Para $y(t)$ tenemos

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 . \quad (2.13)$$

Para la velocidad según la vertical tenemos

$$v_y = v_{0y} - gt \quad \rightarrow \quad v_y = v_0 \sin \theta - gt . \quad (2.14)$$

Utilicemos estas ecuaciones para caracterizar los hitos A, B y C de la Fig 2.19.

Hito **A** Aquí ocurre el lanzamiento del proyectil ($t=0$). Las Ecs. (2.12), (2.13) y (2.14) reproducen la posición y velocidad cuando $t = 0$.

Hito **B** Aquí el proyectil deja de subir ($v_y = 0$), alcanzando su altura máxima. Utilizando la Ec. (2.14), donde hacemos $v_y = 0$, obtenemos

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g} .$$

Reemplazando este tiempo en la Ec. (2.13) para $y(t)$ obtenemos la altura máxima:

$$y \rightarrow y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} .$$

Hito **C** En este caso el proyectil ha vuelto al suelo. Eso es equivalente a afirmar que $y(t) = 0$. Imponiendo esta condición en la Ec. (2.13) tenemos

$$0 = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} .$$

Para encontrar la coordenada x cuando impacta al suelo, entonces utilizamos $x = v_0 \cos \theta t$. Evaluando,

$$x \rightarrow x_{max} = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} . \quad (2.15)$$

Para este mismo hito calculemos la velocidad de desplazamiento vertical. Para ello evaluamos $v_y(t)$ en el instante de llegada al suelo. Reemplazando obtenemos

$$v_y = -v_0 \sin \theta .$$

Este resultado es ilustrado en el hito C de la Fig. 2.19.

Volviendo al tema del alcance máximo dado por la Ec. (2.15), el ángulo θ que permite el mayor alcance cumple con la condición $\sin(2\theta) = 1$, vale decir

$$\theta = \frac{\pi}{4} .$$

Cuando el ángulo de lanzamiento coincide con $\pi/4$, entonces el alcance D del proyectil es

$$D = \frac{v_0^2}{g} .$$

Esta observación fué muy bien recibida por los militares balísticos contemporáneos a Galileo, en el siglo *XVII*.

El resultado anterior es consistente con el hecho de que la trayectoria del proyectil, es decir la relación entre sus coordenadas x e y , es una parábola. Para demostrar esto consideramos el caso general, notando que $x = x_0 + v_{0x} t$. Con ello, x tiene una dependencial *lineal* en t . Por otro lado,

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Reemplazando $t = (x - x_0)/v_{0x}$, se obtiene

$$y - y_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} (x - x_0) - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{v_{0x}^2} = \tan \theta (x - x_0) - \frac{g}{2} \frac{(x - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} .$$

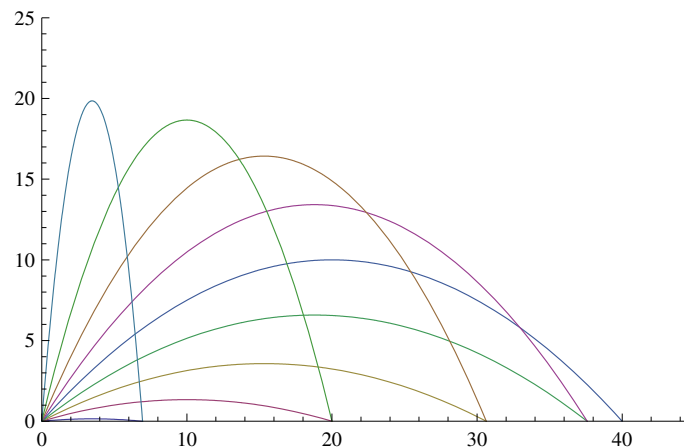


Figura 2.20: Trayectorias de proyectiles lanzados con ángulos de elevación entre 5° y 85° , en pasos de 10° . El alcance horizontal es máximo para $\theta = 45^\circ$. Las unidades de los ejes son arbitrarias.

Esta representa una parábola de curvatura negativa, consistente con el hecho de que la aceleración del proyectil apunta hacia abajo. En la Fig. 2.20 se muestran las trayectorias resultantes para $\theta = 5^\circ : 10^\circ : 85^\circ$. En ella se puede apreciar que la de mayor alcance se da para $\theta = 45^\circ$.

Problemas a resolver en cátedra

1. Un manajo de llaves desliza con rapidez v_0 sobre una mesa horizontal de altura h con respecto al piso. Determine cuan lejos llega el manajo con respecto a las patas de la mesa una vez sale de ella e impacta el piso. Si el manajo no rebota, pero mantiene su velocidad horizontal inmediatamente después de caer al piso, determine cuan lejos de la mesa se detiene suponiendo que frena con aceleración constante μg sobre el piso.
2. Una bola de goma cae sobre una cúpula semiesférica dura de radio R . La bola se suelta a una altura H desde el suelo y a una distancia b de la vertical que pasa por el centro de la cúpula. La bola rebota elásticamente en la cúpula. Calcule la altura máxima con respecto al suelo alcanzada por la bola después del rebote.
3. Determine el alcance máximo de un proyectil lanzado con rapidez v_0 y ángulo de elevación θ relativo al piso, el cual está inclinado cuesta abajo en un ángulo β con respecto a la horizontal. Verificar el resultado en el caso de un piso horizontal.

En la Fig. 2.21 se muestra una ilustración sobre balística de un libro de artillería

de Diego Ufano. Los números que aparecen contiguos a las esferas inferiores son, de

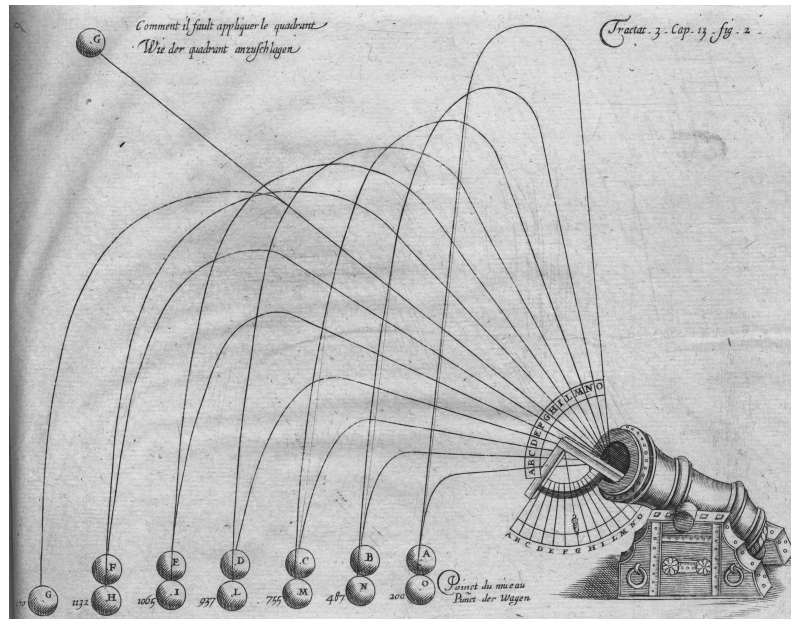


Figura 2.21: Trayectorias balísticas de proyectiles lanzados por un cañón, según Diego Ufano (1628).

izquierda a derecha, 1170, 1132, 1065, 937, 755, 487 y 200, los cuales denotarían el alcance de los proyectiles en unidades de la época. Se propone inferir, a partir de esta lámina, la rapidez con que es eyectada la bola del cañón.

Capítulo 3

Cinemática vectorial

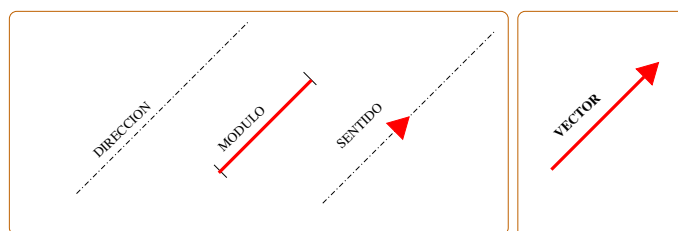
3.1. Vectores

En física muchas veces nos vemos en la necesidad de representar cantidades que conllevan información (orientación) espacial. Por ejemplo, un desplazamiento al caminar, flujos de materia en corrientes de agua, el acto de empujar algo en alguna dirección, etc. Para caracterizar estas cantidades nos será útil el uso de *vectores*, artefactos que podremos operar de acuerdo a ciertas reglas específicas, construidas en su origen para representar ideas observadas. Primero definiremos informalmente vectores en un espacio tridimensional (3D) y luego algunas operaciones entre ellos.

Entenderemos por vector a un objeto que conlleva la siguiente información:

- i.- *dirección*, o recta imaginaria que hace de soporte una dirección espacial;
- ii.- *magnitud*, también referido como *tamaño*, *módulo* o *norma*; y
- iii.- *sentido*, que especifica uno de los dos sentidos permitidos por la recta soporte.

Estas tres características se ilustran en la figura de más abajo. Es común representar gráficamente a un vector mediante una flecha, con la línea de la flecha siguiendo la dirección del vector y la punta (o cabeza) su sentido.



El vector ilustrado más arriba lo denotaremos en forma compuesta con el uso de dos símbolos: una letra y una flecha ' $\rightarrow$ ' sobrepuesta a la letra. Por ejemplo $\vec{A}$ denota un vector de magnitud A . Con esta convención resulta evidente que $\vec{A}$ y A denotan cantidades completamente distintas. La primera es un vector, mientras que la segunda es un escalar.

Es interesante notar que dos vectores son idénticos si sus direcciones, módulos y sentidos coinciden. Con ello, réplicas paralelas de un vector dado representan al mismo vector.

3.1.1. Operaciones elementales

No pretendemos ser exhaustivos en este tema. Sólo buscamos presentar algunas nociones que sean instrumentales a las aplicaciones que se verán más adelante. Comenzaremos con algunas definiciones y propiedades.

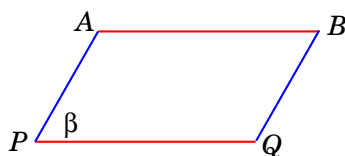
3.1.1.1. Suma de vectores

Consideremos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. La suma de ambos vectores es un vector. Si denotamos por $\vec{C}$ la suma de ambos, entonces

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}.$$

La dirección, magnitud y sentido de C se construye de acuerdo a la regla del paralelogramo.¹ En ella la cola del vector $\vec{B}$ se une a la cabeza de $\vec{A}$. La resultante corresponde al vector que une la cola de $\vec{A}$ con la cabeza de $\vec{B}$, como se ilustra en la Fig. (3.1).

¹Un paralelogramo es una figura plana de cuatro lados, con sus lados opuestos son paralelos y de igual longitud. Un paralelogramo queda completamente definido por la longitud de cada lado y el ángulo entre dos de sus lados contiguos. Por ejemplo, $\overline{PA}$, $\overline{PQ}$ y β .



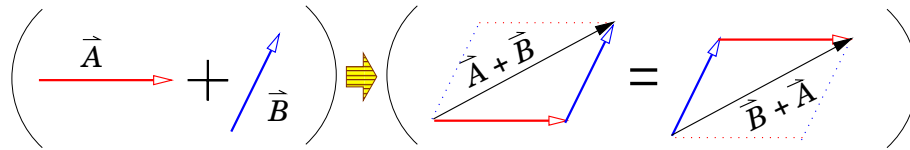


Figura 3.1: Suma de dos vectores

3.1.1.2. El vector nulo

Al vector nulo lo denotamos por $\vec{0}$, consiste en un vector de tamaño nulo. Este vector es único y satisface la propiedad

$$\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}.$$

Gráficamente el vector nulo tiene el aspecto de un punto, con dirección y sentido indeterminados.

3.1.1.3. El inverso aditivo

Para todo vector $\vec{A}$ existe un vector $\vec{A}'$ tal que al sumarlos resulte el vector nulo. Tal vector lo denotamos por $-\vec{A}$, cuya magnitud es A , dirección igual a la de $\vec{A}$ pero con sentido opuesto al de $\vec{A}$. Así,

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{0}.$$

Como se ilustra en la Fig. (3.2), el vector $-\vec{A}$ es el mismo vector $\vec{A}$, pero en dirección opuesta.

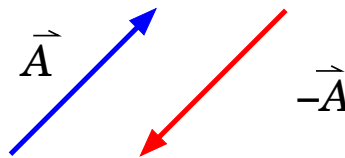


Figura 3.2: El inverso aditivo.

3.1.1.4. Multiplicación por escalar

Todo vector puede ser multiplicado por un escalar. Si el escalar es adimensional, entonces la multiplicación por escalar puede elongar el vector original, contraerlo o incluso

cambiarlo de sentido. La noción más elemental surge de sumar $\vec{A}$ consigo mismo: $\vec{A} + \vec{A}$. Claramente el tamaño de este vector es $2A$, en tanto que tanto su dirección como sentido siguen siendo el mismo que el de $\vec{A}$. La extensión a un número real positivo es inmediata: $\lambda\vec{A}$ representa un vector de igual dirección y sentido que $\vec{A}$ pero cuya magnitud es λA .

En forma bastante general podemos formular

$$(\alpha + \beta)\vec{A} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{A}.$$

Resulta evidente entonces que $(-1)\vec{A}$ es el inverso aditivo de $\vec{A}$. Vale decir, $(-1)\vec{A} = -\vec{A}$. En general, si un vector es multiplicado por un escalar negativo, el vector resultante tiene sentido opuesto al del original.

3.1.1.5. Vectores unitarios

Dado un vector $\vec{A}$, el vector $\hat{A}$ –donde se ha sustituido la flecha sobre A por el caret ‘^’– denotará un vector de tamaño igual a la unidad (unitario) cuya dirección y sentido coinciden con los de $\vec{A}$. La única diferencia entre $\vec{A}$ y $\hat{A}$ puede radicar en su magnitud:

$$|\hat{A}| = ||\hat{A}|| = 1.$$

Con lo anterior es evidente que

$$\vec{A} = A\hat{A}.$$

Claramente los vectores unitarios son *adimensionales*. Si el vector $\vec{A}$ acarrea dimensiones, entonces ellas se expresan en A , su magnitud.

3.1.1.6. División por escalar

Sin caer en ambigüedades, la división de un vector por un escalar se entenderá de la siguiente forma:

$$\frac{\vec{A}}{\lambda} \equiv \lambda^{-1} \vec{A} = \frac{1}{\lambda} \vec{A}.$$

En otras palabras, la división por escalar es lo mismo que multiplicar al vector por el inverso del escalar.

Es importante hacer notar que no contamos con una definición para la división entre dos vectores. Tal operación es inválida.

3.1.1.7. Resta de vectores

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores, entonces definimos la resta de $\vec{B}$ con $\vec{A}$ mediante la suma de $\vec{B}$ con el inverso de $\vec{A}$,

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{B} + (-\vec{A}).$$

Gráficamente este vector une la cola del vector $-\vec{A}$ con la cabeza de $\vec{B}$, como se ilustra en la Fig. (3.3).

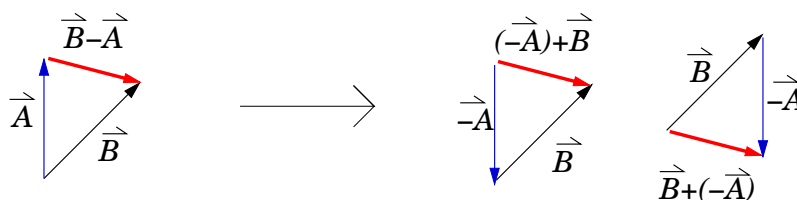


Figura 3.3: Resta de dos vectores.

3.1.2. Propiedades vectoriales

Resumimos algunas propiedades de sumas vectoriales.

1. *Conmutatividad:* $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$;
2. *Asociatividad:* $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$;
3. *Existencia del cero:* $\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$;
4. *Inverso aditivo:* Para todo vector $\vec{A}$ existe su inverso aditivo, que denotamos $-\vec{A}$, que cumple $\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{0}$.
5. *Multiplicación por escalar:* Dado un vector $\vec{A}$ y un escalar λ , el producto $\lambda\vec{A}$ es un vector de magnitud $|\lambda|A$ y dirección igual a la de $\vec{A}$. El sentido depende del signo de λ . Si $\lambda > 0$, el sentido coincide con el de $\vec{A}$, en tanto que si $\lambda < 0$, el sentido es opuesto al de $\vec{A}$.

3.1.3. Vector posición y desplazamiento

Un caso de mucho interés en esta primera parte lo constituye la descripción de movimientos. Para ello uno recurre al vector posición de un objeto a estudiar. Podemos

imaginar una marca en el objeto, la cual denotaremos por P [ver Fig. (3.4)]. La posición de tal marca debe estar referida a un *origen* o punto de referencia, la cual puede ser una marca física: una esquina, una piedrecilla, un clavo, o incluso un punto imaginario.

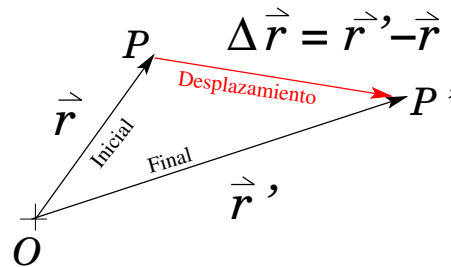


Figura 3.4: El vector desplazamiento.

El origen de este *sistema de referencia* lo denotaremos por O. El vector posición inicial queda definido totalmente por:

- i.- Módulo: la longitud del trazo $\overline{OP}$;
- ii.- Dirección: la recta que pasa por los puntos O y P; y
- iii.- Sentido: desde O hacia P.

El vector que representa la posición de P lo denotamos con $\vec{r}$. Si el punto P experimenta una traslación desde P hacia P', cuya posición está dada por $\vec{r}'$, entonces podemos definir el vector *desplazamiento*, dado por:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}.$$

Note que la suma de dos desplazamientos consecutivos es igual al desplazamiento entre los puntos extremos. En efecto, considere tres posiciones consecutivas, dadas por los vectores $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Los desplazamientos respectivos son $\vec{\Delta}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ y $\vec{\Delta}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. La suma de ellos es

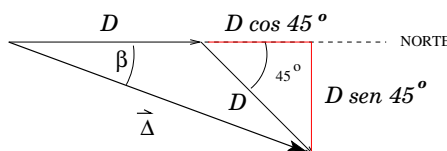
$$\vec{\Delta} = \vec{\Delta}_1 + \vec{\Delta}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_0.$$

Ejemplo.- Un caminante se desplaza 100 m hacia el norte y luego 100 m hacia el noreste. Determinar la magnitud, dirección y sentido del desplazamiento total.

Este problema queda resuelto una vez que determinemos las tres propiedades que caracterizan al vector. Para ello examinamos la figura de abajo, donde se dibujan los dos desplazamientos y la relación geométrica entre ambos. La magnitud del desplazamiento total (Δ) se obtiene directamente utilizando el Teorema de Pitágoras: $\Delta^2 = (D +$

$D/\sqrt{2})^2 + (D/\sqrt{2})^2$, de donde $\Delta = D\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1,85 D$. Por lo tanto $\Delta \approx 185$ m. La dirección la podemos especificar mediante el ángulo β , para el cual observamos:

$$\tan \beta = \frac{D/\sqrt{2}}{D + D/\sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow \beta \approx 22,5^\circ.$$



3.1.4. Representación cartesiana de un vector

Consideremos el plano cartesiano bidimensional. En él contamos con dos ejes perpendiculares, graduados, formando una malla rectangular. Todo punto queda determinado por sus coordenadas (x, y) . Consideremos un vector $\vec{r}$, el cual une el origen del sistema con el punto P dado por las coordenadas (x, y) . Construiremos dos vectores unitarios de la siguiente forma. El primero consiste en desplazar el punto P *incrementando* x en δx , mientras y se mantiene invariable. El desplazamiento correspondiente resulta un vector de tamaño δx , paralelo al eje x . Este vector es dividido por δx , resultando un vector unitario paralelo al eje x . Lo denotaremos por $\hat{x}$.

El segundo desplazamiento se logra incrementando y en δy , manteniendo x constante. El desplazamiento correspondiente va esta vez paralelo al eje y , en sentido de y creciente. Dividimos por δy para obtener el vector unitario $\hat{y}$.

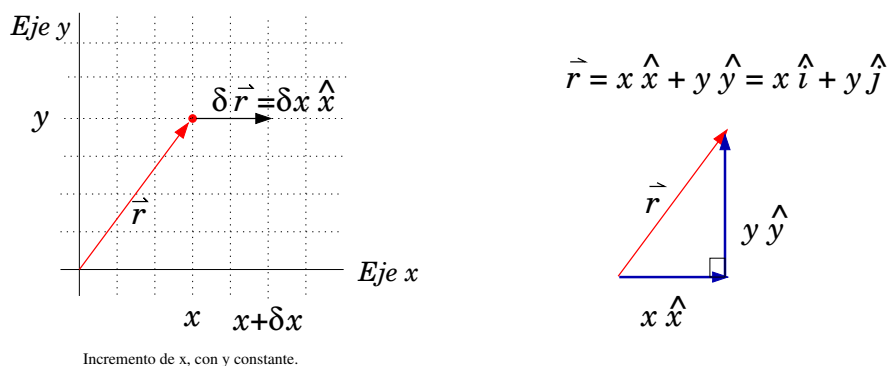


Figura 3.5: Coordenadas cartesianas y vectores unitarios asociados.

Como se observa en la Fig. (3.5), los vectores unitarios $\hat{x}$ e $\hat{y}$ resultan perpendiculares entre sí. Por tal razón se les denomina *ortonormales*. Si agregamos una tercera dimensión al problema, mediante la coordenada z , un vector $\vec{r}$ se puede representar entonces

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}.$$

Es común denotar los vectores unitarios $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ por $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$, respectivamente.

Un vector en general queda expresado, en coordenadas cartesianas, de la forma:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}.$$

Las cantidades A_x , A_y y A_z se denominan *componentes* cartesianas del vector.

Con esta construcción examinemos la suma de dos vectores. Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores dados por sus componentes cartesianas. Entonces, la suma de ambos la expresamos

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \\ &= (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}. \end{aligned}$$

La lectura de este resultado es directa: las componentes de una suma de vectores son igual a la suma de las componentes respectivas. De igual forma, las componentes de una resta de vectores son iguales a la resta de las componentes respectivas, vale decir

$$\vec{B} - \vec{A} = (B_x - A_x) \hat{i} + (B_y - A_y) \hat{j} + (B_z - A_z) \hat{k}.$$

Un resultado interesante, en coordenadas cartesianas, es la forma que toma el módulo del vector $\vec{A}$. La ortogonalidad de los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$, conjuntamente con el Teorema de Pitágoras, conducen a

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

En efecto, considérese el esquema de la Fig. (3.6), donde se muestran las componentes de un vector $\vec{A}$. La diagonal $\overline{OP}$ en el plano xy tiene longitud $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$. Esta diagonal y la vertical $\overline{PQ}$ conforman los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es de longitud A . Claramente,

$$A^2 = (A_x^2 + A_y^2) + A_z^2,$$

como se esperaba.

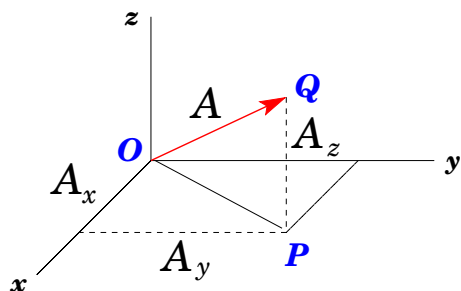


Figura 3.6: Componentes cartesianas del vector $\vec{A}$.

3.1.5. El producto punto entre dos vectores

Cuando contamos con dos vectores, la cantidad de operaciones que uno puede inventar (definir) entre ellos es infinita: es sólo cuestión de imaginación. En particular, pueden haber muchas definiciones de productos vectoriales. De hecho, a partir de dos vectores se puede obtener un escalar, otro vector, tensores, etc. Entonces, ¿qué criterio usamos para definir un producto entre vectores?. Por ahora introduciremos uno de estos productos —*el producto punto*— que responde a una pregunta bastante sencilla y a su vez práctica: supongamos que conocemos completamente dos vectores. ¿Cuál es el ángulo entre ellos?

Por simplicidad consideremos dos vectores en el plano xy ,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}, \quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}.$$

Notar que estos dos vectores, y relaciones entre ambos, quedan totalmente determinados por sus componentes cartesianas. Busquemos entonces por el ángulo entre ellos.

En la Fig. (3.7) se ilustran los dos vectores. Mediante el uso del Teorema del Coseno podemos relacionar la longitud del segmento $\overline{PQ}$, que denotaremos Δ , con el ángulo θ ,

$$\Delta^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta. \quad (3.1)$$

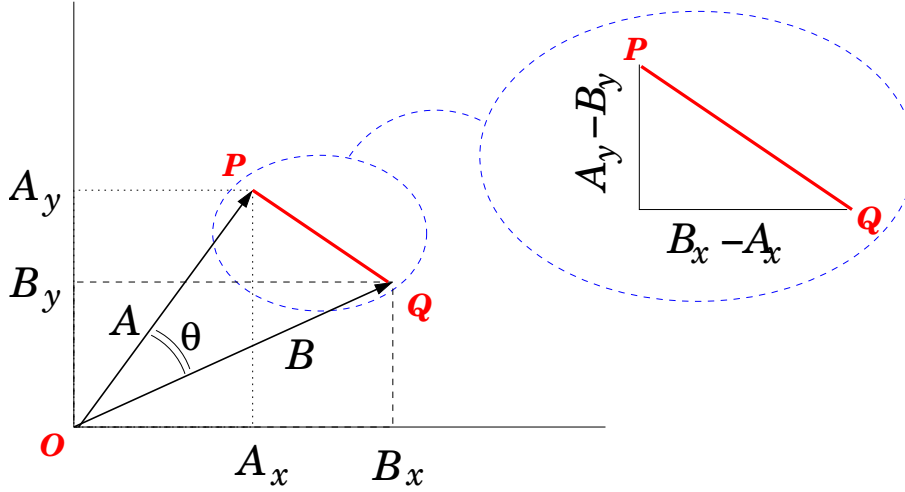


Figura 3.7: Dos vectores y el ángulo entre ellos.

Por otro lado, el segmento $\overline{PQ}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos dados por $|B_x - A_x|$ y $|A_y - B_y|$, por lo que

$$\Delta^2 = (B_x - A_x)^2 + (A_y - B_y)^2 = (A_x^2 + A_y^2) + (B_x^2 + B_y^2) - 2(A_x B_x + A_y B_y). \quad (3.2)$$

Combinando esta ecuación con la Ec. (3.1), teniendo en cuenta que $A^2 = A_x^2 + A_y^2$, y $B^2 = B_x^2 + B_y^2$, obtenemos

$$AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y, \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{AB}. \quad (3.3)$$

Observe la forma interesante del numerador de esta última fracción. Es un escalar formado por la suma de los productos de las componentes cartesianas. Es una especie de *producto generalizado*, al cual denominaremos *producto punto* o *producto interno* de $\vec{A}$ con $\vec{B}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y. \quad (3.4)$$

Con esta simbología, claramente

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta.$$

Se puede constatar que, si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están dados por sus tres componentes cartesianas, entonces el ángulo entre ellos queda dado por

$$AB \cos \theta = \underbrace{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}_{\vec{A} \cdot \vec{B}} = \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

El producto punto satisface las siguientes propiedades:

1. *Conmutatividad*: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$;
2. *Distributividad c/r a la suma*: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$;
3. *Escalar entre producto*: Para todo escalar λ se cumple $\lambda(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\lambda \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\lambda \vec{B})$;
4. *Módulo de un vector*: $A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$;
5. *Ortogonalidad*: Dos vectores no nulos son ortogonales si y sólo si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$;
6. *Proyección ortogonal*: Si $\hat{u}$ es un vector unitario, entonces $\vec{A} \cdot \hat{u} = A \cos \theta$. Entonces, claramente $\vec{A} \cdot \hat{u}$ representa la *proyección* ortogonal de $\vec{A}$ en la dirección de $\hat{u}$.
7. *Perpendicularidad*: Sabemos que $\hat{i} \perp \hat{j}$, por lo que $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$. Análogo para el resto: $\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$, y $\hat{k} \cdot \hat{i} = 0$. Similarmente, $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$.
8. *Cuadrado de una suma*: $(\vec{A} + \vec{B})^2 \equiv (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = A^2 + B^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$
9. *Suma por diferencia*: La conmutatividad del producto punto permite lo siguiente:

$$(\vec{B} + \vec{A}) \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = \vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{A} = B^2 - A^2.$$

Como consecuencia, si $A = B$, entonces $(\vec{B} + \vec{A}) \perp (\vec{B} - \vec{A})$.

Ejemplo.- Consideremos un caminante que se desplaza una distancia D en cierta dirección, vira en un ángulo θ , para desplazarse una distancia d . Determinar el desplazamiento total y la dirección de éste con respecto al primer tramo.

Esta situación la podemos reducir a dos desplazamientos vectoriales, $\vec{D}$ y $\vec{d}$, con el ángulo entre ambos igual a θ . El vector desplazamiento total $\vec{\Delta}$ está dado por

$$\vec{\Delta} = \vec{D} + \vec{d}.$$

Para la magnitud evaluamos $\vec{\Delta} \cdot \vec{\Delta} = \Delta^2$. Reemplazando y desarrollando,

$$\vec{\Delta} \cdot \vec{\Delta} = (\vec{D} + \vec{d}) \cdot (\vec{D} + \vec{d}) = D^2 + d^2 + 2\vec{D} \cdot \vec{d} = D^2 + d^2 + 2Dd \cos \theta,$$

con lo cual

$$\Delta = \sqrt{D^2 + d^2 + 2Dd \cos \theta}.$$

Para determinar la dirección con respecto al primer tramo, consideremos la relación

$$\vec{\Delta} \cdot \vec{D} = \Delta D \cos \beta,$$

donde β representa el ángulo entre $\vec{D}$ y el desplazamiento total. Por otro lado podemos escribir

$$\vec{\Delta} \cdot \vec{D} = (\vec{D} + \vec{d}) \cdot \vec{D} = D^2 + Dd \cos \theta .$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos

$$\Delta D \cos \beta = D^2 + Dd \cos \theta ,$$

de donde obtenemos $\cos \beta = (D + d \cos \theta) / \Delta$, o bien

$$\cos \beta = \frac{D + d \cos \theta}{\sqrt{D^2 + d^2 + 2Dd \cos \theta}} .$$

Verifiquemos estos resultados en situaciones especiales.

- i.- Desplazamientos consecutivos sin viraje. En este caso $\theta = 0$, por lo tanto $\cos \theta = 1$. Reemplazando obtenemos $\Delta = D + d$ y $\cos \beta = 1$ ($\beta = 0$), ambos resultados esperados.
- ii.- Segundo desplazamiento con un viraje en π , con lo cual $\cos \theta = -1$. En este caso se obtiene $\Delta = \sqrt{(D - d)^2} = |D - d|$. Para el ángulo β : $\cos \beta = (D - d) / |D - d|$, llevando a $\beta = 0$ si $D > d$ y $\beta = \pi$, si $d > D$.

Notar que en este desarrollo se prescindió de la descomposición xy de los vectores. Es un buen ejercicio usar tal descomposición para apreciar las ventajas y desventajas de cada enfoque.

3.1.6. Desplazamientos y velocidad media en cartesianas

Consideremos un móvil en movimiento sobre un plano, el cual reticulamos con coordenada cartesianas xy . Las posiciones inicial y final de móvil son

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j}; \quad \vec{r}_f = x_f \hat{i} + y_f \hat{j} ,$$

respectivamente. Entonces el vector desplazamiento queda definido por

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \underbrace{(x_f - x_i)}_{\Delta x} \hat{i} + \underbrace{(y_f - y_i)}_{\Delta y} \hat{j} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} .$$

Con esta construcción es directa la definición de *velocidad media* entre los instantes t_a y t_b , con $\Delta t = t_b - t_a$:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} , \quad (3.5)$$

Notar que la velocidad media es un vector cuya dirección y sentido coinciden con la de $\Delta \vec{r}$, el desplazamiento. En coordenadas cartesianas esta velocidad media toma una forma aún más específica:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} .$$

Si un móvil experimenta un movimiento de poca variabilidad, o lo que es lo mismo, más o menos uniforme, entonces $\vec{v}_m$ no varía significativamente. Tomando la Ec. (3.5), haciendo la correspondencia $t_a \rightarrow t_o$ y $t_b \rightarrow t$, podemos escribir

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{t - t_o} \Rightarrow \Delta \vec{r} = \vec{v}_m (t - t_o).$$

Gráficamente, los desplazamientos se dan en la dirección de $\vec{v}_m$, aumentando linealmente con el tiempo. Esta idea nos será muy útil cuando estudiemos movimientos relativos.

3.1.7. Tres ejemplos ilustrativos sobre vectores

I.- Sean los vectores $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$, y $\vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$. Determinar a) Las magnitudes A y B ; b) El ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$; c) El ángulo entre $\vec{A} + \vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$; y d) El ángulo entre $\vec{A}$ y el eje x .

a) Las magnitudes: $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (4\hat{i} + 3\hat{j}) \cdot (4\hat{i} + 3\hat{j}) = 16 + 9 = 25$, por lo cual $A = 5$. Análogamente para B .

b) Para el ángulo ϕ entre ambos utilizamos $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$. Calculamos $\vec{A} \cdot \vec{B} = 4 \times 3 + 3 \times 4 = 24$. Por lo tanto $24 = 5 \times 5 \times \cos \phi \rightarrow \cos \phi = 24/25$, de donde $\phi = 16,3^\circ$ (0.284 rad).

c) La suma: $\vec{A} + \vec{B} = 7\hat{i} + 7\hat{j}$; La resta: $\vec{A} - \vec{B} = (4 - 3)\hat{i} + (3 - 4)\hat{j} = \hat{i} - \hat{j}$. Con ello $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = (7\hat{i} + 7\hat{j}) \cdot (\hat{i} - \hat{j}) = 0$, por lo tanto son vectores perpendiculares.

d) Para el ángulo β entre $\vec{A}$ e $\hat{i}$ utilizamos $\vec{A} \cdot \hat{i} = A \times 1 \times \cos \beta$. Claramente $\vec{A} \cdot \hat{i} = 4$, por lo que $4 = 5 \cos \beta \rightarrow \cos \beta = 4/5$, entonces $\beta = 36,9^\circ$ (0.644 rad).

Se sugiere ilustrar los resultados obtenidos en forma gráfica, dibujando los vectores considerados y relaciones angulares entre ellos.

II.- Considere el vector $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$. Construya un vector en el mismo plano, unitario, perpendicular a $\vec{B}$.

La forma más general que podemos dar al vector a encontrar es $\vec{C} = a\hat{i} + b\hat{j}$, con a y b variables escalares por determinar. Exigimos que $\vec{B}$ y $\vec{C}$ sean perpendiculares, es decir $\vec{B} \cdot \vec{C} = 0$. Entonces, $2a + 4b = 0$, por lo que $b = -a/2$. Por lo tanto el vector $\vec{C}$ toma la forma $\vec{C} = a\hat{i} - (a/2)\hat{j} = a[\hat{i} - (1/2)\hat{j}]$. Imponemos que $C^2 = 1$ (unitario), con lo cual $1 = a^2(1 + 1/4)$. Así, $a = \pm 2/\sqrt{5}$. Entonces $\vec{C} = \pm (2/\sqrt{5})[\hat{i} - (1/2)\hat{j}]$. El doble signo indica que las dos soluciones son vectores en sentidos opuestos. Ambas soluciones

cumplen con la exigencia de ortogonalidad.

III.- (Variante propuesta): La posición de un objeto en una circunferencia está dada por $\vec{r} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$. Encuentre un vector unitario colineal a $\vec{r}$, y otro unitario y perpendicular a $\vec{r}$. El vector debe quedar expresado en términos de θ .

IV.- Ejercicio propuesto: Considere las siguientes relaciones vectoriales correspondientes al movimiento de un cuerpo con aceleración vectorial $\vec{a}$ constante:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad y \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2.$$

Demuestre que $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$, ¡cuidando de no dividir por vectores!.

3.2. Movimiento relativo

Consideremos la siguiente situación bastante cotidiana en las aguas de Chiloé: Una persona sube una escalera en un ferry. Lo hace a razón de un peldaño cada segundo. A su vez, el ferry navega en cierta dirección, con un desplazamiento muy bien definido con respecto a la costa. Nos preguntamos entonces cual es el desplazamiento experimentado por la persona durante un segundo referido a la costa.

En esta situación notamos que contamos con información del movimiento de un móvil (la persona) referida a un sistema de referencia (el ferri), el cual a su vez se mueve con respecto a otro sistema de referencia (la costa). Para formular una solución a este problema consideremos dos sistemas de referencia: O y O' , cuyos orígenes se unen mediante un vector $\vec{R}$. El móvil lo denotamos por P , y su ubicación con respecto a O y O' estarán dadas por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r}'$, respectivamente. Esta situación se esquematiza en la Fig. (3.8).

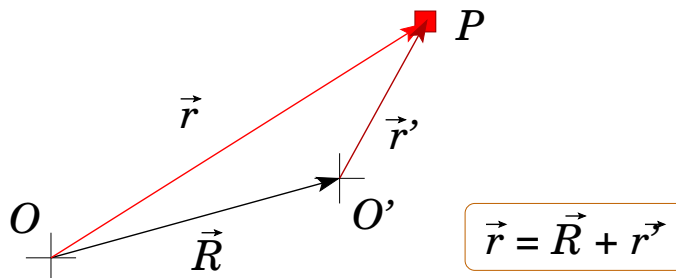


Figura 3.8: Posición de P relativa a dos puntos de referencia

Claramente

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t) . \quad (3.6)$$

Hemos hecho explícito el hecho de que esta relación es válida *para todo instante*, en particular para el instante $t + \Delta t$:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{R}(t + \Delta t) + \vec{r}'(t + \Delta t) .$$

Restando los lados correspondiente obtenemos para el lado izquierdo $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \equiv \Delta \vec{r}$. Lo mismo ocurre con el lado derecho, por lo tanto

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{R} + \Delta \vec{r}' .$$

En adelante no necesitaremos escribir estos pasos intermedios: bastará con tomar variaciones (' Δ ') a cada lado, teniendo presente que la variación de una suma es igual a la suma de las variaciones.

Dividiendo por el lapso Δt , cada término se reduce a una velocidad media. Más aún, podemos hacer tender $\Delta t \rightarrow 0$, y la relación será válida para lo que denominaremos más adelante velocidades instantáneas. Entonces,

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' . \quad (3.7)$$

La dirección y sentido del vector velocidad irá siempre en la dirección de los desplazamientos.

3.2.1. Un ejemplo ilustrativo

Un río tiene un caudal uniforme caracterizado por una velocidad de 0,5 m/s. Una persona nada a razón de 1 m/s, con el eje de su cuerpo dirigido hacia el otro lado del río, perpendicular al cauce. Si el ancho del río es de 50 m, nos preguntamos por la distancia que es arrastrado el nadador río abajo.

En este problema debemos aclarar el significado de la *velocidad de nado*. Esta se refiere a la velocidad con que se desplaza el nadador con respecto al agua detenida, como ocurriría en una piscina. Todos sabemos que una boya flotando se mantiene inmóvil con respecto al agua. Ahora, si el río tiene corriente, la boya es arrastrada por el agua del río, teniendo en claro que la boya no se va nadando. Todo objeto que se aleje de la boya estará en movimiento con respecto al agua.

Con la aclaración anterior, es natural considerar dos sistemas de referencia en movimiento relativo: una marca en la rivera y una boya imaginaria flotando en el agua, arrastrada por el río. Ahora introduzcamos una rotulación adecuada. Utilicemos: N para

el nadador; B para la boya; y P para una piedra en la playa. La Ec. (3.7) la podemos reescribir de la siguiente forma

$$\vec{v}_{N/P} = \vec{v}_{N/B} + \vec{v}_{B/P}$$

La lectura de esta rotulación es: N/P : nadador relativo a la playa; N/B : nadador relativo a la boya; y B/P : boya relativo a la playa. Observe la secuencia Nadador/Playa $\rightarrow$ Nadador/Boya; Boya/Playa. En esta relación vectorial conocemos dos de los vectores. El primero de ellos es la velocidad del nadador c/r al agua, $\vec{v}_{N/B}$, un vector de magnitud v_n (1 m/s) en dirección perpendicular al río y sentido hacia la otra orilla. Considerando los vectores unitarios $\hat{x}$ e $\hat{y}$ construidos en la Fig. (3.9), este vector se expresa $\vec{v}_{N/B} = v_n \hat{y}$. El otro dato es la velocidad de la corriente, $\vec{v}_{B/P}$, un vector de magnitud v_r (0,5 m/s) en la dirección del cauce del río y sentido igual al de la corriente. Expresamos este vector $\vec{v}_{B/P} = v_r \hat{x}$. En el esquema de la derecha ilustramos ambos vectores, expresando entre paréntesis ‘(...)’ la magnitud del vector.

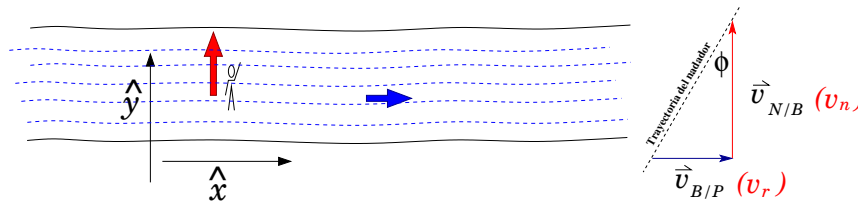


Figura 3.9: Un nadador cruzando un río con corriente.

Por lo tanto podemos escribir

$$\vec{v}_{N/P} = v_n \hat{y} + v_r \hat{x}.$$

La componente según $\hat{y}$ describe avance hacia rivera opuesta, en tanto que la según $\hat{x}$ describe arrastre. Si el ancho del río es D (50 m), entonces el tiempo de cruce es $\Delta t = D/v_n = 50/1 = 50$ s. Con este lapso podemos calcular el arrastre (Δx): $\Delta x = v_r \Delta t = 0,5 \times 50 = 25$ m. Notar que la trayectoria del nadador resulta oblíqua, donde el ángulo de desvío c/r a la transversal queda dado por $\tan \phi = v_r/v_n = 0,5$. Por lo tanto, $\phi \approx 27^\circ$.

Hemos inferido lo más inmediato en relación al nadador arrastrado por la corriente. Nos podemos plantear ahora si es posible que el nadador logre cruzar el río sin ser arrastrado por la corriente. En otras palabras, si es posible que el nadador cruce transversalmente el río. Ello ocurriría si la trayectoria del nadador resulta transversal al río. Los datos que se mantienen son la rapidez de la corriente y la rapidez del nadador (c/r a

agua quieta). La orientación del eje del cuerpo del nadador permite cambiar la dirección de su desplazamiento con respecto a la rívera. Vimos que si el cuerpo del nadador se orienta perpendicularmente c/r al río, el nadador es arrastrado. Sin analizar (*a priori*) como lo hace el nadador, la relación vectorial que buscamos se resume en la Fig. (3.10)

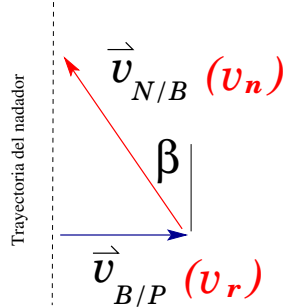


Figura 3.10: Trayectoria de un nadador no arrastrado por la corriente.

Vectorialmente planteamos

$$\begin{aligned}\vec{v}_{N/P} &= \vec{v}_{N/B} + \vec{v}_{B/P} \\ (\text{algo})\hat{y} &= (\text{vector de magnitud } v_n) + v_r\hat{x}\end{aligned}$$

El término de la izquierda expresa el resultado que queremos, un desplazamiento según $\hat{y}$. Si bien el primer término del lado derecho es de orientación desconocida, su magnitud v_n está determinada. A este vector lo expresamos convenientemente

$$\vec{v}_{N/B} = v_n \cos \beta \hat{y} - v_n \sin \beta \hat{x}.$$

El segundo vector de la derecha representa la corriente del río, el cual no tenemos capacidad de controlar. Con las dos relaciones anteriores escribimos

$$V\hat{y} = v_n \cos \beta \hat{y} + (v_r - v_n \sin \beta)\hat{x}.$$

Esta ecuación vectorial nos permite obtener dos ecuaciones algebraicas *independientes*, una por cada componente. Ellas se obtienen mediante aplicación del producto punto con $/ \cdot \hat{x}$ y $/ \cdot \hat{y}$ a ambos lados. Se obtiene entonces un sistema de dos ecuaciones

$$V = v_n \cos \beta \quad (3.8)$$

$$0 = v_r - v_n \sin \beta, \quad (3.9)$$

con dos incógnitas: V y β .

Utilizando la Ec. (3.9) obtenemos $\sin \beta = v_r/v_n = 0,5/1 = 0,5$, con lo cual $\beta = 30^\circ$. Con este valor de β calculamos V , utilizando la Ec. (3.8). Obtenemos $V = v_n \cos \beta = 1 \times \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 = 0,87 \text{ m/s}$. Esta es la tasa con que avanza el nadador hacia la otra orilla. Con ella podemos obtener cuanto se demora en cruzar el río. En este caso evaluamos $\Delta t = D/V = 50/0,87 = 57 \text{ s}$. El nadador demora 7 s más que con la primera estrategia.

Ahora interpretemos el ángulo β . Tras una breve pausa vemos que este ángulo corresponde a la orientación del eje del cuerpo del nadador con respecto a un eje transversal al río. Si en vez de un nadador estudiásemos un bote, ésta sería la orientación de la quilla, o el alerón de popa en el caso de un avión arrastrado por el viento.

Ejercicio propuesto: Desde lo alto de un álamo, un halcón vuela hacia la punta de un pino y regresa. Demuestre que si hay viento en la dirección álamo-pino, el tiempo de viaje será siempre mayor a si no hay viento. Para el mismo problema, si la separación entre los árboles es de 30 m y el tiempo ida-vuelta sin viento es de un minuto, determine la velocidad del viento si al halcón le toma 2 minutos en hacer el mismo trayecto.

3.3. Velocidad y aceleración en forma vectorial

Habiendo definido vectorialmente el desplazamiento y presentado la definición de velocidad media, introducimos ahora la definición de *velocidad instantánea* $\vec{v}(t)$, dada por

$$\vec{v}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)}{\delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Este vector tiene la misma dirección que el desplazamiento $\delta \vec{r}$, cuando el lapso δt es muy pequeño aunque *nunca nulo*. Por lo tanto su dirección coincide con la tangente a la trayectoria del móvil en el instante t , como se ilustra en la Fig. (3.11), donde se muestra el vector $\vec{r}(t)$ y vectores a instantes muy cercanos a t . El sentido de $\vec{v}$ también coincide con el del desplazamiento. La magnitud, en tanto, está dada por el cociente del camino recorrido a lo largo de la trayectoria, δs , con δt . A esta magnitud se le identifica con *rapidez* y se denota simplemente por v . Teniendo presente que $v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$,

$$v = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta s}{\delta t}.$$

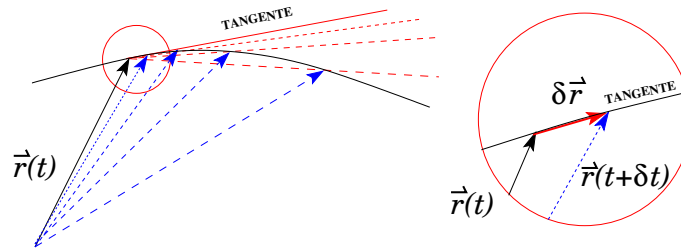


Figura 3.11: Desplazamiento $\delta \vec{r}$ en lapsos infinitamente pequeños.

Las definiciones anteriores se pueden justificar matemáticamente. De ellas inferimos, por ejemplo,

$$\delta \vec{r} = \vec{v} \delta t \quad \delta s = v \delta t .$$

Elas nos permite evaluar desplazamientos en un lapso pequeño cuando la velocidad (o rapidez) son dadas. A modo de ilustración, si un corredor tiene una velocidad instantánea de 10 m/s, su desplazamiento en un lapso de una centésima de segundo (0.01 s) es simplemente $v \delta t = 10 \times 0,01 = 0,1$ m. Notar que el lapso fue pequeño. La pregunta que uno se formula entonces es ¿Cuál es un lapso pequeño?. En la práctica es cualquier lapso en el cual la velocidad no cambie significativamente. Estas ideas se irán depurando en asignaturas posteriores.

Al igual que la definición de velocidad media, construida a partir de $\vec{r}(t)$, podemos introducir la definición de *aceleración media* ($\vec{a}_m$) entre los instantes t y $t + \Delta t$, construida a partir de $\vec{v}(t)$. En este caso

$$\vec{a}_m = \frac{1}{\Delta t} \times [\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)] = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} .$$

La extensión de esta definición a la *aceleración instantánea* es inmediata. Ella se construye haciendo el intervalo de tiempo Δt infinitamente pequeño,

$$\vec{a}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \delta t) - \vec{v}(t)}{\delta t} . \quad (3.10)$$

Nuevamente, la dirección y el sentido de $\vec{a}$ coincide con la dirección y sentido de $\delta \vec{v}$. Este vector será no nulo en dos casos (o combinación de ambos): cambio de rapidez (apurar o frenar) y/o virajes. Solamente en aquellos tramos del trayecto en los cuales el movimientos rectilíneo y uniforme la aceleración será nula.

No es el propósito de este curso abordar los aspectos formales de las definiciones anteriores. Por ahora nos conformaremos con examinar en algún detalle sólo los casos más simples (movimientos rectilíneos y circunferenciales), mientras que las situaciones más generales podrán examinarse cualitativamente.

⇒ *Aceleración media en movimiento circunferencial*

Consideremos un movimiento con rapidez constante en trayectoria i circunferencial de radio R . La velocidad angular de este movimiento es ω . Queremos determinar la aceleración media (vector $\vec{a}_m$) en un cuarto de trayecto.

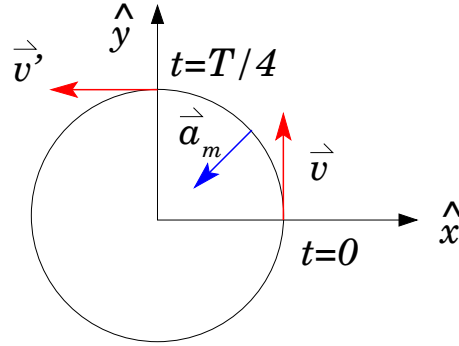


Figura 3.12: La aceleración media en un lapso $T/4$ en movimiento circunferencial uniforme.

La rapidez del movimiento está dada por $v = \omega R$. Escogiendo ejes como los indicados en la Fig. (3.12) observamos que $\delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i = -v\hat{x} - v\hat{y}$. Claramente

$$\delta\vec{v} = -v(\hat{x} + \hat{y}) .$$

Dividiendo por $\delta t = T/4$, con $\omega = 2\pi/T$, obtenemos

$$\vec{a}_m = -\frac{2\omega v}{\pi} (\hat{x} + \hat{y}) .$$

La magnitud a_m de este vector está dado por

$$a_m = \omega^2 R \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) \approx 0,9 \times \omega^2 R .$$

Este resultado es bastante interesante. Por una parte ilustra que los virajes dan cuenta de aceleraciones, con la dirección apuntando en sentido opuesto a la coordenada media (en este ejemplo $R(\hat{x} + \hat{y})/2$). Además, la magnitud de la aceleración resulta proporcional a $\omega^2 R$. Veremos en breve que cuando el movimiento es circunferencial uniforme, la magnitud de la aceleración *instantánea* es exactamente $\omega^2 R$.

3.3.1. Movimiento rectilíneo

Si la trayectoria es rectilínea, podremos construir un eje a lo largo de ella. Una vez establecida la graduación (o escala), usualmente mediante una coordenada x , identifi-

camos el vector unitario $\hat{x}$. El vector posición estará dado por

$$\vec{r} = x\hat{x} ,$$

Un desplazamiento estará dado por $\delta\vec{r} = \delta x \hat{x}$. Resulta evidente entonces que $\vec{v} = v_x \hat{x}$ y $\vec{a} = a_x \hat{x}$. Esta situación queda ilustrada en el esquema (I) de la Fig. (3.13), donde un móvil desliza sobre una cuña inclinada (con respecto a los bordes de la hoja). En este caso se ha hecho coincidir el eje x con la superficie de la cuña.

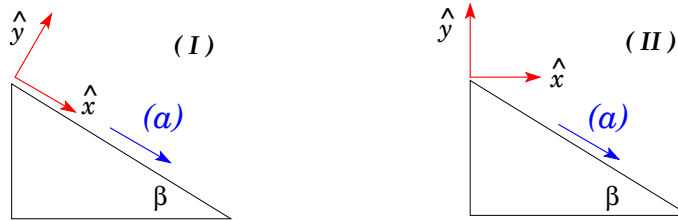


Figura 3.13: La aceleración de un móvil expresada según dos ejes coordenados.

En el cuadro (II) en tanto, se han escogido dos ejes perpendiculares orientados según los bordes del papel. El vector aceleración sigue estando en dirección del plano de la cuña, de modo que en términos de los nuevos ejes xy ella queda expresada como

$$\vec{a} = a \cos \beta \hat{x} - a \sin \beta \hat{y} . \quad (3.11)$$

Es importante hacer notar que en esta descomposición a no necesariamente tiene que ser positiva. Si fuese negativa, la expresión sigue siendo la misma, pero con el signo de a implícito. En tal caso el sentido de $\vec{a}$ sería opuesto al del caso con $a > 0$. Independientemente de todo esto, es fácil verificar que $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$, por lo que el módulo de la aceleración es simplemente $|a|$.

3.3.2. Movimiento circular

Cuando un móvil se desplaza a lo largo de una circunferencia el vector velocidad resultará siempre tangente a la circunferencia, por lo tanto perpendicular al radio. Mientras sea posible, es conveniente escoger para esta trayectoria el origen de coordenadas en su centro. Si denotamos $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ los vectores posición y velocidad a un instante t , entonces claramente $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$ para todo instante. Ello se ilustra en la Fig. (3.14).

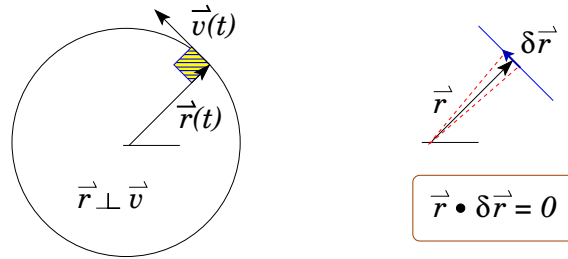


Figura 3.14: Perpendicularidad de la velocidad y el vector radial en un movimiento circular.

Esta relación se puede inferir a partir de la siguiente propiedad general para la variación de un producto. Si F y G dependen de un parámetro (como lo puede ser el tiempo, por ejemplo), entonces nos preguntamos por la variación del producto $F(t)G(t)$ cuanto t es incrementado en δt . Observe la siguiente secuencia de pasos algebraicos directos. Para simplificar la escritura denotaremos $\epsilon \equiv h$.

$$\begin{aligned}
 \delta(FG) &= F(t+h)G(t+h) - F(t)G(t) \\
 &= F(t+h)G(t+h) - \cancel{F(t)G(t+h)} + \cancel{F(t)G(t+h)} - F(t)G(t) \\
 &= \underbrace{[F(t+h) - F(t)]}_{\delta F} G(t+h) + F(t) \underbrace{[G(t+h) - G(t)]}_{\delta G} \\
 &= (\delta F)G(t+h) + F(t)(\delta G) \approx (\delta F)G + F(\delta G)
 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\delta(FG) = (\delta F)G + F(\delta G).$$

Esta relación es válida para todo producto que obedezca la propiedad de distributividad usada en el álgebra de más arriba. Por lo tanto también es válida para el producto punto. Así, consideremos la cantidad $\vec{r} \cdot \vec{r}$ y calculemos su variación ante un lapso δt . De acuerdo al resultado anterior,

$$\delta(\vec{r} \cdot \vec{r}) = (\delta \vec{r}) \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot (\delta \vec{r}) = 2\vec{r} \cdot (\delta \vec{r}).$$

Ahora hacemos uso explícito de que el vector $\vec{r}$ une cualquier punto de la circunferencia con su centro, de modo que $\vec{r} \cdot \vec{r} = R^2$, constante en el tiempo. Por lo tanto, $\delta \vec{r} \cdot \vec{r} = 0$, o bien $\vec{r} \cdot \delta \vec{r} = 0$. Puesto que $\delta \vec{r} = \vec{v} \delta t$, entonces $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$.

En un movimiento circular podemos relacionar la rapidez del movimiento (v) con la velocidad angular ω definida anteriormente.

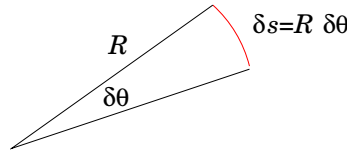


Figura 3.15: Desplazamientos lineales y angulares en movimiento circular.

En la Fig. (3.15) se ilustra el desplazamiento lineal δs en un movimiento circular. En este caso es fácil ver que $\delta s = R\delta\theta$, con $\delta\theta$ el desplazamiento angular. Dividiendo por δt , y haciendo $\delta t \rightarrow 0$, obtenemos

$$v = \omega R.$$

Esta relación es válida siempre, indistintamente de si el movimiento es uniforme o no.

⇒ *Frenado uniforme en trayectoria circular*

Consideremos un anillo deslizando sobre un aro de radio igual a 1,5 m. El anillo tiene una rapidez inicial de 3 m/s y frena uniformemente hasta detenerse, luego de haber dado dos vueltas. Queremos determinar y graficar la rapidez del móvil en función del tiempo.

Buscamos $v(t) = \omega(t)R$. El problema se centra en encontrar $\omega(t)$, dado por $\omega(t) = \omega_o + \alpha t$. Necesitamos entonces ω_o y α . Para ω_o nos valemos de la condición inicial, restringida por $v_o = \omega_o R$. Sustituyendo datos obtenemos $3 = 1,5 \omega_o$, de donde $\omega_o = 2$ rad/s. Abordamos ahora el movimiento angular. Denotando por θ la posición angular del anillo y haciendo uso del hecho que la aceleración es uniforme ($\alpha = \text{Cte.}$), entonces

$$\omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha\Delta\theta.$$

Que se detenga en dos vueltas completas se traduce en que $\omega = 0$, luego que $\Delta\theta = 4\pi$. Sustituyendo valores obtenemos $\alpha = -(1/2\pi)$ rad/s². El signo de α es opuesto al de ω , lo cual se interpreta como *frenado*. Sustituyendo valores obtenemos

$$v(t) = 3 \left(1 - \frac{t}{4\pi} \right) \text{ [m/s] },$$

donde t se expresa en segundos. El gráfico consiste en una recta que corta al eje de velocidad ($t = 0$) en 3 m/s, y cruza el eje t en $t = 4\pi$ s. La pendiente es negativa.

3.3.2.1. Aceleración cuando ω es constante.

Un movimiento circular uniforme se caracteriza por mantener constante la rapidez, manteniendo un viraje permanente. Este viraje permanente permite que la

trayectoria sea cerrada. Para calcular la aceleración en este caso consideremos el móvil ubicado a un ángulo θ con respecto a una dirección de referencia. El vector *unitario* que lo localiza angularmente es $\hat{r}$. Además, consideremos dos instantes, previo y posterior, distando angularmente en $\pm\delta\theta/2$ con respecto a θ . En la Fig. (3.16) se ilustran estas cantidades.

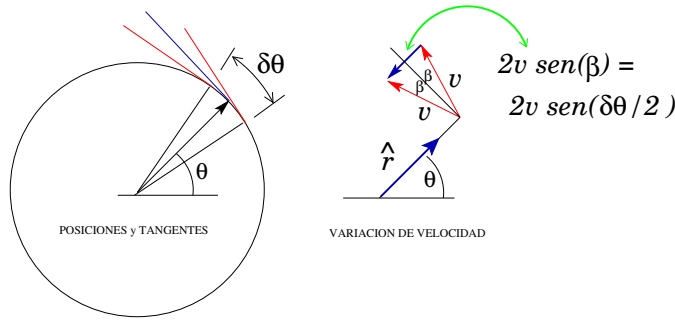


Figura 3.16: Variación de velocidad en movimiento circunferencial.

En el esquema de la derecha observamos que la variación de velocidad apunta en la dirección $-\hat{r}$ y su tamaño es $2v \sin(\delta\theta/2)$. Por lo tanto,

$$\delta\vec{v} = (-\hat{r})2v \sin(\delta\theta/2) .$$

Considerando $\delta\theta$ muy pequeño, entonces $\sin(\delta\theta/2) \approx \delta\theta/2$. Sustituyendo y cancelando factores obtenemos,

$$\delta\vec{v} = (-\hat{r})v \delta\theta .$$

Puesto que $\delta\theta = \omega\delta t$, tenemos

$$\delta\vec{v} = (-\hat{r})v \omega \delta t .$$

Dividiendo por δt y tomando $\delta t \rightarrow 0$ obtenemos

$$\vec{a} = (-\hat{r})v \omega = (-\hat{r})\omega^2 R = -\omega^2 R \hat{r} = -\frac{v^2}{R} \hat{r} ,$$

El resultado anterior será utilizado en varias situaciones en las cuales la trayectoria sea circunferencial a rapidez constante. En la Fig. (3.17) se ilustran algunos casos donde la aceleración, de magnitud $\omega^2 R = v^2/R$, apunta hacia el centro de la trayectoria respectiva.

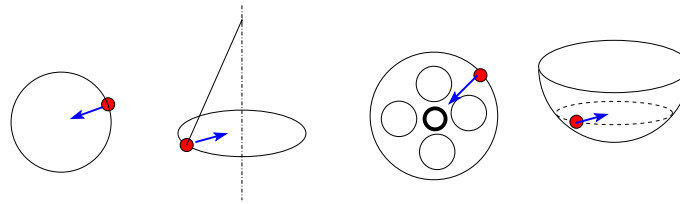


Figura 3.17: Si la rapidez es constante, la aceleración es un vector que apunta hacia el centro de la circunferencia.

El primer caso describe una bolita sobre una mesa, en trayectoria circular; El segundo caso un péndulo cónico, donde una bolita suspendida por un cordel se mantiene describiendo una circunferencia; El tercer caso es un chicle adherido al borde de una rueda que gira sin desplazar su eje; Y el cuarto caso es una bolita girando sobre el fondo de una superficie esférica, a un mismo nivel. Como veremos más adelante, la identificación de la cinemática, particularmente el vector aceleración, será de gran ayuda para resolver situaciones que involucren fuerzas.

3.3.3. Virajes con cambio de rapidez

Vimos que cuando el movimiento es uniforme pero circular, emerge un vector aceleración que apunta hacia el centro de la circunferencia. Supongamos esta vez que el movimiento incluye un cambio de rapidez, como ocurre cuando entramos en vehículo a una curva y aceleramos la marcha.

Para abordar situaciones como esta introduciremos un juego de coordenadas bastante útil para tratar movimientos angulares y/o radiales. Las coordenadas son las *coordenadas polares*. Se valen de un ángulo (θ) y una distancia a un centro (r). Este juego de coordenadas fue esbozado anteriormente y se ilustra en la Fig. (3.18).

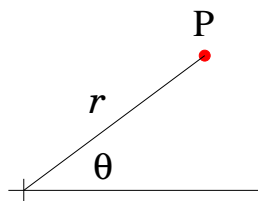


Figura 3.18: Las coordenadas polares r y θ para identificar la posición de un punto.

Un alejamiento se caracteriza por un incremento δr de r , en tanto que un despla-

zamiento angular por una variación $\delta\theta$ de θ . Tal como lo hicimos para las coordenadas cartesianas, estos dos desplazamientos independientes definen vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$, cada uno de ellos orientado en la dirección r o θ creciente, respectivamente. Estos vectores son ortogonales, por lo que $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$. Esta construcción se ilustra en la Fig. (3.19)

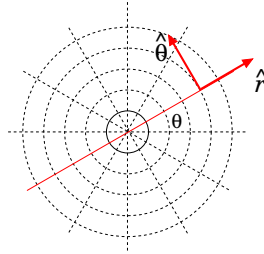


Figura 3.19: Los vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ en coordenadas polares.

No es el propósito profundizar en la derivación de la aceleración en el caso de un movimiento circunferencial. Lo que si podemos decir es que al incluir cambios de rapidez (apurar o frenar) emerge una componente de aceleración a lo largo de la tangente. Si en el caso de movimientos con virajes obtuvimos $\vec{a} \sim -\omega^2 R \hat{r}$, al apurar o frenar debemos incluir una aceleración según la tangente, o sea $\hat{\theta}$. Si α representa la aceleración angular, entonces

$$\vec{a} = -\omega^2 R \hat{r} + \alpha R \hat{\theta}.$$

Alternativamente, en términos de la rapidez v y su tasa de variación $a_t = \alpha R$, podemos escribir

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \hat{r} + a_t \hat{\theta}.$$

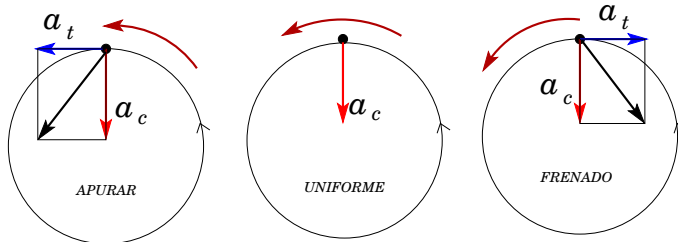


Figura 3.20: El vector aceleración bajo virajes apurando (izquierda), con rapidez constante (centro) y frenando (derecha).

La componente de la aceleración que apunta hacia el centro de la circunferencia se denomina *aceleración centrípeta*, y está dada por

$$\vec{a}_c \equiv -\frac{v^2}{R} \hat{r}.$$

⇒ *Desplazamiento angular hasta igualar aceleraciones centrípeta y tangencial*

Un móvil se desplaza a lo largo de una circunferencia. Partiendo del reposo, acelera angularmente con aceleración angular α hasta que su aceleración centrípeta iguale a la tangencial. Queremos saber el lapso transcurrido y el desplazamiento angular hasta ese instante.

Recordamos que $a_c = \omega^2 R$, con $\omega = \alpha t$. Además $a_t = \alpha R$. Buscamos t para el instante en que $a_c = a_t$, es decir,

$$(\alpha t)^2 = \alpha \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Para el camino recorrido evaluamos $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$, conducente a $\Delta\theta = \frac{1}{2}$ (aproximadamente 29°), ¡independientemente del valor de α !

3.3.4. El caso general

Las nociones discutidas anteriormente las podemos extender al caso de un movimiento general. Supongamos que el trayecto es curvo. Entonces, en cada porción de trayecto nos podremos imaginar in arco de circunferencia cuyo radio lo podemos determinar geométricamente trazando dos perpendiculares a tangentes en puntos cercanos, e identificar donde se cruzan. Eso punto se denomina *centro de curvatura*, y la distancia donde se cruzan las perpendiculares es el *radio de curvatura*, denotándose mediante ρ (se lee *rho*). Sean $\hat{t}$ un vector unitario tangente a la trayectoria y $\hat{n}$ a un vector perpendicular a $\hat{t}$ (normal) apuntando hacia el centro de curvatura. Entonces, si v es la rapidez y a_t la variación de rapidez por unidad de tiempo, entonces

$$\vec{v} = v \hat{t} \quad \vec{a} = \frac{v^2}{\rho} \hat{n} + a_t \hat{t}.$$

Estas cantidades se ilustran en la Fig. (3.21).

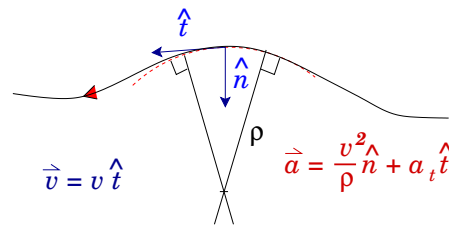


Figura 3.21: La velocidad y aceleración en una trayectoria cualquiera.

Notar que siempre que haya un viraje habrá una componente de aceleración hacia el centro de curvatura respectivo. En la construcción anterior, todo pequeño tramo de trayectoria se puede visualizar como un arco de circunferencia cuyo radio va cambiando con la posición. Ello se ilustra en la Fig. (3.22), donde se han dibujado circunferencias cuyos arcos de contacto coinciden con pequeños tramos del trayecto.

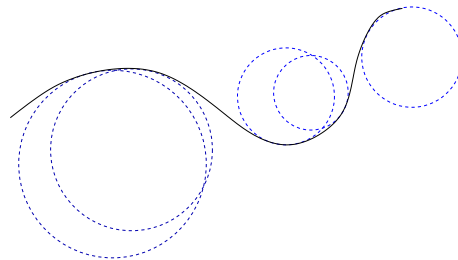


Figura 3.22: Circunferencias cuyos arcos coinciden con pequeños tramos de trayecto.

Capítulo 4

Leyes de Newton

4.1. Nociones básicas

Hasta ahora nos hemos centrado en la descripción del movimiento de objetos materiales. Como se mencionó en su momento, esta se basa en nociones macroscópicas (a escala humana) que sugieren a nuestros sentidos que el movimiento es una secuencia continua de posiciones tales que, para un instante dado, ella es *única*. En sí, esta es una idea *clásica*, aunque suficientemente poderosa como para llevarnos a comprender, describir y descubrir muchos fenómenos. Hacia inicios del 1900, sin embargo, estos conceptos resultaron contradictorios con novedosos descubrimientos inherentes al mundo atómico, crisis que condujo a la formulación de una teoría más completa que hoy conocemos como *mecánica cuántica*. El impacto que ha tenido esta teoría en nuestra vida cotidiana fué inimaginable, y bien podríamos decir que lo que nos depara en el futuro puede ser aún más inverosímil. La telefonía celular, tecnologías comunicacionales, almacenamiento masivo de información, detectores, procesadores, cámaras digitales, MP3's, ipods, instrumental médico, scanners, etc., son testimonios del progreso que hemos podido alcanzar como civilización a partir de nuestro conocimiento del microcosmos. Todo ello simplemente no habría existido sin el mundo que se nos abrió con el desarrollo de la teoría de los cuantos.

Trataremos por ahora comprender *cuantitativamente* nuestra realidad clásica, aquella que se nos hace accesible con nuestros sentidos. Consideremos un objeto en movimiento el cual sigue una cierta trayectoria como resultado de accesorios que se hayan dispuesto para controlarla. Tal pudiera ser el caso de un péndulo o un bloque resbalando sobre una superficie curva e inclinada. Ciertamente esos accesorios juegan un rol determinante en la trayectoria que resulte. Nos podríamos preguntar entonces de que forma tales agentes determinan el comportamiento del objeto al evolucionar. O bien, de qué forma se manifiestan para que el móvil siga tal trayectoria y no otra. O qué pasaría si uno cambia

las características del objeto en estudio. Estudios de esta naturaleza se hicieron muchos, lográndose un sinnúmero de leyes y recetas para lograr ciertos efectos. Testimonios de tal conocimiento son las pirámides de América y Egipto, las ruinas de Machu Pichu, las grandes construcciones de oriente, etc. Sin embargo las leyes fundamentales detrás de tal conocimiento sólo surgen en el renacimiento, hacia el 1500.

4.1.1. El principio de relatividad

¿Qué es una ley física? Podemos intentar una vaga respuesta afirmando que es una síntesis sobre el comportamiento sistemático de un fenómeno, el cual es verificable experimentalmente bajo las mismas condiciones. Por ejemplo, todos los cuerpos al ser soltados (desde el reposo) caen verticalmente. Obsérvese que tal hecho también lo puede verificar alguien con su laboratorio sobre un bote que navega suavemente, pero no lo podría afirmar alguien en un vagón del tren subterráneo cuando este parte, toma una curva o frena. En otras palabras, cuando el sistema de referencia (laboratorio) experimenta una aceleración.

Hay muchos otros fenómenos –o comportamientos físicos– que son válidos indistintamente del estado de movimiento relativo de los sistemas de referencia de observación, cuando las velocidades relativas entre ellos es constante. Leyes de palancas para levantar cargas, la ley de Arquímedes para la flotación de los objetos, la conservación del momentum en colisiones, conservación de la energía, conservación del momentum angular, conservación de la carga eléctrica, conservación de masa, etc. La validez de estas leyes en sistemas de referencia con velocidad relativa constante sugiere una equivalencia entre tales sistemas.

En este punto tenemos un pequeño inconveniente. Sabemos que vivimos en la Tierra y que esta rota en torno a su eje. En particular los habitantes ubicados en el ecuador terrestre mantienen un movimiento circunferencial, por lo tanto acelerado. Obviamente, si los días fuesen mucho más cortos la aceleración en el ecuador sería de tal intensidad que la caída de los objetos estaría en duda, en tanto que caídas en otras latitudes no serían verticales. Ello nos habría dificultado encontrar algunas leyes físicas, aunque posiblemente nos hubiésemos familiarizado con otros conceptos que pudieran haber facilitado las cosas para comprender otros. Es tema de especulación. Para nuestra realidad los objetos caen verticalmente, lo suficientemente claro como para establecerla como una ley. Luego de formular la teoría de Newton veremos que los efectos debidos a la rotación terrestre son corregibles y tratables dentro de la misma teoría. No hay que formular una nueva.

El principio de relatividad de Galileo reconoce la equivalencia física entre sistemas de referencia que mantienen movimiento uniforme entre ellos. Las leyes físicas que uno de

ellos pudiera encontrar es reproducible por cualquier otro.

4.1.2. Masas

Las *Leyes de Newton* sintetizan tres hechos experimentales. Para comprenderlas de mejor manera revisemos algunas nociones sobre *masas* e *interacciones*. Comencemos con la noción de masa.

Es un hecho sensorial indiscutible que hay objetos más pesados que otros. Esa ‘pesadez’ la percibimos por el grado de dificultad que ofrecen los objetos al ser levantados del suelo. Los mercaderes y comerciantes de antaño idearon formas muy ingeniosas para medir y comparar cantidades de granos y semillas según su grado pesadez, estableciéndose formas para medirlos y compararlos. Mientras más difícil resulte levantar un objeto, más pesado. Sin necesidad de conceptualizar qué propiedad se está cuantificando, se registra su pesadez. Hoy en día sabemos que lo que efectivamente se está midiendo es la *fuerza* con que la Tierra atrae al cuerpo por gravitación.

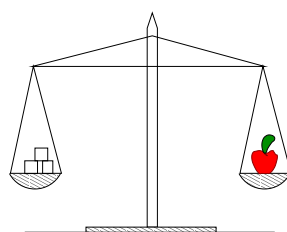


Figura 4.1: Una balanza para comparar masas en la Tierra.

Sin embargo, podemos imaginar al objeto en el espacio, lo suficientemente lejos de la Tierra como para que no grave. A tal lejanía el objeto no pesa, pero ¡sigue teniendo masa!. Entonces, ¿cómo podemos comparar masas en el espacio?. Por ahora dejemos planteada la inquietud, pero es evidente que la masa es una propiedad física inherente al objeto, independiente de si está en la Tierra o no.

Aceptemos una cuantificación de masas mediante balanzas. En ella, como se ilustra en la Fig. (4.1), ciertas cargas que sirven de patrón se colocan a un lado de la balanza y al otro se dispone el objeto de masa desconocida (una manzana). Se busca equilibrar la balanza, hasta retomar su configuración simétrica inicial. Para ello ponemos tantas cargas patrones al lado izquierdo como sean necesarias para lograr el equilibrio. La suma de esas cargas patrones corresponde a la masa de la manzana del lado derecho.

Implícita en la construcción de la balanza está la idea de que la masa es *aditiva*.

Vale decir, cuando se mide la masa de un cuerpo A y la de un cuerpo B, la masa del conjunto resulta igual a la suma de ambas. En la mecánica de Newton esta es una ley física consistente con la relatividad de Galileo. Sin embargo, esta propiedad tiene una validez restringida en la naturaleza. En efecto, es un hecho empírico que la masa del deuterón –consistente en la unión de un protón con un neutrón– es menor que la suma de las masas de sus constituyentes. Ello se esquematiza en el *cartoon* de la Fig. (4.2). El origen de tal diferencia se entiende a partir de la relación $E = mc^2$, propuesta por Einstein hacia el año 1905. En ella, la equivalencia entre masa y energía permite que el aporte energético debido a la ligazón entre el protón y el neutrón se sume a las masas. Tal aporte (ligazón) es negativo, haciendo que la energía del par ligado sea menor que la suma de las energías asociadas a sus constituyentes separados.

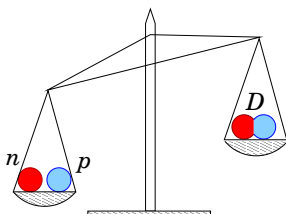


Figura 4.2: La masa del deuterón es menor que la suma de las masas de sus constituyentes.

Dimensionalmente las masas se denotan mediante M y su unidad, en el sistema internacional de unidades (SI), es el *kilogramo*. Su símbolo es kg (siempre con minúsculas y sin puntuación). Entre sus unidades derivadas destacamos el gramo ($1\text{ g}=10^{-3}\text{ kg}$) y la tonelada ($1\text{ t}=10^3\text{ kg}$).

4.1.3. Momentum

Coincidentemente, mientras más pesado sea un objeto, mayor será su efecto (cinemático) sobre otro al chocarlo. Podríamos pensar en el choque *entre* una pelota de golf y una pulga. El movimiento de la pelota es marginalmente alterado por el choque, no así el de la pulga, la cual podemos imaginar dando un gran rebote producto de la colisión. Este sutil efecto tiene que ver con lo que entenderemos por *masa inercial*, una propiedad que caracteriza el *grado de porfía de los cuerpos* al cambio de su estado de movimiento. A mayor masa, más porfía. Un puñetazo contra una pelota de ping pong la dispara lejos, en tanto que el mismo puñetazo contra un piano casi no lo afecta.

Un avance importante se logró cuando Isaac Newton introduce la definición de *momentum* de una partícula, dada por el producto entre su masa y su velocidad. Si m

denota la masa del objeto y $\vec{v}$ su velocidad, entonces su momentum $\vec{p}$ está dado por

$$\vec{p} = m \vec{v}.$$

Esta definición conlleva a una equivalencia mecánica entre un objeto masivo y lento, con otro liviano pero veloz. Si consideramos un tercer objeto, este es afectado en forma equivalente por una pelota de golf lenta o una pulga veloz. Una cuantificación más detallada sobre este efecto lo veremos más adelante.

4.1.4. Interacciones

Intentemos una imagen genérica de lo que entenderíamos por interacción. En ella identificamos dos entes separados espacialmente y el intercambio de información entre ellos. Ese canal de intercambio es lo que llamaríamos *interacción*, como se ilustra en la Fig. (4.3).

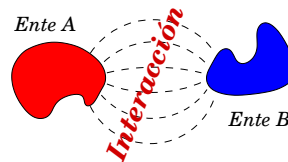


Figura 4.3: Imagen de interacción *entre* dos entes.

Desde el punto de vista físico se conocen varios tipos de interacciones en la naturaleza. Todas ellas constituyen agentes responsables de *fuerzas* entre cuerpos. También, con el transcurso del tiempo, ha sido posible demostrar que muchas de ellas tienen un trasfondo común.

Hasta hace poco hablabamos de cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza:

1. *Gravitacionales*: responsable de la caída de los cuerpos en la Tierra, la atracción entre planetas o el efecto de la Luna sobre los mares en el fenómeno de las mareas;
2. *Electromagnética*: responsable de las interacciones de tipo electrostático o magnético entre los cuerpos. Estas interacciones son las responsables de las interacciones interatómicas, intermoleculares, entre imanes y eventualmente las fuerzas de contacto entre objetos macroscópicos;

3. *Fuertes*: principales agentes responsables de la interacción que cohesiona los protones y neutrones en el núcleo atómico. Hay muchas más partículas elementales que interactúan *via* interacciones fuertes, a las que se denomina *hadrones*; y
4. *Débiles*: principal responsable del decaimiento (ruptura) de un neutrón en otras tres partículas, protón, electrón y antineutrino ($n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$).

Para cada una de estas interacciones media un agente. Por ejemplo, en el caso electromagnético es el *fotón*, en las fuertes son los mesones, en las gravitacionales se postula el gravitón, y en las débiles los bosones Z y $W^\pm$.

Es interesante hacer notar que en la historia han habido hitos en los cuales se logra entender dos tipos de interacciones dentro de un mismo contexto teórico [Ver Fig. (4.4)]. La primera de ellas fué en entender la caída de los cuerpos en la Tierra en la misma teoría que describe la atracción entre los objetos celestes. Esa *unificación* se la atribuimos a Newton, y la teoría que las unifica se denomina *Ley de Gravitación Universal*.

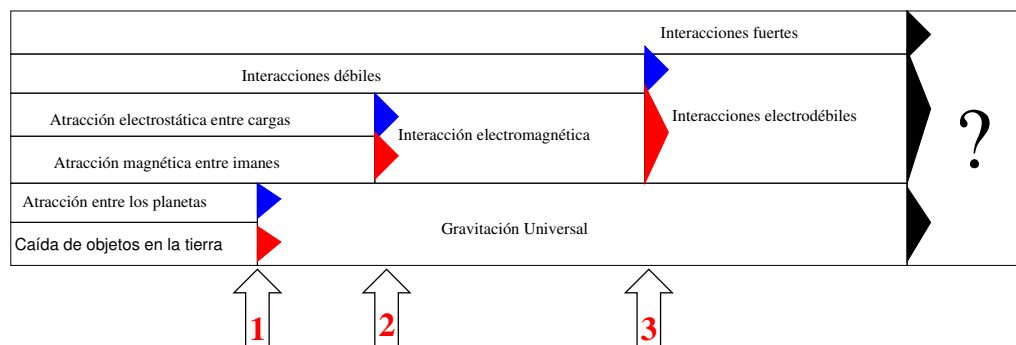


Figura 4.4: Interacciones en la naturaleza: evolución según el entendimiento humano. Las flechas '1', '2' y '3' denotan hitos de unificación.

La segunda gran unificación se le atribuye a James Clerk Maxwell, quien dentro de una misma teoría (la electromagnética) es capaz de describir la interacción entre imanes y la fuerza electrostática entre cuerpos cargados. Como implicancia surge el hecho de que la luz es una onda electromagnética, y que es posible generar y detectar ondas electromagnéticas mediante circuitos eléctricos.

Por último, fue en 1973 cuando tres físicos (Salam, Glashow y Weinberg) unificaron la interacción electromagnética con las débiles, mediante la teoría de las interacciones *electrodébiles*. Esta contribución los lleva a recibir el Premio Nobel de física en 1979.

La Gran Unificación, es el sueño dorado de muchos físicos en busca de aquella teoría

capaz de dar cuenta de todas las interacciones de la naturaleza dentro de un mismo marco teórico. Este sigue siendo un desafío sin solución.

4.2. Las Tres Leyes de Newton

La *Primera Ley de Newton* resume lo siguiente:

Si a un cuerpo nada lo toca, nada lo perturba, entonces el cuerpo se mantendrá en movimiento rectilíneo uniforme, o en reposo indefinido si así lo estaba originalmente.

El uso de la lógica booleana nos permite expresar la version equivalente¹ de esta ley: *Si un cuerpo altera su condición $\vec{v}=\text{Cte.}$, entonces algo lo perturbó, alteró o tocó: hubo una interacción.*

En la Fig. (4.5) se ilustran cuatro movimientos. El primer diagrama ilustra un objeto que interactúa con nada, por lo que sigue en trayectoria rectilínea con rapidez uniforme. En los otros esquemas el cuerpo frena, apura o vira, por lo que se infiere que el cuerpo interactuó con algo.

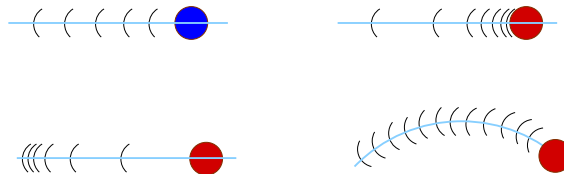


Figura 4.5: Movimientos de un objeto. En azul se ilustra un movimiento rectilíneo uniforme. En rojo se ilustran tres casos de movimientos acelerados.

La *Segunda Ley de Newton* relaciona el cambio de momentum experimentado por un móvil con la intensidad de las interacciones responsables de tal alteración. Si tenemos un cuerpo con momentum $\vec{p}$ y luego de un lapso δt cambia a un momentum $\vec{p}'$, entonces habrá experimentado un cambio de momentum $\delta \vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}$. Este *cambio* de momentum pudo haber sido consecuencia de un tocar o empuje aplicado *sobre* el cuerpo, o sea una interacción. Es más, una conjetura (que puede ser verificada experimentalmente) es que el cambio de momentum no sólo es proporcional a la intensidad de la interacción, sino que también a la duración de su aplicación [ver Fig. (4.6)].

¹Recordar que $p \Rightarrow q$, es lógicamente equivalente a $\neg q \Rightarrow \neg p$ ($no - q$ implica $no - p$).

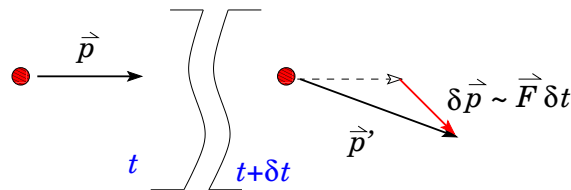


Figura 4.6: El cambio de momentum de un cuerpo por acción de una fuerza.

Luego de extensos estudios empíricos Newton conjetura una relación del tipo

$$\delta \vec{p} \propto \text{Intensidad de Interacción} \times \delta t ,$$

una relación vectorial donde el lado derecho ha de ser un vector. La proporcionalidad desaparece si a esa *Intensidad de Interacción* la sustituimos por un vector, que denotaremos $\vec{F}$ y denominaremos *fuerza aplicada sobre el cuerpo*. Así entonces,

$$\delta \vec{p} = \vec{F} \delta t \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{\delta \vec{p}}{\delta t} .$$

Si hacemos $\delta t \rightarrow 0$ entonces surge la conocida *Segunda Ley de Newton*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

En el caso particular de un cuerpo cuya masa es constante en el tiempo (que no es el caso de un cohete que quema combustible en su viaje), entonces $\delta \vec{p} = \delta(m\vec{v}) = m\delta\vec{v}$, vale decir $d\vec{p} = m d\vec{v}$, de donde surge la segunda ley de Newton en su forma más usual:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} .$$

Es importante enfatizar que lo anterior *no constituye una demostración* sino una serie de conjeturas conducentes a *un postulado*. La validez de este queda sujeta a la coherencia con que pueda describir fenómenos. En el caso de la Teoría de Newton, es indiscutible el enorme éxito que ella tuvo (y sigue teniendo) para describir nuestro mundo clásico.

La *Tercera Ley de Newton* lleva implícita la idea de que la interacción entre dos objetos es mutua y de igual intensidad para ambos. De modo que si un objeto A interactúa con otro B imprimiendo una fuerza de cierta intensidad, esa misma intensidad de interacción es la con que se manifiesta la fuerza de B sobre A. Esto queda ilustrado en la Fig. (4.7), donde la interacción mutua se traduce en vectores apuntando en sentidos opuestos.

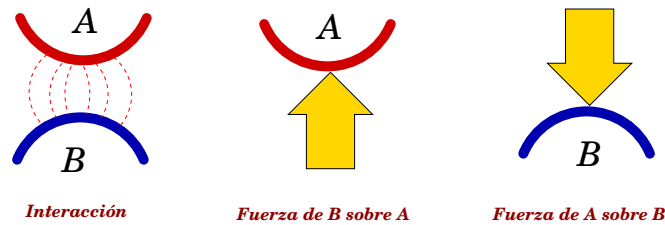


Figura 4.7: La interacción mutua se expresa mediante vectores de fuerza iguales en magnitud pero de sentidos opuestos, según el objeto a examinar.

A esta ley se le identifica como *Principio de Acción y Reacción*, una denominación algo desafortunada puesto que sugiere una relación causal entre la acción y la reacción. El hecho es que esta ley se manifiesta en forma *instantánea* en la teoría de Newton.

El Principio de Acción y Reacción estipula que:

Si un cuerpo A actúa sobre un cuerpo B mediante una fuerza $\vec{F}_{A \rightarrow B}$, entonces el cuerpo B imprimirá una fuerza sobre A de igual magnitud a $\vec{F}_{A \rightarrow B}$, pero en sentido opuesto. Vale decir,

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$$

4.2.1. El principio de superposición

Esta ley establece que las fuerzas son aditivas en el sentido vectorial. Por ejemplo, si sobre un cuerpo actúan tres fuerzas: el peso $\vec{w}$, una fuerza de contacto $\vec{C}$ y una tensión $\vec{T}$ debido a una cuerda, entonces la fuerza neta *sobre* el cuerpo es

$$\vec{F} = \vec{w} + \vec{C} + \vec{T}.$$

4.2.2. Dimensiones y unidades

Considerando la relación $\vec{F} = m\vec{a}$, queda claro que las dimensiones de fuerzas son

$$MLT^{-2}.$$

En el sistema internacional de unidades las fuerzas estarían expresadas en kg m/s^2 . A esta combinación de unidades se le da el nombre de 'newton' (¡sin mayúsculas!) y se simboliza N:

$$1 \text{ newton} = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2.$$

De esta forma, si un cuerpo de 2 kg de masa experimenta una aceleración de 3 m/s^2 , la fuerza neta sobre él es de 6 newtons, o bien 6 N.

4.2.3. Las fuerzas más elementales

Las interacciones que surgen en los problemas que abordaremos serán sólo de origen gravitacional o electromagnético. No habrá otras. Las débiles y las fuertes son inaccesibles para nuestro mundo macroscópico.

4.2.3.1. El peso

Todo objeto sobre la superficie de la Tierra es atraído por esta. Si m es la masa del objeto y g la aceleración de gravedad local, entonces el peso del objeto es

$$\vec{w} = m \vec{g},$$

con $\vec{g}$ apuntando verticalmente hacia abajo. Esta fuerza es independiente del estado de movimiento de los objetos, siendo de origen *gravitacional*.

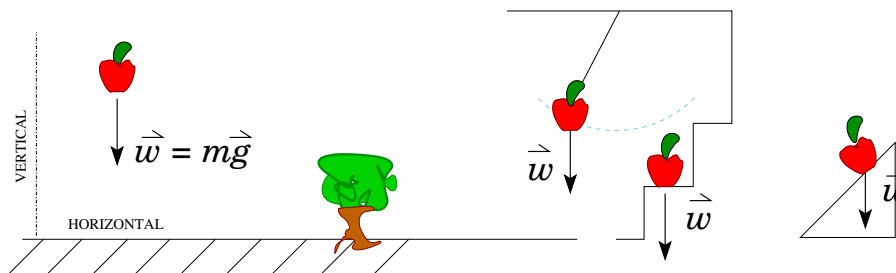


Figura 4.8: El peso representa la fuerza de atracción de la Tierra sobre un cuerpo. Es un vector vertical, de magnitud mg , hacia abajo.

4.2.4. Fuerzas de contacto

Cuando dos superficies están muy cercas entre sí, al punto que una ‘siente’ la otra, decimos que ambas están en contacto. La interacción que ocurre entre ellas se debe a que las moléculas de ambas están muy próximas unas a las otras, en el dominio de interacción electromagnética entre ellas.

Tal como se ilustra en la Fig. (4.9), el punto de contacto entre un objeto pequeño y una superficie, o entre dos superficies, define una dirección tangente y otra perpendicular, que denominaremos *normal*.

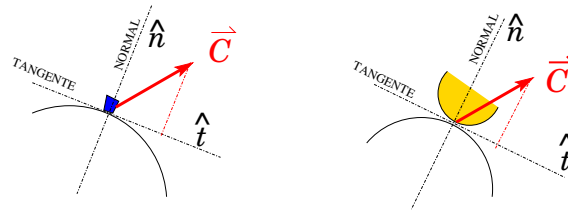


Figura 4.9: Fuerzas de contacto descompuestas vectorialmente según la normal y tangente al punto de contacto.

Independientemente de toda consideración, la fuerza de contacto $\vec{C}$ que ejerce la superficie inferior sobre el objeto en estudio se puede descomponer vectorialmente de la siguiente forma:

$$\vec{C} = N \hat{n} + f \hat{t},$$

donde $\hat{n}$ y $\hat{t}$ son el vector normal y tangente, respectivamente. A la fuerza $\vec{N} \equiv N \hat{n}$ se le denomina *fuerza normal*. Naturalmente $\vec{f} \equiv f \hat{t}$ corresponde a una *fuerza tangencial*. Esta componente de la fuerza es lo que denominamos *fuerza de roce*. Como vemos, la fuerza de roce no es más que la componente tangencial de la fuerza de contacto. Más adelante examinaremos cierta fenomenología, de validez restringida, que relaciona las componentes f y N de las fuerzas de contacto.

4.2.5. Cuerdas y tensiones

Cuando tomamos una cuerda y la tensamos tirando ambos extremos en sentidos opuestos, aplicamos igual fuerza a ambos lados. La cuerda no acelera, de modo que la fuerza neta sobre ella es nula. Sin embargo la cuerda está tensa.

Si una de las manos es sustituida por un cuerpo, entonces lo que logramos es tirar al cuerpo. Nos preguntamos por como caracterizar la fuerza que ejerce la cuerda (como agente exterior) sobre el cuerpo.

Es crucial en este punto definir cual es el objeto a estudiar. En este caso es la bola negra dibujada en la figura, más un pequeño resto de cuerda adherida. Imaginariamente hemos separado la cuerda en dos partes. Para hacer esa separación físicamente equivalente al sistema original debemos incluir las interacciones que se dan en la cuerda. Esta

es la tensión, que al actuar sobre la bola se traduce en la fuerza que se indica. Claramente esta fuerza debe tomar la misma dirección que la cuerda en su punto de contacto con el cuerpo [ver Fig. (4.10)]. Normalmente se simboliza a esta fuerza mediante $\vec{T}$.

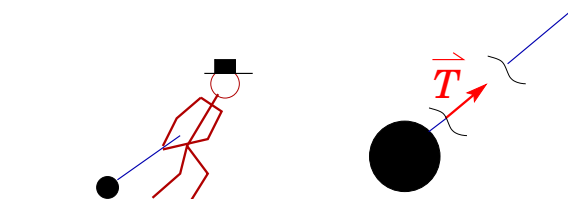


Figura 4.10: La acción de una cuerda al tirar un objeto.

4.3. Aplicaciones

4.3.1. Sensación de peso en un ascensor

Cuando un ascensor comienza a subir uno siente una ligera sensación de mayor peso. A la inversa, cuando nos acercamos al piso de destino, nos sentimos más livianos. ¿Como se concilia este hecho con que nuestro peso es $m\vec{g}$ independientemente del estado de movimiento?. Para analizar esto, consideremos una persona en un ascensor. El ascensor experimenta una aceleración dada, la cual es la misma que la de sus pasajeros. Analicemos entonces la parte del sistema que nos interesa: el pasajero [ver Fig. (4.11)]. Para ello lo aislamos y nos preguntamos por las interacciones que lo afectan *directamente*. En este caso son dos fuerzas o interacciones directas: la gravedad, dada por su peso $m\vec{g}$, y contacto con el piso, que en este caso es sólo la fuerza normal $\vec{N}$ actuando verticalmente (perpendicular al piso). Es conveniente notar que los cables que sostienen el ascensor no interactúan directamente con el pasajero. Sólo el piso lo hace, manifestandose por medio de la fuerza normal.

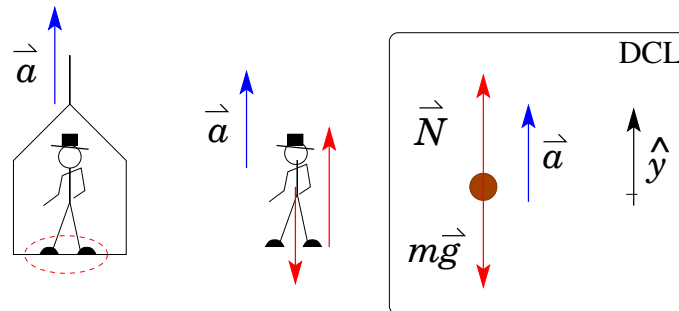


Figura 4.11: Un pasajero dentro de un ascensor acelerado. A la derecha se muestra el diagrama de cuerpo libre respectivo.

El esquema de la derecha de la Fig. (4.11) representa lo que se denomina usualmente *Diagrama de Cuerpo Libre* y se abrevia DCL. En este diagrama se representa el cuerpo a considerar (pasajero) y dibujan los vectores de fuerza actuando *sobre* él. No está de más incluir, como referencia, la aceleración. En este diagrama se resumen las relaciones geométricas entre los vectores. Con lo anterior, la ecuación de movimiento del pasajero es

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Si escogemos ejes positivos hacia arriba, entonces la proyección según ese eje da

$$N - mg = ma_y \quad \Rightarrow \quad N = m(g + a_y).$$

La sensación de peso lo da 'el dolor de pies', o sea la compresión que sufre la planta de nuestros pies contra el piso. Esta información es transmitida neurológicamente al cerebro desde nuestros sensores en el entorno del contacto.



Figura 4.12: Sensación de peso y compresión en la planta de los pies.

Desde un punto de vista físico, podemos caracterizar tal sensación mediante la fuerza de contacto N . En tal caso tenemos que si $a_y > 0$ (acelerar hacia arriba), la normal es mayor que mg , por lo que nos sentimos mas pesados. A la inversa, si la aceleración es negativa (en la dirección de la gravedad), la normal es más débil. En particular, si el

ascensor cae libremente, entonces la aceleración del pasajero es $a_y = -g$, con lo que $N = 0$. En ese caso límite el pasajero no presiona el piso del ascensor: también cae libremente.

4.3.2. Resbalamiento sobre plano inclinado

Consideremos el caso de un bloque de masa m posando sobre un plano inclinado. La superficie es extremadamente resbaladiza, por que la fuerza de contacto que el piso ejerce sobre el bloque es perpendicular a la tangente en el punto de contacto. Además, el movimiento del bloque es rectilíneo, por lo que el vector aceleración toma la misma orientación que la superficie. Nos interesa determinar la aceleración del bloque.

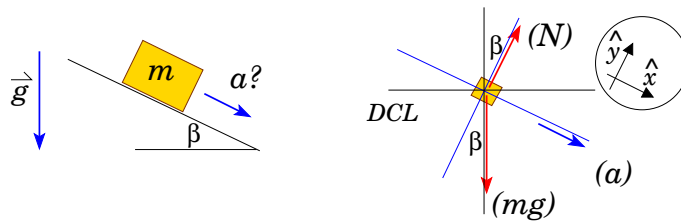


Figura 4.13: Un bloque resbalando sobre un plano inclinado. Si no hay roce, las dos únicas fuerzas sobre el cuerpo son la normal y el peso.

Como se hizo anteriormente, identificamos el cuerpo a analizar, lo separamos del resto del sistema, e identificamos las fuerzas que actúan sobre él. En este caso las interacciones del bloque con el resto lo conforman el peso $\vec{w} = m\vec{g}$ (interacción con la Tierra), y fuerza normal del piso sobre el bloque $\vec{N}$ (interacción electromagnética). Ambas fuerzas se esquematizan en el DCL de la derecha de la Fig. (4.13), donde hemos incluido la dirección de la aceleración. Además, se han escogido dos ejes caracterizados por los vectores unitarios ortogonales $\hat{x}$ y $\hat{y}$. El eje x coincide con el plano inclinado.

La ecuación de movimiento para el bloque es

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a} ,$$

la cual es descompuesta en componentes luego de proyectar por medio del producto punto $\cdot \hat{x}$ y $\cdot \hat{y}$. Tales proyecciones conducen a

$$\begin{aligned} 0 + mg \sin \beta &= m a_x , \\ N - mg \cos \beta &= 0 . \end{aligned}$$

Limpiando estas ecuaciones obtenemos

$$a_x = g \sin \beta ,$$

y la normal termina dada por $N = mg \cos \beta$. Con ello vemos que la fuerza normal es más débil que mg , llegando a ser nula en el caso extremo $\beta = \pi/2$, o sea plano vertical. Ese resultado era esperable.

A modo de divagación, el resultado del ejemplo anterior puede ser utilizado para responder la siguiente pregunta. ¿Qué peso registraría una balanza sobre la cual posa una cuña de masa M y ángulo β con la horizontal, si sobre ella resbala una bolita de masa m ? Esta situación se ilustra en la Fig. (4.14).

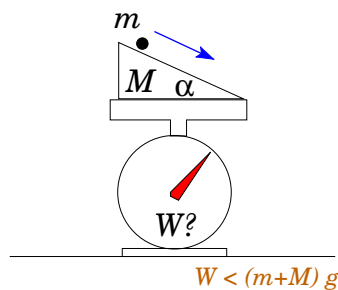


Figura 4.14: El peso que registra una balanza para una cuña con bolita resbalando.

Arrastre de un bloque en el piso

Analicemos el siguiente problema bastante elemental, pero a su vez ilustrativo. Consideremos un bloque de masa m posando en reposo sobre una superficie horizontal pulida (muy resbalosa). Mediante el uso de una cuerda, el objeto es tirado con una fuerza de magnitud T la cual mantiene un ángulo θ con la horizontal. Se pide determinar la aceleración del cuerpo.

Las leyes de Newton son el único marco teórico al cual podemos recurrir para resolver esta situación. De este debe salir toda la información que buscamos.

Al considerar la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, debemos definir claramente el objeto a estudiar. En este ejemplo resulta bastante simple: el bloque. Una vez identificado el objeto, nos preguntamos por las interacciones que experimenta el bloque con su entorno.

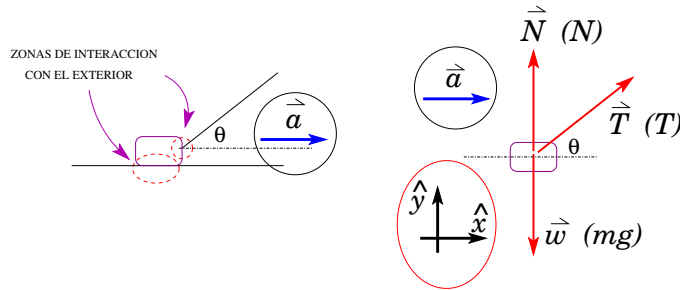


Figura 4.15: Fuerzas actuando sobre un bloque tirado por una cuerda.

Cada interacción lleva asociada una fuerza. Vemos que el bloque interactúa con:

1. La Tierra, traducida en el peso $\vec{w} = m\vec{g}$, de magnitud mg hacia abajo. Esta interacción es de naturaleza gravitacional.
2. Contacto con el piso. En este caso no hay roce, por lo que sólo queda la normal $\vec{N}$ respectiva. Su dirección vertical. Esta interacción es de naturaleza electromagnética.
3. Contacto con la cuerda, la cual es de magnitud T y en dirección formando un ángulo θ con la horizontal. Esta interacción también es de naturaleza electromagnética.

Estas tres fuerzas se esquematizan en lo que se denomina *diagrama de cuerpo libre*, donde se dibujan las fuerzas participantes y su orientación geométrica. En la Fig. (4.15) se ilustra el diagrama de cuerpo libre para el problema planteado. En este mismo diagrama ilustramos en azul el vector aceleración, el cual debe seguir la dirección de la trayectoria.

La fuerza neta sobre el objeto será $\vec{F} = \vec{w} + \vec{T} + \vec{N}$. La Segunda Ley de Newton nos lleva a

$$\vec{w} + \vec{T} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Proyectando esta ecuación según los ejes unitarios $\hat{x}$ e $\hat{y}$ ilustrados en la Fig. (4.15), obtenemos dos ecuaciones. Ellas son:

$$0 + T \cos \theta + 0 = m a_x \quad (\text{según } \hat{x}) \quad (4.1)$$

$$-mg + T \sin \theta + N = m a_y = 0 \quad (\text{según } \hat{y}) \quad (4.2)$$

Limpiando ambas ecuaciones obtenemos $a_x = (T/m) \cos \theta$ y además podemos determinar la normal: $N = mg - T \sin \theta$. Claramente la aceleración aumenta a medida que la cuerda se hace más horizontal. A la inversa, si θ crece la normal N decrece. Sería interesante examinar dos casos. Uno de ellos es considerar $m = 30 \text{ kg}$ y $T = 500 \text{ N}$, mientras

que el otro es $m = 50 \text{ kg}$ y $T = 300 \text{ N}$. Surge una pequeña sutileza a medida que θ crece, la cual requiere alguna interpretación adicional. Se deja propuesto este análisis.

Una variante interesante del problema anterior es considerar dos bloques unidos horizontalmente mediante una cuerda. Ambos bloques son de masa $m/2$, en tanto que uno de ellos es tirado por la misma cuerda del problema anterior. La situación se ilustra en la Fig. (4.16)

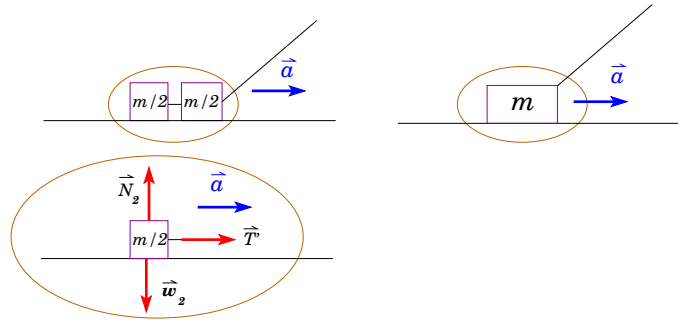


Figura 4.16: El bloque del problema anterior estaba compuesto de dos partes iguales unidas por una cuerda.

Aquí entra en juego lo que hayamos identificado como el objeto a estudiar. Note que cuando especificamos un cuerpo no nos preguntamos por como esta formado, aglutinado, adherido, amarrado, envuelto, etc. En la mecánica de Newton debemos distinguir las *fuerzas internas* de las *externas*. Cuando estudiamos el problema del bloque no nos preguntamos como estaba hecho el bloque, de que material, si había amarras o pegamento para mantenerlo de alguna forma. Las fuerzas que ayudan a la constitución del cuerpo corresponden a fuerzas internas, las cuales no son consideradas en la relación $\vec{F} = m\vec{a}$.

De igual forma, la cuerda que une los dos bloques de masa $m/2$ se puede entender como una fuerza interna para conformar un sólo cuerpo de masa m . Así entonces, el problema de estos dos cuerpos se reduce al de un solo cuerpo, el cual se aborda según el mismo procedimiento del problema anterior. Ello conduce a la aceleración $a_x = (T/m) \cos \theta$ para el bloque de masa m . Puesto que todas las partes de este bloque se mueven de igual manera, todas tendrán la misma aceleración. En particular, el bloque de masa $m/2$ tirado por la unión.

Analicemos entonces este segundo bloque (de masa $m/2$), al cual ya le conocemos su aceleración. Las fuerzas actuando sobre él son: peso $\vec{w}_2 = (m/2)\vec{g}$, Tensión horizontal de la cuerda que lo tira, $\vec{T}'$, y contacto (normal) $\vec{N}_2$. Escribimos para este cuerpo

$$\vec{w}_2 + \vec{T}' + \vec{N}_2 = (m/2)\vec{a}.$$

Proyectando según $\hat{x}$ tenemos

$$0 + T' + 0 = (m/2) \times (T/m) \cos \theta ,$$

de donde obtenemos

$$T' = (T/2) \cos \theta .$$

Hemos encontrado la tensión de la cuerda que une los dos bloques pequeños. Esta tensión es la misma a si hubiésemos considerado como objeto a analizar el bloque de masa $m/2$ en contacto con la cuerda oblicua. Se sugiere verificar ese resultado.

La idea de descomponer un cuerpo en subpartes se puede utilizar para abordar el problema de una cadena de masa M , con $N + 1$ eslabones, la cual es tirada horizontalmente con una fuerza de magnitud F_0 . Nos preguntamos en este caso por la fuerza entre cada uno de los N contactos entre eslabones. Por ahora suponga que no hay roce. Más adelante podrá abordar el mismo problema pero considerando la fuerza de roce de cada eslabón con el piso.

4.3.3. Posición de un anillo pasado por un aro que rota

El siguiente problema consiste un aro de radio R que gira con velocidad angular constante en torno a un eje vertical. Un anillo de masa m puede deslizarse libremente (sin fricción) por el aro. En este caso es posible lograr que el anillo se mantenga en una posición fija en el aro, describiendo una trayectoria circular. Ello se ilustra en la Fig. (4.17). ¿Cuál es esa ubicación del anillo en el aro?

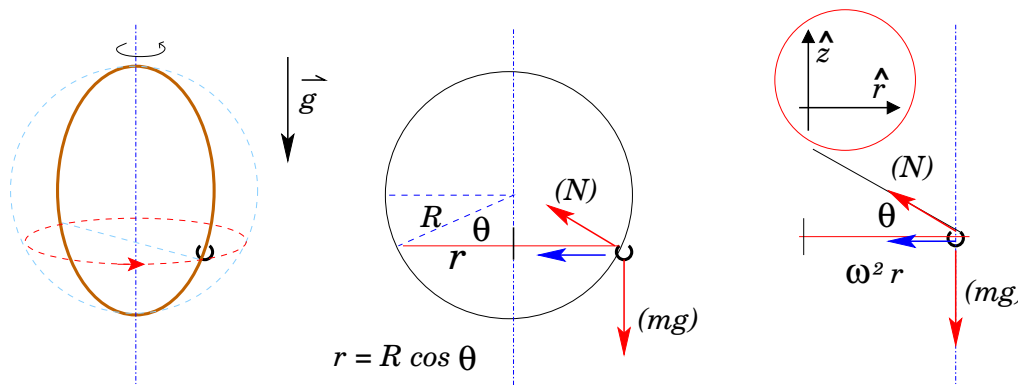


Figura 4.17: Un anillo pasado por un aro de radio R , el cual rota con velocidad angular constante.

Al igual que en los casos anteriores, una vez que la trayectoria del anillo es circunferencial, su aceleración es centrípeta es de magnitud $\omega^2 r$, con r el radio de su órbita (que no es R). La geometría del problema (ver Fig. del centro) implica que

$$r = R \cos \theta .$$

Con respecto a las interacciones, claramente el peso está presente, dado por $m\vec{g}$. Por último, el anillo sólo interactúa con el aro mediante una fuerza de contacto normal, pues no hay roce. La normal en este caso pasa por el centro de la circunferencia del aro. Escribimos entonces

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a} = -m(\omega^2 r) \hat{r} ,$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario radial apuntando hacia el anillo, desde el eje. Proyectamos según los ejes definidos por los vectores unitarios $\hat{r}$ (radial) y $\hat{z}$ (vertical), obteniendo

$$-N \cos \theta + 0 = -m\omega^2 r \quad (\text{según } \hat{r}) \quad \Rightarrow \quad N \cos \theta = m\omega^2 r ,$$

y

$$N \sin \theta - mg = 0 \quad (\text{según } \hat{z}) \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\sin \theta} .$$

Sustituyendo N en la Ec. de proyección radial se tiene

$$mg \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = m\omega^2 r = m\omega^2 (R \cos \theta) \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{g}{\omega^2 R} .$$

Este resultado es bastante interesante pues impone restricciones sobre ω para que la órbita sea circunferencial. Para que la solución (θ) sea físicamente aceptable debemos exigir que $\omega^2 R > g$. De otro modo $\sin \theta > 1$, lo cual no está permitido para ángulos reales. Esta particularidad la interpretamos como que órbitas circunferenciales del anillo no ocurren para velocidades angulares que satisfagan $\omega^2 R < g$.

4.3.4. Objetos puntuales

Una de las incomodidades comunes para los que se inician en aplicación de las leyes de Newton es la geometría de los cuerpos involucrados. En tal sentido es conveniente hacer un alcance.

Si consideramos un cuerpo sólido y extendido que se mueva sin rotar, cada uno de sus puntos experimentará un mismo desplazamiento, por lo que sus velocidades y aceleraciones serán las mismas. Cuando uno va por la carretera en un tramo recto, la velocidad del chofer es la misma que la del copiloto, la guantera, los asientos, etc. Todos se mueven con la misma aceleración. Para simplificar el estudio en el contexto de las

leyes de Newton, es válido reducir drásticamente la geometría del cuerpo a la de un punto, sobre el cual se hacen actuar todas las fuerzas externas.

Afortunadamente esta consideración es *exacta*, demostrable a partir de las mismas leyes de Newton para un sistema formado por muchas componentes, cada una de ellas sometida a las leyes de Newton ya descritas. Se logra demostrar la siguiente relación,

$$\vec{F} = M\vec{a},$$

donde $\vec{F}$ representa la resultante de las fuerzas externas actuando sobre los constituyentes del sistema, M es la masa total del sistema (suma de sus partes), y $\vec{a}$ es la aceleración del *centro de masas* del sistema.

El centro de masas de un sistema es una coordenada promedio, que se obtiene usando como ponderadores (coeficientes) la masa de cada constituyente. Para cuerpos uniformes de geometría esférica, circular, cubica o lineal, el centro de masas se ubica en sus centros geométricos respectivos.

De modo que la relación que hemos aplicado, $\vec{F} = m\vec{a}$, es también válida para sistemas extendidos (cubos, bloques, autos, rocas, etc.), donde el punto en análisis es el centro de masas del cuerpo extendido. Al aplicar ' $\vec{F} = M\vec{a}$ ' inferimos la aceleración del centro de masas. Si no hay rotaciones ni deformaciones, esa aceleración es la misma que la de cualquier parte del cuerpo.

4.3.5. Problemas distintos pero muy similares

La intención de esta sección no es proveer un recetario de como resolver problemas, sino más bien ilustrar que a pesar de lo distinto que puedan parecer algunos sistemas, hay patrones comunes que conducen a ecuaciones de movimiento bastante similares, incluso idénticas.

En la Fig. (4.18) se presentan nueve esquemas donde los objetos a analizar se mueven en trayectorias rectilíneas o circunferenciales (con rapidez angular constante). Todos ellos están sometidos a la gravedad ($\vec{w} = m\vec{g}$). Si no hay roce, los cuatro primeros ejemplos se rigen por $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$. El ejemplo (3) consiste en un jabón sobre el parabrisas de un vehículo que acelera de forma tal, que el jabón no resbala hacia abajo ni se queda atrás.

Si $\vec{T}$ denota la tensión de la cuerda que sostiene los cuerpos en los esquemas (5) y (6), entonces ambos se rigen por $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$. La única diferencia entre estos dos casos es la naturaleza de la aceleración (centrípeta vs lineal), pero vectorialmente resultan idénticas.

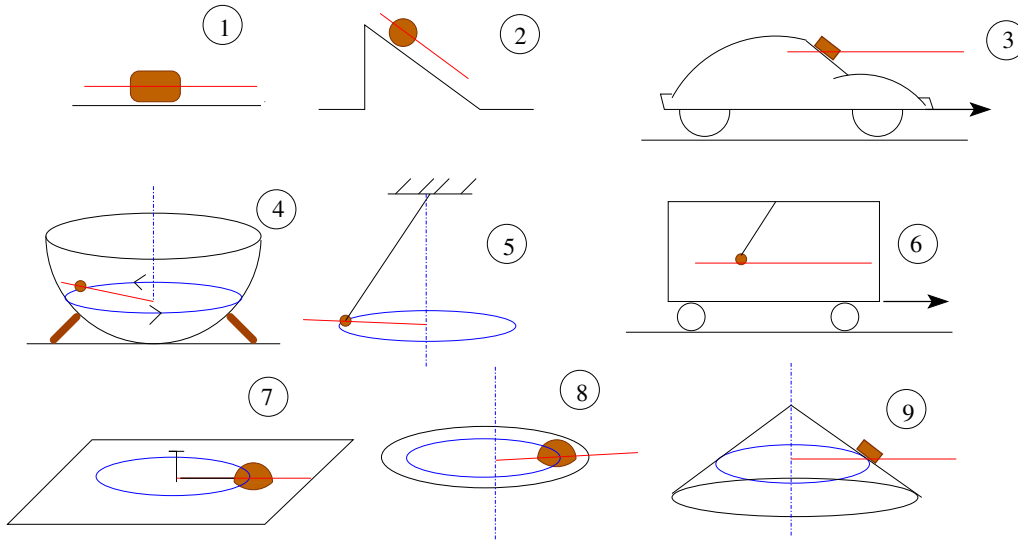


Figura 4.18: En todos estos ejemplos se observa actuando el peso ($\vec{w}$) y una fuerza de contacto [$\vec{C} = f\hat{t} + N\hat{n}$ (o tensión $\vec{T}$)]. Si las velocidades angulares son constantes, las direcciones de todas aceleraciones se indican con las líneas rojas y los vectores resultan en un mismo plano.

El ejemplo (7) consiste en un cuerpo que posa sobre una superficie horizontal resbaladiza, atada mediante una cuerda a un punto fijo en el piso. La trayectoria del cuerpo es circular, por lo que su ecuación de movimiento toma la forma $\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$. El ejemplo (8) consiste en un cuerpo que posa (sin que resbale) sobre un disco que rota. En este caso la fuerza de contacto incluye la componente tangencial (roce), por lo que escribimos $\vec{N} + \vec{f} + m\vec{g} = m\vec{a}$. notar que lo único que ha ocurrido entre estos dos casos es el intercambio $\vec{T} \leftrightarrow \vec{f}$. El sistema (9) consiste en un bloque sobre un cono, sin resbalar. La ecuación del movimiento en este caso incluye el contacto $\vec{N} + \vec{f}$, y el peso. La aceleración es centrípeta y la ecuación del movimiento es la misma que en (8).

Con todo lo anterior surge la pregunta de donde radica la diferencia entre ellos. Si se observa detenidamente, en gran medida en la relación geométrica entre los vectores participantes.

4.4. Fenomenología de la fuerza de roce

Como hemos visto anteriormente, la fuerza de contacto entre dos cuerpos puede ser descompuesta en una componente tangencial y otra normal. En general, tales componen-

tes son independientes entre sí. Sin embargo para el contacto de muchos cuerpos sólidos simples (no tratados químicamente ni en condiciones extremas) se observa una fenomenología que permite relacionar la componente tangencial f de la fuerza de contacto, con la fuerza que caracteriza la compresión entre las superficies, N .

Escudriñemos un poco sobre la fuerza de contacto entre un bloque y el suelo cuando sus superficies de contacto son rugosas. Si el bloque es presionado contra la superficie mediante una fuerza externa $\vec{F}_E$, las superficies (irregulares) de ambos permiten contacto entre ellos sólo en algunos puntos.

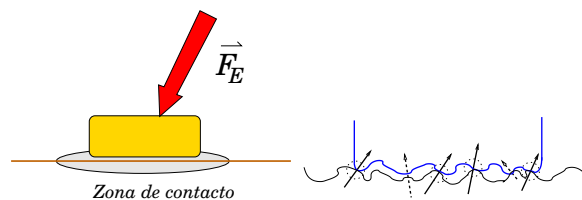


Figura 4.19: Bloque presionado contra una superficie.

Como se ilustra en la Fig. (4.19), en aquellos puntos de mayor cercanía se producen fuerzas *localmente normales*, las que representamos por vectores oblicuos. En cada uno de estos puntos de contacto identificamos un vector normal perpendicular a la tangente común de los “pliegues” en contacto.

Si denotemos por $\vec{c}_i$ a la i -ésima fuerza de contacto sobre el bloque, con $i : 1 \rightarrow N$, entonces la suma de los $\vec{c}_i$ representa la fuerza neta de contacto, $\vec{C} = \sum_{i=1}^N \vec{c}_i$. Descomponiendo en términos de las direcciones tangente y normal, $\vec{C} = \vec{f} + \vec{N} = f \hat{t} + \hat{n} N$.

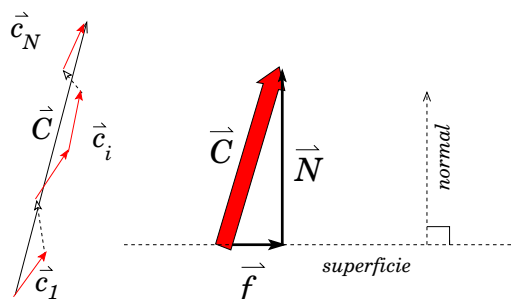


Figura 4.20: Suma de las fuerzas en puntos de contacto y su descomposición normal/tangencial.

4.4.1. Caso estático

Consideremos un contenedor hueco cuya superficie de contacto está hecha de cierto material. Latón por ejemplo. El piso es de madera y queremos caracterizar el contacto entre estas dos superficies. Al bloque se le pone cierta carga al interior, de modo que la fuerza normal será N , controlable mediante las cargas que se le pongan al contenedor. Ayudado de un resorte, el bloque es tirado hacia la derecha. Mientras más elongado esté el resorte, mayor será la fuerza F sobre el bloque. Si no hay movimiento, necesariamente ha surgido una fuerza de roce $\vec{f}$ opuesta a la fuerza del resorte, cumpliéndose $f = F$. Siempre que haya algo de estiramiento, habrá una fuerza de roce, la cual puede ser tan cambiante como lo es la fuerza del resorte al estirarlo/des-estirarlo, sin que se mueva el contenedor. Sin embargo hay una elongación crítica a partir de la cual el contenedor comienza a resbalar. En tal caso se ha alcanzado la *fuerza de roce crítica*, aquella fuerza límite sobre la cual el cuerpo comienza a resbalar.

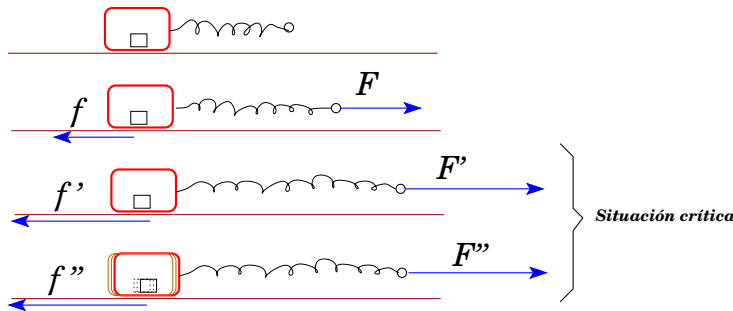


Figura 4.21: Cuando el cuerpo no resbala, la fuerza de roce es tan variable como la fuerza que trata de moverlo. Ello hasta alcanzar la situación crítica, a punto de resbalar.

Para caracterizar la fuerza de roce crítica, se estudia su comportamiento como función de la compresión entre las superficies. Como sabemos, la compresión está dada por la fuerza normal, la cual es controlable con la carga al interior del contenedor. Para distintas normales N (cargas al interior) se mide la fuerza de roce crítica f^* correspondiente. Se tabulan los resultados y se observa el comportamiento lineal, $f^* = \mu_e N$. El coeficiente de proporcionalidad μ_e se denomina *coeficiente de roce estático*. En resumen, cuando el cuerpo no resbala se observa

$$f \leq \mu_e N ,$$

con la igualdad sólo cuando el contenedor está a punto de resbalar.

4.4.2. Caso con resbalamiento

En este caso se cuantifica el comportamiento entre la fuerza de roce cuando hay movimiento, con la fuerza compresora dada por la normal. En este caso también se observa una proporcionalidad entre la fuerza de roce y la compresión entre las superficies:

$$f = \mu_c N .$$

En este caso μ_c corresponde al *coeficiente de roce cinético*.

Tanto μ_e como μ_c son característicos entre las superficies que participan del contacto. Normalmente se da que

$$\mu_c \leq \mu_e \leq 1 .$$

Esto significa que la fuerza de roce estática crítica (a punto de resbalar) es usualmente mayor que la fuerza de roce cinética.

Sin desconocer que los ingenieros y artesanos egipcios, incas, aztecas y chinos deben haber sido muy conocedores del comportamiento de las fuerzas de roce, es instructivo señalar que en 1508, Leonardo da Vinci observa la relación de proporcionalidad entre la fuerza de roce y la compresión. Además observa que la fuerza de roce es independiente del área de contacto. Posteriormente, hacia el año 1699, el investigador francés Amontons observa que la fuerza de roce cinético no depende de la velocidad.

Los coeficientes de roce dependen de la naturaleza de los materiales en contacto: dureza, composición fibrosa, humedad, temperatura, etc. En la Tabla 4.1 se tabulan los coeficientes de roce entre algunos materiales en condiciones normales.

Superficies	μ estático	μ cinético
Acero sobre acero	0,74	0,57
Aluminio sobre acero	0,61	0,47
Cobre sobre acero	0,53	0,36
Goma sobre concreto	1	0,8
Madera sobre madera	0,25–0,5	0,2
Vidrio sobre vidrio	0,94	0,4
Hielo sobre hielo	0,1	0,03
Teflón sobre teflón	0,04	0,04
Cápsula sinovial humana	0,01	0,003

Cuadro 4.1: Coeficientes de roce estáticos y cinéticos entre algunos materiales.

4.4.3. Ejemplos ilustrativos

4.4.3.1. El arrastre de un saco de papas

Cuando arrastramos un bulto, un saco de papas por ejemplo, constatamos que el roce con el piso tiene un efecto importante. Está claro que de nada sirve tirar el bulto verticalmente pues no logramos desplazamiento alguno. Por otro lado, si lo tiramos horizontalmente, la normal actúa en su totalidad, por lo que la fuerza de roce $\mu N = \mu mg$ es máxima. Nos preguntamos entonces por cual es aquel ángulo para el cual el arrastre del bulto es óptimo. Suponemos que el coeficiente de roce (cinético) es simplemente μ .

Antes de resolver o plantear cualquier cosa, debemos identificar la cantidad física a cuantificar para poder afirmar que respondemos nuestra inquietud. Son pocas las variables a considerar, y luego de examinar alternativas queda claro que buscamos una aceleración óptima. Por ello, a partir de las leyes de Newton, buscaremos la aceleración del saco dada la aplicación de una fuerza F . No sabemos aún cual es el ángulo con que debe ser aplicada la fuerza. Por ahora será un parámetro del cual dependerá nuestra solución para la aceleración.

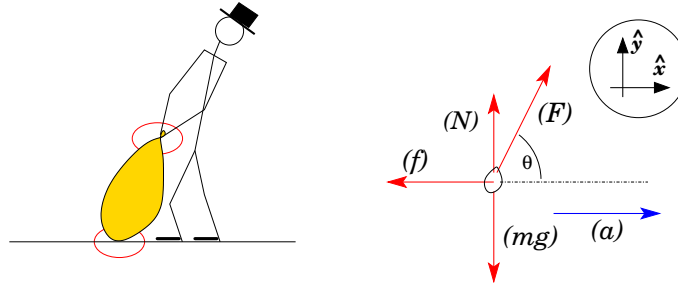


Figura 4.22: Un saco de papas arrastrado por una persona.

En la Fig. (4.22) se ilustra la situación y un diagrama de cuerpo libre donde figuran las fuerzas de contacto con el piso ($\vec{C} = \vec{N} + \vec{f}$), la tensión debido a la persona que arrastra el bulto ($\vec{T}$), y el peso $\vec{w} = m\vec{g}$ del bulto. La ecuación del movimiento queda expresada por,

$$\vec{N} + \vec{f} + m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Proyectando según los ejes $\hat{x}$ y $\hat{y}$ indicados obtenemos

$$0 - f + 0 + F \cos \theta = ma_x \quad (\text{según } \hat{x}) \quad (4.3)$$

$$N + 0 - mg + F \sin \theta = 0 \quad (\text{según } \hat{y}) \quad (4.4)$$

Limpiando ambas ecuaciones obtenemos

$$F \cos \theta - f = ma_x \quad (4.5)$$

$$N = mg - F \sin \theta \quad (4.6)$$

Como se observa, contamos con sólo dos ecuaciones y tres incógnitas: N , a_x y f , lo que nos impide resolver el problema. Sin embargo, si suponemos que el saco resbala contamos con una relación adicional,

$$f = \mu N .$$

Reemplazando en la Ec. (4.5) obtenemos

$$F \cos \theta - \mu N = ma_x ,$$

que combinada con la Ec. (4.6) para N conduce a

$$a_x = \frac{F}{m} (\cos \theta + \mu \sin \theta) - \mu g ,$$

Esta ecuación establece una dependencia entre el ángulo θ de aplicación de la fuerza y la aceleración a_x resultante. Cabe destacar que nuestro supuesto es que hay arrastre (hacia la derecha), por lo que $a_x \geq 0$ es una condición para nuestro resultado. Tal condición exige que $F (\cos \theta + \mu \sin \theta) \geq \mu mg$.

Retoque algebraico útil.-

Definamos una variable Φ tal que $\mu = \tan \Phi$. Claramente, si contamos con μ podemos obtener Φ . En otras palabras, μ y Φ contienen la misma información. Con esta representación alternativa del coeficiente de roce, observese que

$$\cos \theta + \mu \sin \theta = \cos \theta + \left(\frac{\sin \Phi}{\cos \Phi} \right) \sin \theta = \frac{\cos(\theta - \Phi)}{\cos \Phi} ,$$

donde hemos hecho uso de la relación para el coseno de la suma de ángulos.

La utilidad de la relación anterior radica en la lectura de nuestro resultado para a_x . En efecto, es claro que

$$a_x = \left(\frac{F}{m \cos \Phi} \right) \cos(\theta - \Phi) - \mu g ,$$

donde toda la dependencia en la variable θ yace en $\cos(\theta - \Phi)$. De aquí se desprende que la aceleración es máxima cuando $\cos(\theta - \Phi) = 1$, es decir $\theta = \Phi = \arctan(\mu)$. En tal caso la aceleración es

$$a_x^{(max)} = \frac{F}{m \cos \Phi} - \mu g = \frac{F}{m} \sqrt{1 + \mu^2} - \mu g .$$

Examinemos dos casos extremos. Supongamos que no hay roce, por lo que $\mu = 0$. En tal caso conviene tirar horizontalmente el bulto [$\theta = \Phi = \arctan(0) = 0$], logrando una aceleración $a_x = F/m$, resultado trivialmente verificable. El otro caso es el de roce extremo, vale decir $\mu \approx 1$. Aquí el ángulo de tiro está dado por $\theta = \Phi \approx \arctan(1) = \pi/4$ (45°), bisectando la vertical con la horizontal. La aceleración en tal caso es $a_x \approx F\sqrt{2}/m - g$. Para fijar ideas, si la fuerza F que aplicamos fuese igual al peso del objeto, entonces $F \rightarrow mg$, con lo cual $a_x = (\sqrt{2} - 1)g \approx 0,4g$.

4.4.3.2. Caja de fósforos sobre el pasamanos de escalera mecánica

El pasamanos de una escalera mecánica se desplaza a velocidad uniforme, adoptando forma circular (hacia abajo) en el extremo de la escalera. Si uno hace posar una caja de fósforos sobre el pasamanos, esta se mantendrá sin resbalar hasta entrar en el tramo curvo, donde caerá. Esta caída puede ser de dos formas. Una por resbalamiento, donde la condición de roce estático llega a su caso crítico. La otra es por eyección, que ocurriría en el caso de una escalera mecánica muy rápida.

Primero analicemos condiciones sobre la rapidez del pasamanos para que la caída sea por resbalamiento o eyección. Nos daremos como datos la masa m de la caja y el coeficiente de roce estático μ con el pasamanos; la rapidez v del pasamanos y el radio R de su tramo circular; por supuesto, la aceleración de gravedad g .

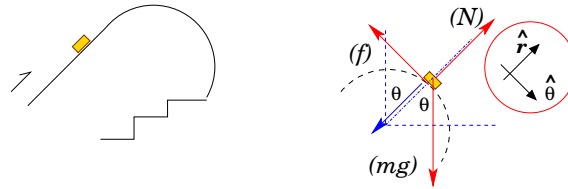


Figura 4.23: Una caja de fósforos sobre el pasamanos de escalera mecánica.

En el esquema izquierdo de la Fig. (4.23) ilustramos la caja de fósforos mientras sube por el pasamanos, mientras que en el esquema derecho se dibuja el DCL para una posición angular θ con respecto a la vertical. En ese tramo el movimiento es circular uniforme, por lo que la aceleración es centrípeta, de magnitud v^2/R , apuntando hacia el centro de la circunferencia.

Las fuerzas sobre la caja son su peso $m\vec{g}$ y contacto $\vec{C}$ con el pasamanos, que descomponemos $\vec{C} = \vec{f} + \vec{N}$. Por lo tanto la Ec. de movimiento es simplemente

$$m\vec{g} + \vec{f} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Efectuamos proyecciones según los vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ indicados, obteniendo

$$-mg \cos \theta + 0 + N = -m \frac{v^2}{R} \quad (\text{según } \hat{r}) \quad (4.7)$$

$$mg \sin \theta - f + 0 = 0 \quad (\text{según } \hat{\theta}) \quad (4.8)$$

Limpiando se obtiene

$$N = m \left(g \cos \theta - \frac{v^2}{R} \right) \quad (4.9)$$

$$f = mg \sin \theta \quad (4.10)$$

Hagamos lectura de estos resultados. El primero de ellos, dado por la Ec. (4.9), nos dice que mientras mayor sea la velocidad, más débil es N . Cuando $N = 0$, la caja de fósforos está a punto de perder contacto con el pasamanos. Tal desprendimiento sería *por eyección*, cumpliéndose

$$g \cos \theta = \frac{v^2}{R}, \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{v^2}{gR}.$$

Esta relación determina el ángulo donde se produce el desprendimiento por eyección. Claramente, para $v^2 > gR$, la caja pierde contacto con el pasamanos tan pronto comienza a encorvarse.

El otro tipo de caída ocurre por resbalamiento (pasamanos lento). Aquí la fuerza de roce alcanza su valor crítico, $f = \mu N$. Sustituyendo obtenemos

$$mg \sin \theta = \mu m \left(g \cos \theta - \frac{v^2}{R} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu v^2}{gR} = \mu \cos \theta - \sin \theta.$$

Nuevamente podemos sacar provecho a la representación $\mu = \tan \Phi$. Luego de un álgebra sencilla obtenemos

$$\frac{\mu v^2}{gR} = \frac{\sin(\Phi - \theta)}{\cos \Phi}.$$

El ángulo θ del resbalamiento queda dado por

$$\sin(\Phi - \theta) = \frac{v^2}{gR} \sin \Phi \equiv \beta \sin \Phi;.$$

Este resultado sintetiza la respuesta a nuestro problema. Para un coeficiente de roce dado (implícito en Φ) y valor de $\beta = v^2/gR$, el ángulo θ de resbalamiento queda completamente determinado. En particular, observe que si $\beta = 1$, o sea $v^2 = gR$, se obtiene $\theta = 0$, consistente con el análisis anterior. En el otro extremo, $\beta \sim 0$ (escalera

prácticamente detenida), entonces $\theta = \arctan \mu$, que es la condición de resbalamiento en un plano inclinado (estático).

El paso siguiente tiene por propósito ilustrar un análisis que uno intentaría para sacar mayor provecho a este resultado. Se trata de un gráfico θ versus μ para distintos valores del parámetro β . Construimos un pequeño programa o planilla de cálculo donde, para μ y β dados, determinamos θ . La secuencia es

$$\mu \rightarrow \Phi = \arctan \mu \rightarrow \theta = \Phi - \arcsin(\beta \sin \Phi) .$$

En la Fig. (4.24) se muestran cinco curvas, cada uno con un β distinto. Los ángulos se dan en grados.

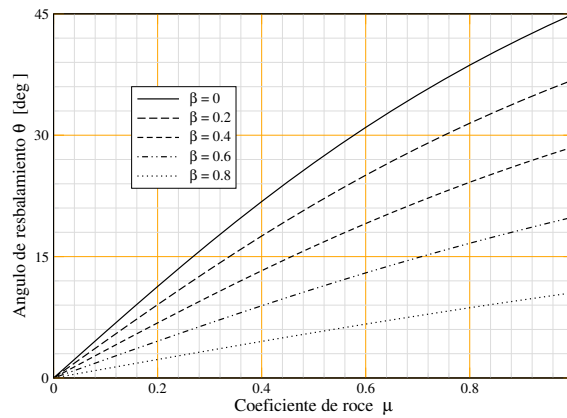


Figura 4.24: El ángulo de resbalamiento en el pasamanos para varios $\beta \equiv v^2/gR$.

Note que β crece con la rapidez. A mayor rapidez, mayor es β . De acuerdo con la Fig. vemos que el ángulo de resbalamiento es menor, resultado esperable.

4.5. Fuerzas elásticas y el resorte

Un resorte lo asociamos comunmente con una helicoide metálica, usualmente hecho de acero, el cual puede ser elongado al aplicar fuerzas opuestas desde sus extremos. Al momento en que tales fuerzas cesan el resorte retoma su configuración natural. Este fenómeno tiene su origen en la naturaleza de las fuerzas intermoleculares de los constituyentes del material del resorte, las que en última instancia corresponden a interacciones electromagnéticas.

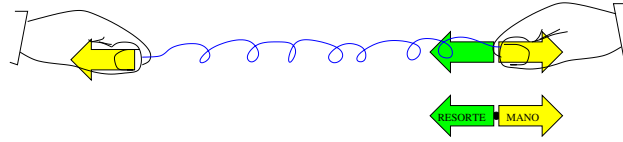


Figura 4.25: Un resorte es elongado al tirarlo desde sus extremos. A mayor fuerza, mayor elongación.

En la Fig. (4.25) se muestra un resorte estirado por una persona. Para que el resorte no se mueva necesariamente la fuerza neta según la horizontal debe ser nula. Efectivamente, la persona que sostiene y estira el resorte debe ejercer la misma fuerza a ambos extremos de este.

En el esquema inferior derecho se ilustran las dos fuerzas que afectan a una porción diminuta del resorte en su extremo. Tal porción es tirada hacia la derecha por la mano ($\vec{F}_M$), y hacia la izquierda por el cuerpo del resorte ($\vec{F}_e$). Si la porción diminuta es de masa ínfima, entonces $\vec{F}_M + \vec{F}_e = 0 \times \vec{a} = 0$. Por lo tanto la fuerza del resorte se infiere a partir de $\vec{F}_M$, la fuerza aplicada por la mano. Esta observación permite indagar la relación entre la fuerza del resorte y su geometría, en particular su elongación.

Consideremos esta vez un resorte colgando desde uno de sus extremos, como se ilustra en la Fig. (4.26). El resorte, que supondremos muy liviano, queda orientado verticalmente. En el extremo inferior se adosarán cargas de masas iguales, las que pudieran ser monedas idénticas.

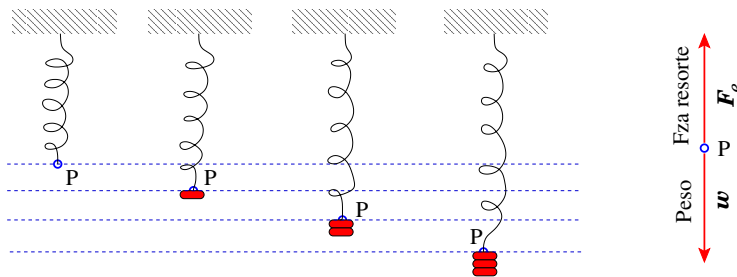


Figura 4.26: Un resorte es tensado gradualmente mediante cargas en su extremo inferior.

Se observa que por cada unidad de carga que se adosa al extremo inferior, el resorte incrementa su estiramiento en la misma cantidad. Por lo tanto, si δ denota el estiramiento del resorte y w la carga aplicada, entonces

$$w \propto \delta .$$

Además, el extremo P del resorte está expuesto a dos fuerzas: hacia abajo lo tira el peso w de la carga, en tanto que hacia arriba lo tira la fuerza del resorte: F_e . Siendo la masa del extremo P ínfima, entonces $F_e = w$ (para las magnitudes). Por lo tanto

$$F_e = w \propto \delta .$$

Esta ley de proporcionalidad entre F_e y δ se expresa mediante la igualdad (¡para la magnitud!)

$$F_e = k \delta .$$

Aquí, k corresponde a la constante elástica del resorte y se expresa en N/m.

Es conveniente hacer algunos alcances en relación al modelo para un resorte.

- i.- Hay resortes diseñados para estiramientos (como los elásticos de oficina) y otros para compresiones (como los amortiguadores). Para ambos casos, compresión o estiramiento, supondremos válido el comportamiento $F_e = k \delta$. El sentido de la fuerza siempre buscará que el extremo libre se dirija a su posición no forzada. A eso se le denomina *fuerza restitutiva*.
- ii.- En la naturaleza todos los resortes tienen masa. Sin embargo hay muchas situaciones en que una idealización es suficiente para cuantificar algún fenómeno. En tal sentido, en muchos casos podremos despreocupar la masa del resorte reduciendo el modelo al de un *resorte ideal*. La longitud del resorte –no estirado desde luego– se denomina *longitud natural*.
- iii.- En general el comportamiento elástico de un resorte tiene un rango de validez acotada. Cuando estiramos demasiado un resorte es posible que se deforme irreversiblemente. En tales casos uno ha sobrepasado el régimen elástico del resorte, induciendo deformaciones permanentes, cambiando la configuración natural del resorte. Estas deformaciones permanentes del resorte tienen su origen en la fatiga del material que lo constituye, tema que es abordado en asignaturas especializadas.

4.5.1. Representación cartesiana de una fuerza elástica

En ocasiones resulta práctico representar la fuerza de un resorte en coordenadas cartesianas. En la Fig. (4.27) se ilustra un resorte orientado en la dirección del eje x , creciente hacia la derecha.

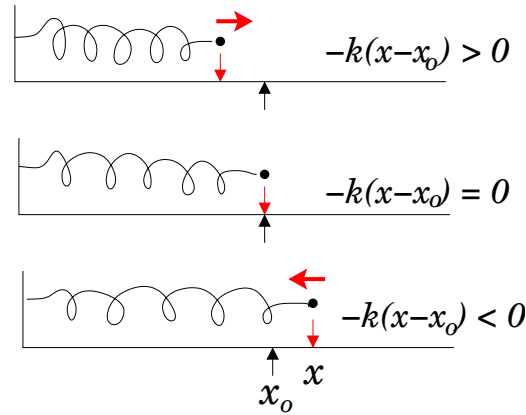


Figura 4.27: Un resorte es comprimido y estirado según el eje x . Cuando el extremo del resorte se ubica en x_o no hay elongación.

El extremo izquierdo del resorte se fija a una muralla, quedando su extremo libre en x_o si el resorte no es tensado. El esquema superior representa compresión del resorte y el inferior un estiramiento. En todas estas situaciones la fuerza del resorte $\vec{F}_e$ se puede representar mediante

$$\vec{F}_e = -k(x - x_o) \hat{x}.$$

Claramente, si $x > x_o$, la fuerza del resorte apunta hacia la izquierda. Cuando x está a la izquierda de x_o ($x < x_o$), la resultante apunta hacia la derecha. Evidentemente, si $x = x_o$, la fuerza del resorte es nula.

4.5.2. Algunos ejemplos

4.5.2.1. Órbita circular con un elástico

Consideremos un elástico de longitud natural L y constante elástica k . Uno de sus extremos se fija a un clavo en un plano horizontal y absolutamente resbaladizo. Una bolita de masa m se adosa al extremo libre del elástico y se hace girar con velocidad angular Ω . Suponiendo que la órbita adquirida es circular —como se ilustra en la Fig. (4.28)— nos preguntamos por el radio de la órbita.

Este es un problema bastante simple. Sobre la bolita actúan tres fuerzas: Su peso $m\vec{g}$, la normal $\vec{N}$ del plano sobre la bolita, y la fuerza del resorte $\vec{F}_e$ apuntando radialmente hacia el centro de la trayectoria.

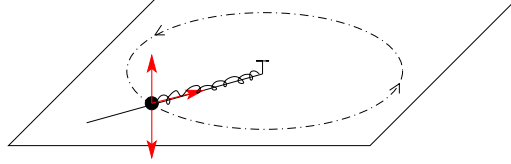


Figura 4.28: Bolita en órbita circular sostenida por un resorte. En este caso $\vec{N}$ y $m\vec{g}$ se cancelan vectorialmente.

La ecuación del movimiento (2da Ley de Newton) se reduce a

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_e = m\vec{a}.$$

Puesto que el movimiento es plano y la bolita se apoya en un plano horizontal, entonces necesariamente la normal $\vec{N}$ y el peso $m\vec{g}$ se cancelan. Nos queda $\vec{F}_e = m\vec{a}$. Si δ denota la elongación del resorte, entonces $\vec{F}_e = -k\delta\hat{r}$, con $\hat{r}$ un vector radial desde el centro de la órbita.

La aceleración de la bolita es sólo centrípeta, $\Omega^2 \times \text{radio}$, apuntando según $-\hat{r}$. El radio en este caso es $r = L + \delta$: debe contemplar la elongación del elástico. Por lo tanto

$$k\delta = m\Omega^2(L + \delta) \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{m\Omega^2}{k - m\Omega^2} L = \frac{\Omega^2}{\omega_o^2 - \Omega^2} L.$$

Aquí hemos definido convenientemente $\omega_o^2 = k/m$, que corresponde a la frecuencia natural de oscilación de un resorte cuando cuelga una carga de masa m . El radio de la órbita es $L + \delta$, con lo cual

$$r = \frac{\omega_o^2 L}{\omega_o^2 - \Omega^2}$$

Observamos que el radio de la órbita crece a medida que Ω se acerca a ω_o . En el caso extremo, cuando $\Omega \sim \omega_o$, el resorte simplemente es incapaz de sostener la bolita, haciendo que el radio de la órbita crezca indefinidamente.

4.5.2.2. Anillos simétricos sobre barra doblada

Este es un caso donde, por ahora, no hay movimiento. Consideremos una barra de superficies pulidas, doblada en forma de 'V' formando un ángulo α . Su vértice P se fija en un punto. Dos anillos se ubican a ambos lados de la barra, unidos por un resorte de constante elástica k . El resorte queda en posición horizontal. Nos preguntamos por la elongación que sufre el resorte para sostener los anillos como se ilustra en la Fig. (4.29)

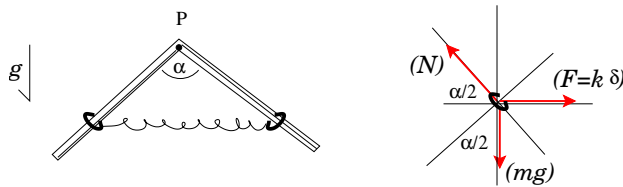


Figura 4.29: Anillos sobre una barra doblada, sostenidos por resorte horizontal.

Como ya ha sido usual, debemos identificar el cuerpo a analizar en el contexto de las leyes de Newton. En este caso tomamos ventaja de la simetría del sistema, analizando uno de los dos anillos (ver diagrama de la derecha). Para tal anillo observamos tres fuerzas actuando sobre él: su peso $m\vec{g}$, la normal $\vec{N}$ debido al contacto de la barra sobre el anillo, y la fuerza $\vec{F}$ del resorte (de magnitud $k\delta$). El sistema no se mueve, por lo que la aceleración del anillo es nula. Así entonces,

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = 0 .$$

Denotando por $\hat{x}$ la dirección horizontal e $\hat{y}$ la vertical, proyectamos según ambas direcciones y obtenemos:

$$-N \cos(\alpha/2) + k\delta = 0 , \quad -mg + N \sin(\alpha/2) = 0 .$$

Con lo anterior obtenemos $\tan(\alpha/2) = mg/k\delta$, de donde

$$\delta = \frac{mg}{k \tan(\alpha/2)} .$$

Claramente, mientras más agudo sea α , mayor será δ . El otro caso extremo es $\alpha = \pi$, correspondiente a una barra sin doblar. Cuando $\alpha \rightarrow \pi$, $\tan(\alpha/2) \rightarrow \infty$, por lo que $\delta \rightarrow 0$, como es de esperar.

Una extensión trivial e interesante se da cuando la barra acelera hacia arriba con aceleración a_y . El análisis de cuerpo libre es idéntico al anterior. La única diferencia surge en la inclusión del término $m\vec{a}$, cuya proyección según $\hat{y}$ conduce a ma_y . Una revisión de las ecuaciones anteriores lleva directamente al siguiente resultado para δ :

$$\delta = \frac{m(g + a_y)}{k \tan(\alpha/2)} .$$

En este caso, si $a_y = -g$, correspondiente a caída libre, la elongación también resulta nula.

4.5.3. Combinación de resortes

Si contamos con dos resortes, entonces podemos combinarlos de dos formas *i.-* unirlos en uno de sus extremos y aplicar fuerzas en sus extremos libres (combinación en serie); e *ii.-* unir ambos extremos y aplicar fuerzas en sus puntos de unión (combinación en paralelo). Ambas situaciones se ilustran en la Fig. (4.30) para tres resortes de constantes elásticas k_1 , k_2 y k_3 , respectivamente.

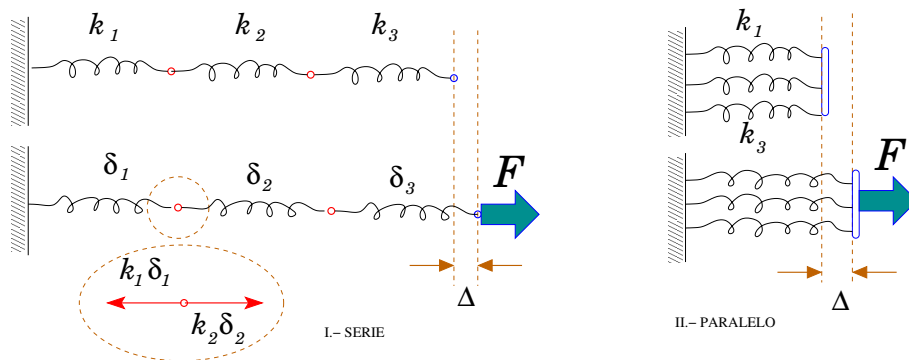


Figura 4.30: Combinaciones en serie (izquierda) y paralelo (derecha) de tres resortes.

Lo interesante es que en todos estos casos, la fuerza del resorte puede ser representada de la forma '*Constante Elástica Efectiva* $\times \Delta$ ', con Δ la elongación del conjunto. La forma de la constante elástica efectiva dependerá del tipo de combinación que se utilice.

En una combinación en serie, cada juntura está sometida a las fuerzas elásticas de los dos resortes inmediatos. Consideremos una fuerza auxiliar F aplicada al extremo libre del resorte. En este extremo también actúa el tercer resorte, ejerciendo una fuerza de magnitud $k_3\delta_3$ hacia la izquierda. La segunda juntura es tirada hacia la izquierda con fuerza $k_2\delta_2$ y hacia la derecha con $k_3\delta_3$. Lo mismo para la primera juntura: $k_1\delta_1 = k_2\delta_2$. Con lo anterior obtenemos

$$\delta_3 = F \frac{1}{k_3}, \quad \delta_2 = F \frac{1}{k_2}, \quad \delta_1 = F \frac{1}{k_1}.$$

Puesto que la elongación total debe ser igual a la suma de las elongaciones individuales, entonces

$$\Delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)$$

De aquí obtenemos que la constante elástica en serie, K_s , está dada por

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}.$$

En este caso la fuerza elástica F_e del resorte queda dada por $F_e = K_s \Delta$.

En una combinación en paralelo, todos los resortes experimentan una misma elongación Δ . La fuerza auxiliar F aplicada hacia la derecha debe ser igual a la suma de las fuerzas de los tres resortes tirando hacia la izquierda:

$$F = k_1 \Delta + k_2 \Delta + k_3 \Delta = (k_1 + k_2 + k_3) \Delta .$$

Claramente en esta combinación en paralelo de resortes, la constante elástica equivalente, K_p , está dada por

$$K_p = k_1 + k_2 + k_3 .$$

La extensión de ambos resultados para N resortes es inmediata.

Dado que a mayor constante elástica, mayor rigidez, entonces en una combinación en paralelo de resortes, uno obtiene una configuración más rígida. En el caso de una combinación en serie, la constante equivalente resulta menor que la menor de los resortes participantes: el resorte equivalente resulta más blando que el más blando.

4.6. Aplicaciones más completas

Esta vez revisemos algunas aplicaciones que involucren algún tipo de sutileza. Los problemas son simples.

4.6.0.1. Tensión de una boleadora

Las boleadoras fueron instrumentos de caza utilizados por nativos de Chile y Argentina. Las boleadoras de dos piedras consisten en dos piedras unidas por una cuerda, la cual era lanzada a las patas de los animales que buscaban cazar. Durante el vuelo, la cuerda de la boleadora se mantiene tensa debido al movimiento de rotación de las piedras. En la Fig. (4.31) se muestran dos piedras de masa m unidas por una cuerda de masa despreciable y longitud L . El sistema se mantiene rotando con velocidad angular ω . Por ahora nos podemos abstraer del vuelo de la boleadora y la imaginamos rotando en el espacio.

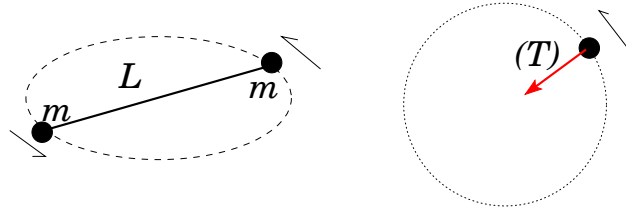


Figura 4.31: Una boleadora de dos piedras. A la derecha se separa una de las piedras para su análisis en el contexto de las leyes de Newton.

Si aislamos una de las piedras, que describe un movimiento circunferencial uniforme, observamos que ella es afectada sólo por una fuerza: la acción de la cuerda sobre ella. A esta fuerza la denotamos $\vec{T}$, apuntando hacia el centro de la trayectoria. La aceleración de la piedra es centrípeta, de valor $\omega^2 \times L/2$, siendo $L/2$ el radio de la órbita. Por lo tanto, la relación $\vec{T} = m\vec{a}$ conduce a

$$T = m\omega^2 L/2 .$$

Una extensión interesante de este análisis lo encontramos en un sistema formado por cuatro bolitas unidas por cuatro cuerdas de igual longitud, como se muestra en la Fig. (4.32). El sistema puede rotar sobre una mesa pulida. Si la velocidad angular es dada, entonces podremos calcular la tensión de las cuerdas. Para ello aislamos una de las masas, identificando sólo dos fuerzas (tensiones) actuando sobre ella, coplanares a la aceleración. La dirección de la aceleración (centrípeta) bisecta las tensiones. El resto del desarrollo es directo.

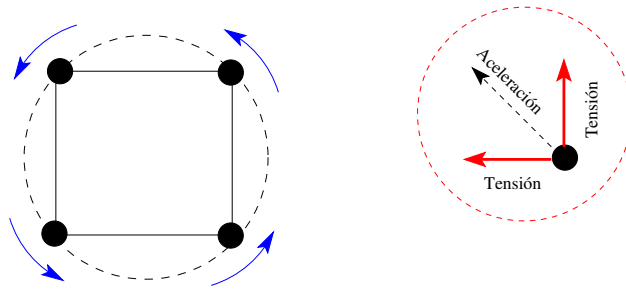


Figura 4.32: Cuatro masas idénticas unidas por cuatro cuerdas ideales de igual longitud.

El cordel que usan los vaqueros tiene una masa no nula. Antes de lanzar el lazo a la cabeza de novillo, el vaquero lo hace girar con cierta velocidad angular. Nos preguntamos por la tensión que se produce en el cordel debido a su rotación.

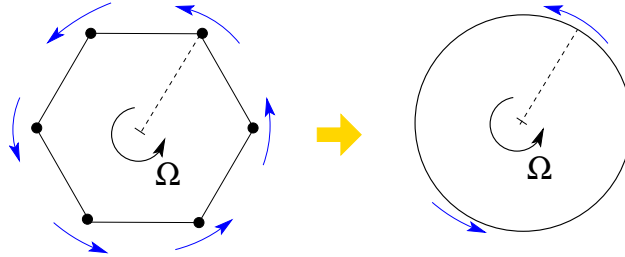


Figura 4.33: Para representar un cordel de masa m podemos imaginar un polígono de N bolitas de masa m/N unidas por cuerdas ideales. En el límite N muy grande, la tensión de las cuerdas correspondería a la tensión del cordel.

Para resolver este sistema podemos discurrir a un sistema formado por masas puntuales unidas por cuerdas ideales, formando un polígono regular de N vértices [ver Fig. (4.33)]. La distancia de cada una de estas masas al centro del polígono es R . Al aislar una de las masas y analizarla, se identifican dos tensiones que sumadas vectorialmente resultan apuntando hacia el centro de la órbita circular. Su aceleración es $\Omega^2 R$. Una vez que se obtiene la tensión para un N dado, se puede examinar el caso extremo en que N es muy grande. El resultado conlleva a la tensión de la cuerda.

4.6.0.2. Dos cargas y dos poleas

Consideremos dos poleas de masa despreciable, un cubo de masa M y una bolita de masa m . El sistema se dispone como se ilustra en la Fig. (4.34): una cuerda ideal se ata a P , la cual lleva adherida en su extremo libre una bolita de masa m . Nos preguntamos por la aceleración de la bolita y la tensión de la cuerda.

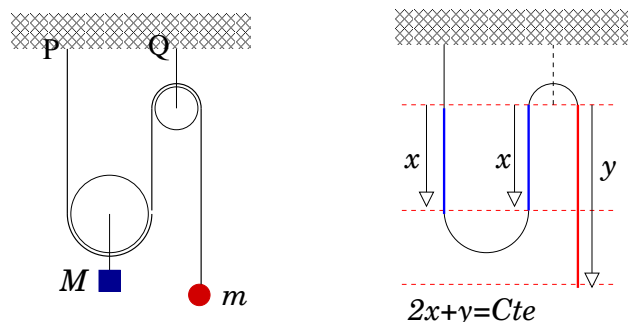


Figura 4.34: Cuerda inextensible con extremo fijo en P y bolita adosada en su otro extremo. La cuerda envuelve dos poleas: la de la derecha está afirmada al techo y sólo puede rotar, en tanto que la izquierda sube o baja de igual forma a como lo hace el cubo de masa M .

Una de las sutilezas en este problema radica en la identificación del cuerpo a examinar en el contexto de las leyes de Newton. Además, las aceleraciones de ambos cuerpos no son independientes, como lo exige el hecho de que la cuerda sea inextensible. Procedamos por partes.

El sistema involucra dos cuerpos. La bolita está sometida a dos fuerzas: la tensión T de la cuerda (apuntando hacia arriba) y su peso mg , apuntando hacia abajo. Si utilizamos la coordenada y orientada positivamente hacia abajo, como se ilustra en el diagrama de la derecha, entonces tenemos

$$mg - T = ma_y ,$$

con a_y la aceleración (vertical) de la bolita.

El cubo, en tanto, está sostenido por un sólo cordel, el que se une a la polea. Si T' es la tensión de ese pedazo de cordel, entonces, al igual que en el caso anterior escribimos:

$$Mg - T' = Ma_x .$$

A este punto contamos con dos (2) ecuaciones y cuatro (4) incógnitas: T , T' , a_x , a_y , por lo que se requiere de más información para resolverlo.

Ahora demostraremos que $2T = T'$. Para ello consideramos como 'el cuerpo' a analizar el conjunto *(Primera Polea) ⊕ (Porciones de Cuerda Tocándola)*. Tal cuerpo se aísla del resto y dibujamos las fuerzas que desde su exterior lo 'tocan'. Ello se ilustra en la Fig. (4.35).

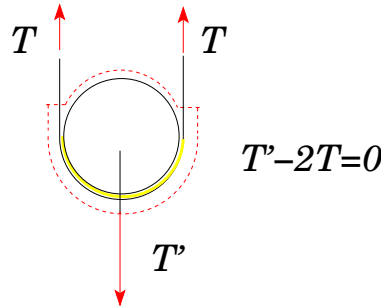


Figura 4.35: Objeto compuesto por polea y cuerdas en contacto con ella. Sólo las tensiones actúan sobre este objeto.

Cabe hacer notar que con esta elección de ‘cuerpo’, las fuerzas de contacto entre la polea y la cuerda son internas, por lo que no participan en ‘ $\vec{F} = m\vec{a}$ ’. Considerando que la masa de la polea es nula, entonces escribimos para la proyección vertical $T' - 2T = 0$, con lo cual

$$T' = 2T .$$

Contamos ahora con tres (3) ecuaciones y cuatro (4) incógnitas.

La ecuación adicional surge de imponer que la cuerda es inextensible. Obsérvese el diagrama derecho de la Fig. (4.34). Es fácil constatar que $2x + y = Cte$, por lo que $2\delta x + \delta y = 0$. Si estas variaciones ocurren en un lapso δt , entonces las velocidades satisfacen $2v_x + v_y = 0$, de la cual

$$2a_x + a_y = 0 .$$

Esta es la cuarta ecuación que necesitábamos. El resto es sólo un trabajo algebraico directo, luego del cual se obtienen a_y y tensión T de la cuerda,

$$a_y = \frac{2(2m - M)g}{M + 4m} , \quad T = \frac{3mMg}{M + 4m} .$$

Obsérvese que si $m = M/2$ el sistema no acelera. Eso quiere decir que, por ejemplo, una persona de masa $m = 80$ kg queda a punto levantar una carga de masa $M = 160$ kg, tan sólo mediante el uso de la configuración descrita.

Otra situación límite de interés ocurre cuando una de las masas es nula. Por ejemplo, si el cubo es de masa nula ($M = 0$), entonces la bolita caería libremente. Al evaluar en las expresiones anteriores obtenemos $a_y = g$, y $T = 0$, consistente con lo esperado. Otro caso extremo se da cuando la bolita es de masa nula ($m = 0$), para el cual $a_y = -2g$. En este límite la polea y el cubo caen libremente, con $a_x = g$.

4.7. La Ley de Gravitación Universal

Una de las contribuciones más notables de Newton es la *Teoría de Gravitación Universal*, donde postula a una ley de fuerzas entre cuerpos masivos a distancia. Con esta ley fué posible entender, dentro de un mismo contexto, fenómenos tan diversos como la caída de una manzana sobre la Tierra, la duración de 27.32 días del período lunar, la duración del año terrestre, el movimiento de los cometas y las mareas. Más aún, fué la Teoría de Gravitación la que permitió el descubrimiento de un planeta nunca antes observado: Urano.

Esta teoría fué la culminación de un proceso de abstracción impecable. Su primera presentación la hizo Newton ante la *Royal Society* de Inglaterra, el 21 de marzo de 1666. La teoría se basa en dos elementos: la *Leyes de Kepler* sobre el movimiento de los planetas y las leyes de Newton sobre el movimientos de los cuerpos.

4.7.1. Las Leyes de Kepler

Tycho Brahe (1546-1601) fué un noble danés quién desde temprana edad tuvo gran interés por cartas celestes. Algo que le llamó mucho la atención era la gran diversidad de datos astronómicos, casi todos contradictorios entre sí. Vió así la necesidad de llevar a cabo mediciones precisas y sistemáticas por un gran período de tiempo. Eso lo lleva a la construcción del primer observatorio astronómico, Uraniborg, hacia 1576. Las observaciones que allí se hicieron duraron casi 20 años, momento en el cual Brahe migra a Praga por discrepancias con su mecena, el rey Cristian IV de Dinamarca.

Una vez en Praga, desde 1600 hasta su muerte en 1601, Brahe trabaja con su ayudante Johannes Kepler. Posteriormente Kepler continúa el estudio de las anotaciones de Brahe para dilucidar leyes que gobiernen los movimientos de los planetas alrededor del Sol.

La Primera Ley de Kepler.- Esta ley fué enunciada en 1609 y se refiere a las trayectorias de los planetas. En ella Kepler establece que:

*Todos los planetas describen órbitas elípticas en torno al Sol,
con este ubicado en uno de sus focos.*

Una elipse es una curva cerrada que se puede dibujar con la ayuda de dos alfileres, un pedazo de cuerda y un lápiz. Los dos alfileres se fijan a una superficie y los extremos de la cuerda se atan a cada alfiler. El extremo inferior del lápiz se usa para tensar la

cuerda, marcando así los puntos que resulten. Una elipse tiene dos focos, F y F' en la Fig. (4.36), que coinciden con la posición de los alfileres.

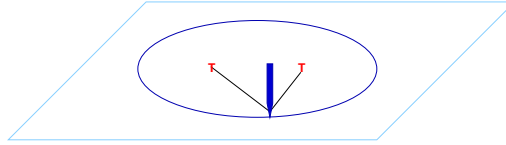


Figura 4.36: Una elipse es dibujada tensando una cuerda con sus extremos fijos al papel.

La circunferencia es un caso particular de una elipse, la cual se obtiene al hacer coincidentes las posiciones de los alfileres. En este caso la longitud del cordel es igual al doble del radio de la circunferencia.

Una manera de caracterizar geométricamente una elipse es mediante un parámetro denominado *excentricidad* y que denotaremos por e . Este parámetro se define como el cociente entre la distancia del centro de la elipse a uno de sus focos y la longitud a del semieje mayor [ver Fig. (4.37)]. Por lo tanto, la excentricidad es una medida de la separación entre los focos de la elipse. En el caso de una circunferencia la excentricidad nula.

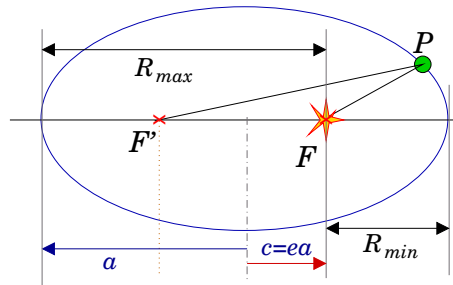


Figura 4.37: Una elipse de excentricidad e y semieje mayor de longitud a .

La trayectoria elíptica de los planetas también es caracterizada por la distancia máxima (afelio) y mínima (perihelio) al Sol. Si a denota la longitud del semieje mayor, y e la excentricidad de la elipse, entonces

$$R_{max} = a + ea = (1 + e)a, \quad R_{min} = a - ea = (1 - e)a,$$

por lo que el radio medio de la órbita $\bar{R}$ resulta $\bar{R} = (R_{max} + R_{min})/2 = a$. En otras palabras, el radio medio coincide con la longitud del semieje mayor.

En la Tabla 4.2 se listan las excentricidades, radios medios y período de órbita para los planetas del sistema solar. Los radios medios se han expresado en *Unidades Astronómicas*². En tiempos de Kepler sólo se conocían seis planetas, hasta Saturno. Obsérvese que, con la excepción de Mercurio (y Plutón), las excentricidades de las órbitas planetarias son bastante moderadas, variando entre 0,7 % (Venus) y 9 % (Marte).

Planeta	Excentricidad	Radio Medio [UA]	Período [Años]
Mercurio	0.2056	0.387	0.240
Venus	0.0068	0.723	0.615
Tierra	0.0167	1.000	1.000
Marte	0.0934	1.524	1.881
Júpiter	0.0483	5.203	11.859
Saturno	0.0560	9.539	29.457
Urano	0.0461	19.191	84.323
Neptuno	0.0097	30.061	164.79
Plutón	0.2482	39.529	248.09
Cometa Halley	0.967	17.84	75.3

Cuadro 4.2: Datos de las órbitas de los planetas del sistema solar.

La Segunda Ley de Kepler.- Esta ley fué enunciada junto con la primera, y establece que

*La línea que une el Sol con un planeta
barre áreas iguales en lapsos iguales.*

Como veremos más adelante, esta propiedad es consecuencia de que la fuerza gravitacional sea una *fuerza central*, vale decir su dirección coincide con la línea que une los cuerpos interactuantes.

En la Fig. (4.38) se ilustra un planeta en órbita elíptica, con el Sol en uno de sus focos. Dado un lapso δt , el planeta barre la misma área δA , independientemente de donde se encuentre inicialmente.

²1 Unidad Astronómica corresponde a la distancia media Tierra-Sol. Su equivalencia en el SI es 1 UA=149,60 $\times 10^6$ km.

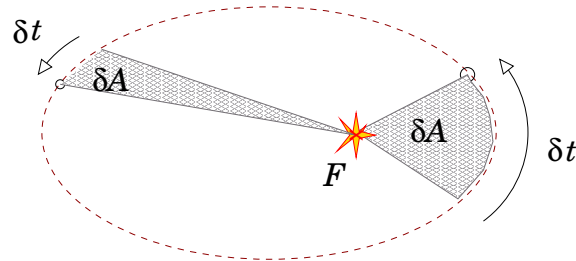


Figura 4.38: Dado un lapso de tiempo δt , el área barrida por la línea que une el Sol con el planeta es la misma, independientemente del tramo en que ella se mida.

La Tercera Ley de Kepler.- Esta ley fué enunciada diez años después que sus antecesoras, y se le reconoce como *ley de los períodos*. En este caso Kepler evalúa el cuadrado del período orbital de los planetas y los divide por el cubo del radio medio respectivo, observando que el cuociente es el mismo para todos. Así, la tercera ley de Kepler se enuncia

Para todo planeta, el cuadrado de su período orbital es proporcional al cubo de su radio medio.

En otras palabras,

$$\frac{T^2}{a^3} = K \quad (\text{constante}).$$

Esta ley es bastante interesante puesto que condiciona el radio medio y el período para cualquier astro que interactúe con el Sol. Tomemos el caso del Cometa Halley, cuyo período orbital es de 75,3 años. Considerando los datos de la tierra (en años y AU), tenemos

$$\frac{1^2}{1^3} = \frac{(75,3)^2}{a^3} \quad \Rightarrow \quad a = 17,8 \text{ AU}.$$

Puesto que la distancia mínima del cometa Halley al Sol es tan solo de 0.586 UA, su distancia máxima (afelio) debe ser 35,0 UA. Al examinar los datos de la Tabla 4.2 vemos que el cometa Halley sobrepasa la órbita de Neptuno.

4.7.2. La conjetura de Newton

Presentaremos una divagación contemporánea de como conjeturar la ley de gravitación propuesta por Newton. Para ello consideremos un planeta imaginario de masa m orbitando circunferencialmente alrededor del Sol. Si el radio de la órbita es r y su

velocidad angular es ω , entonces la única fuerza que lo puede afectar es la gravitacional $\vec{F}_G$. Escribimos entonces $\vec{F}_G = m\vec{a}$, con $\vec{a} = -\omega^2 r \hat{r}$. Por lo tanto

$$\vec{F}_G = -m\omega^2 r \hat{r}.$$

Por otro lado consideremos la tercera ley de Kepler, donde $T^2 = Kr^3$. Puesto que la velocidad angular ω y el período se relacionan mediante $\omega = 2\pi/T$, entonces la tercera ley de Kepler se puede reescribir $\omega^2 \propto 1/r^3$, o bien $\omega^2 = \kappa/r^3$, con κ una nueva constante de proporcionalidad. Reemplazando en la expresión anterior para $\vec{F}_G$ obtenemos

$$\vec{F}_G = -\frac{m\kappa}{r^2} \hat{r}.$$

Obsérvese que la tercera ley de Kepler ya implica una ley de fuerzas donde la interacción decrece con el cuadrado de la distancia. Si bien esta expresión representa la fuerza mutua entre el planeta de masa m y el Sol, ella no trata en forma simétrica a ambos participantes. Esto es evidente al observar el término $m\kappa/r^2$, donde sólo figura la masa m del planeta pero no la del Sol.

La simetría para esta ley de fuerzas se rescata si uno postula a que $m\kappa = mMG$, donde M representa la masa del Sol y G otra constante de proporcionalidad. Por lo tanto escribimos, para la fuerza del Sol sobre el planeta de masa M

$$\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2} \hat{r}.$$

A este punto hemos emergido a una expresión para la fuerza entre dos astros. Es en este punto donde Newton conjetura una ley de fuerza entre cuerpos puntuales de masas m_1 y m_2 separados a una distancia r . Si $\hat{r}$ representa el vector unitario desde '2' hacia '1', Newton postula a que la fuerza que '2' ejerce sobre '1' está dada por

$$\vec{F}_{2/1} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}.$$

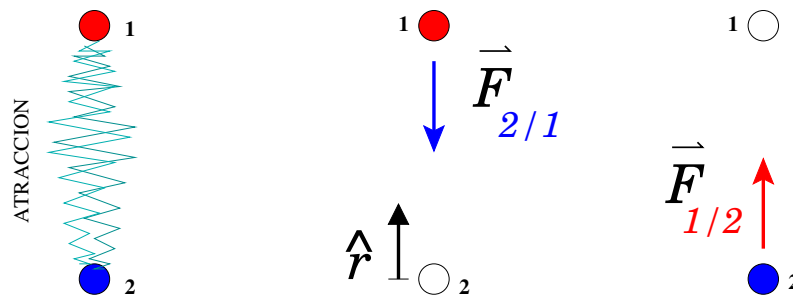


Figura 4.39: La fuerza de atracción gravitacional que afecta al cuerpo '1' (debido a '2'), y la que afecta al cuerpo '2' (debido a '1').

Esta ley de fuerzas satisface el principio de acción y reacción.

OBSERVACIONES:

- La fuerza de atracción entre cuerpos decrece con el cuadrado de la distancia. Esto quiere decir que si la separación se duplica, la fuerza se debilita a la cuarta parte.
- La ley de fuerzas se postula para cuerpos puntuales, o infinitamente pequeños. Puesto que la ley de gravitación satisface el principio de superposición, la fuerza que ejerce un volumen masivo con un objeto puntual se obtiene sumando vectorialmente las fuerzas entre las partes. En esa línea, los dos *Teoremas de Newton* resultaron particularmente útiles para estudiar la fuerza de objetos esféricos con objetos puntuales.
- La conjetura de la ley de gravitación se basó en el estudio de una órbita circunferencial. La ley de gravitación en sí no es demostrable. Sólo debe pasar las pruebas de responder satisfactoriamente a una infinidad de pruebas de coherencia, tanto en el mundo de las ideas como en las observaciones experimentales. Tempranamente, luego de su enunciado, se apreció la gran capacidad de predecir el comportamiento de sistemas binarios, conducentes a soluciones (órbitas) circunferenciales, elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Actualmente las Leyes de Newton son utilizadas en cálculos de alta precisión para predecir la posición de los planetas en muchas décadas. El problema es bastante complejo por cuanto involucra muchos cuerpos, donde además de la interacción Tierra-planeta, hay que dar cuenta de la interacción entre los planetas.
- La constante G se conoce como *Constante de Gravitación Universal* y constituye lo que entendemos una *constante fundamental*. Su valor actual es

$$G = 6,67428 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$$

Esta constante fué medida por primera vez por Henry Cavendish, entre los años 1797 y 1798. Nótese que esto ocurre a más de un siglo después de que Newton presentara la ley de gravitación. A pesar de ello, para muchos cálculos que se hicieron hasta entonces, el valor de G fué totalmente prescindible.

- A pesar de que las fuerzas gravitacionales pueden ser formidables, por el hecho de ser capaces de alterar la trayectoria rectilínea de cuerpos tan masivos como planetas, es la fuerza más débil conocida. Las interacciones electromagnéticas resultan ser 10^{36} veces más fuertes que las gravitacionales. A escala atómica y subatómica, las fuerzas gravitacionales son despreciables.

- Una propiedad que a Newton le resultó particularmente incómoda hasta sus últimos días, fue el hecho de que entre dos objetos interactuando gravitacionalmente no haya un ente que medie en la interacción. ¿Qué es lo que permite entonces que dos objetos macroscópicos interactúen a distancias tan grandes como las interplanetarias?. No fué sino hasta el año 1915 que esta objeción tiene una respuesta algo más satisfactoria, cuando Albert Einstein muestra que la masa distorciona la geometría del espacio-tiempo. La gravedad, como la percibimos, es una manifestación de esta deformación.

4.7.3. Los Teoremas de Newton

Como mencionamos anteriormente, la Ley de Gravitación Universal se formula para objetos puntuales. Sin embargo sabemos que los planetas son objetos extendidos. En particular, la Tierra es para nosotros un sistema que está muy lejos de ser puntual.

Por ahora nos preguntamos por la fuerza que ejerce un cascarón esférico de masa m sobre un cuerpo puntual de masa m' . Distinguimos dos situaciones: Una es cuando el objeto se ubica al interior del cascarón, mientras que la otra es cuando está fuera de este. Los teoremas de Newton dan respuesta a estas dos situaciones. En el primer caso se enuncia que

Teorema I.-

La fuerza gravitacional neta que un cascarón uniforme ejerce sobre un cuerpo puntual en su interior es nula.

No demostraremos este teorema, sino más bien daremos luces de algunas ideas detrás de su demostración. Para ello consideremos el esquema izquierdo de la Fig. (4.40), donde P denota la ubicación del cuerpo al interior del cascarón. En este esquema se han dibujado en colores las porciones de masa abarcados por conos opuestos, con vértice en P.

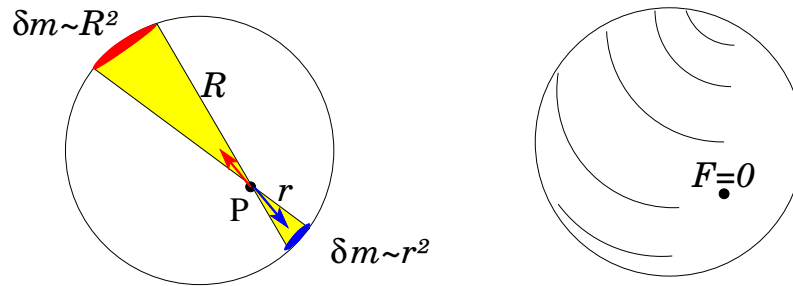


Figura 4.40: Dos bocados cónicos opuestos atraen con igual fuerza a un cuerpo en P. Ese par de fuerzas se cancela, por lo que la fuerza neta de un cascarón masivo sobre un cuerpo en su interior es nula.

Si los conos son pequeños, se puede demostrar que la porción de masa abarcada por porciones opuestas es proporcional al cuadrado de la distancia entre la porción y P. Así, la fuerza entre el cuerpo en P (de masa m') y una de las porciones es proporcional a $Gm' \delta m / R^2 \sim Gm' R^2 / R^2 = Gm'$. De igual forma, la fuerza debido a la porción opuesta es proporcional a $Gm' \delta m / r^2 = Gm' r^2 / r^2 = Gm'$. Ambas fuerzas actúan en sentidos opuestos, por lo que fuerza neta debido a ese par es nula. Así, uno puede cubrir completamente el cascarón con bocados cónicos opuestos. La fuerza neta es, entonces, nula.

El otro caso de interés es cuando el cuerpo se ubica fuera del cascarón. Para esta situación Newton demuestra que

Teorema II.-

La fuerza gravitacional neta de un cascarón uniforme sobre un cuerpo puntual en su exterior es igual a la que ejercería un objeto puntual de masa igual a la del cascarón, ubicada en su centro.

Cuando un objeto es atraído por un cascarón esférico, hay que dar cuenta de la fuerza de atracción de cada una de sus moléculas sobre el objeto a considerar. Son muchas pequeñas contribuciones las que hay que sumar vectorialmente. En principio esto pudiera parecer complejo, sin embargo algunas observaciones sencillas permiten ordenar las ideas.

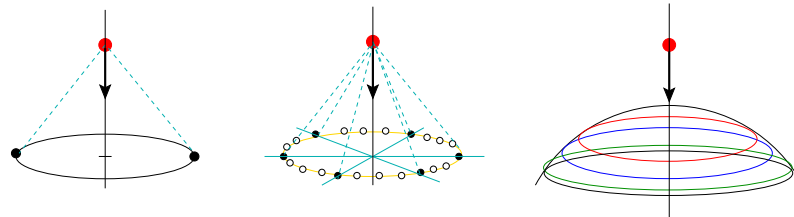


Figura 4.41: Dos cuerpos idénticos atraen simétricamente una manzana. Los cuerpos se subdividen en pequeñas partes y se distribuyen en forma de anillo de perlas. Un cascarón se puede entender como una superposición de anillos.

En la ilustración izquierda de la Fig. (4.41) se muestra una manzana atraída gravitacionalmente por dos cuerpos idénticos, ubicados simétricamente y a igual distancia de la manzana. La fuerza resultante, suma vectorial de las dos contribuciones, toma la dirección del eje de simetría. Si las dos masas son subdivididas y sus partes se distribuyen a modo de perlas a lo largo de un anillo, la fuerza del anillo de perlas es igual a la fuerza del primer par de la izquierda. Sin embargo, esta vez se trata de la fuerza que ejercen muchas pequeñas partículas sobre la manzana. Un cascarón esférico (ilustración derecha) lo podemos entender como una superposición de anillos, todos los cuales ejercen una fuerza sobre la manzana. La resultante tendrá la dirección del eje de simetría que une la manzana con el cascarón.

Para entender el segundo teorema de Newton consideremos la Fig. (4.42), donde se muestra un cascarón de masa m y radio R . Un cuerpo se ubica a una distancia r del centro del cascarón. Entonces la magnitud de la fuerza entre el cascarón y el cuerpo es

$$F = G \frac{mm'}{r^2} .$$

Esta expresión es válida sólo cuando $r > R$.

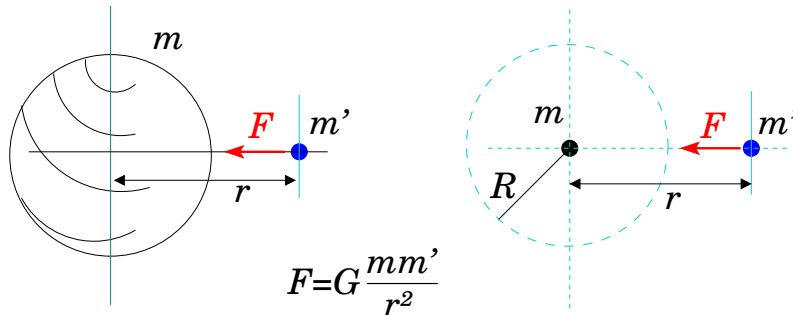


Figura 4.42: La fuerza de un cascarón sobre un cuerpo en su exterior ($r > R$) es la misma a si el cascarón se reduce a un punto, ubicado en el centro del cascarón.

4.7.4. La aceleración de gravedad g

Un logro notable de la teoría de gravitación de Newton consiste en su capacidad de responder al origen de la gravedad terrestre. Examinemos algunas ideas.

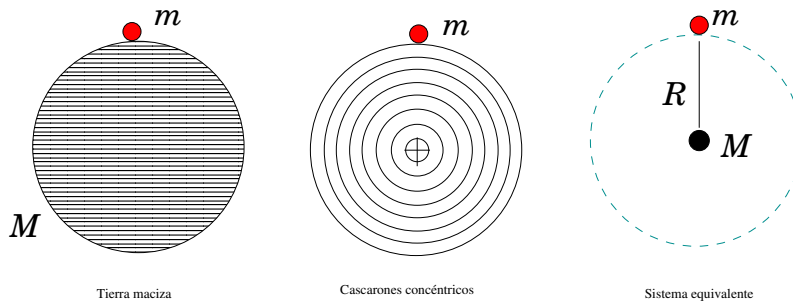


Figura 4.43: La fuerza de una esfera maciza de masa M sobre un cuerpo puntual de masa m se reduce a la fuerza de dos objetos puntuales, a una distancia igual a la del centro de la esfera y el cuerpo.

Supongamos la Tierra una esfera maciza de masa M y radio R . Un objeto posa sobre su superficie. Como se ilustra en la Fig. (4.43), la Tierra se puede entender como un conjunto de cascarones esféricos concéntricos. De acuerdo al segundo teorema de Newton, en el contexto de gravitación, todos esos cascarones se pueden entender colapsados en el centro de la Tierra, conformando un sólo objeto puntual de masa M . Por lo tanto, la fuerza gravitacional de la Tierra sobre el objeto en su superficie es (en magnitud)

$$F = G \frac{Mm}{R^2} = m \left(\frac{GM}{R^2} \right) \equiv mg .$$

Nótese la igualdad

$$g = \frac{GM}{R^2} .$$

En tiempos de Newton, hasta el año 1797, sólo se conocían el radio de la Tierra R y la aceleración de gravedad g . Estas dos cantidades determinan el valor del producto GM , de modo que para conocer uno necesariamente debemos conocer el otro. Cavendish se dió cuenta de que al medir G , se puede inferir la masa de la Tierra y consecuentemente su densidad. Esta idea fué inspirada en los experimentos que llevaba a cabo Coulomb para describir la ley de fuerzas entre cargas eléctricas. Eso ocurría en Francia, más o menos en la misma época.

⇒ *Satélites geoestacionarios*

Una clase especial de satélites artificiales son los denominados geoestacionarios, que tienen la característica de mantenerse sin moverse con respecto a un observador ubicado en el ecuador terrestre. Queremos saber el radio de órbita de uno de estos satélites.

Claramente la velocidad angular de tal satélite debe ser igual a la de la Tierra, cuyo período es de 24 horas. Aplicando la ley de gravitación para un movimiento circunferencial tenemos

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \rightarrow GM = \omega^2 r^3 .$$

Usemos la identidad $GM = gR^2$, que nos sirve para simplificar la aritmética. Entonces, $\omega^2 r^3 = gR^2$, con lo cual

$$r = R \left(\frac{g}{\omega^2 R} \right)^{1/3} .$$

Usando $g = 10 \text{ m/s}^2$, $R = 6\,400\,000 \text{ m}$, y $\omega = 2\pi/T$, con $T = 24 \times 3\,600 \text{ s}$, obtenemos $r \approx 6,66 \times R$. Esto significa 5,66 radios terrestres de altura.

⇒ *Caída radial de dos piedras unidas por una cuerda*

Consideremos una cuerda ideal de longitud L (100 m) que une en sus extremos dos piedras de masa m (1 kg). El sistema cae radialmente a la Tierra, con la cuerda estirada y alineada hacia el centro de la tierra. Buscamos una estimación de la tensión de la cuerda cuando la piedra inferior se encuentra a una distancia h (100 km) de la superficie terrestre.

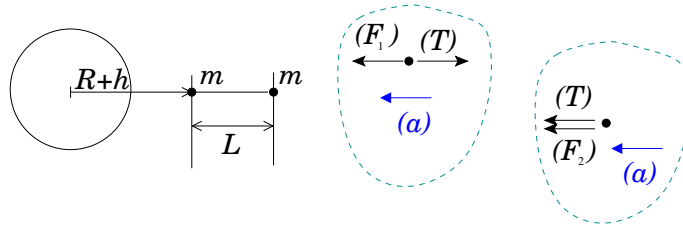


Figura 4.44: Dos cuerpos unidos por una cuerda cayendo debido a la gravedad terrestre.

En este problema los dos cuerpos están sometidos a la gravedad terrestre. Sin embargo, el que está más atrás siente una atracción más débil que el primero. Supondremos que la fuerza entre los dos cuerpos es despreciable. Considerando eje positivo hacia la izquierda, para el cuerpo de adelante escribimos

$$\frac{GMm}{r^2} - T = ma ,$$

y para el que va más atrás

$$T + \frac{GMm}{(r+L)^2} = ma .$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos para la tensión

$$2T = GMm \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+L)^2} \right] = \frac{GMm}{r^2} \left[1 - \frac{1}{(1+L/r)^2} \right] .$$

Utilizando $GM = gR^2$, con R el radio de la Tierra, y considerando $L \ll r$ (100 m vs 6400 km), entonces

$$T \approx mg \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{L}{r} \approx mg \frac{L}{R} = 1,5 \times 10^{-5} mg .$$

Esta es una tensión bastante pequeña, aunque depende de las masas involucradas. Por ejemplo, si los cuerpos fuesen de una tonelada la cuerda se tensaría en 150 N, nada de despreciable.

⇒ Lunas Gemelas

El período lunar es de aproximadamente 27.32 días, con la masa de la Luna aproximadamente igual a 1/81 la masa de la Tierra. Imagine la Tierra con dos lunas gemelas, orbitando diametralmente opuesta una de la otra. La distancia de las lunas a la Tierra es igual a la que tiene la Luna actualmente. Veamos cual sería el período de una de las lunas en este hipotético sistema.

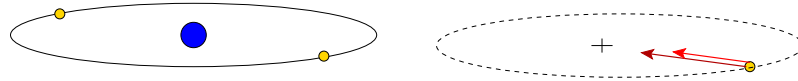


Figura 4.45: Lunas gemelas opuestas orbitando alrededor de la Tierra.

Analicemos las fuerzas actuando sobre una de las lunas. Estas son gravitacional con la Tierra (masa M y distancia r , conocida) y con la otra luna (masa m y distancia $2r$). La fuerza gravitacional neta es, entonces

$$F = \frac{GMm}{r^2} + \frac{Gm^2}{4r^2} = \frac{GMm}{r^2} \left[1 + \left(\frac{m}{4M} \right) \right] .$$

Igualando la componente radial, $F = ma$, con $a = \omega^2 r$, obtenemos

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} \left[1 + \left(\frac{m}{4M} \right) \right]$$

Si denotamos por ω_o la velocidad angular de la Luna que conocemos, entonces

$$\omega_o^2 = \frac{GM}{r^3} .$$

Por lo tanto

$$\omega = \omega_o \left[1 + \left(\frac{m}{4M} \right) \right]^{1/2} \approx \omega_o \left(1 + \frac{m}{8M} \right)$$

Aquí se hizo uso de que $m/8M$ es muy pequeño. Para el período,

$$T \approx T_o \left(1 - \frac{m}{8M} \right) .$$

Por lo tanto, el período lunar disminuiría en un factor $1/(8 \times 81) = 1,54 \times 10^{-3}$ con respecto al período actual, vale decir casi una hora (1 h).

⇒ *Atracción lunar o rotación terrestre: ¿Qué nos afecta más?*

Hasta ahora siempre hemos estudiado situaciones en las cuales omitimos efectos asociados a la rotación terrestre. De igual modo, cuando nos referimos a la aceleración de gravedad en la Tierra casi no se hace mención a la ubicación de la Luna. Esto hace suponer que se trata de efectos bastante pequeños. Pero, ¿cuán significativos son estos efectos?. O si hemos de incluirlos, ¿cual de ellos sería más importante?.

Para fijar ideas consideremos una persona ubicada en el ecuador terrestre. Si nos situamos en un sistema fuera de la Tierra observamos que ella gira en torno a su eje, haciendo que la persona describa una trayectoria circular de radio igual al de la Tierra (R).

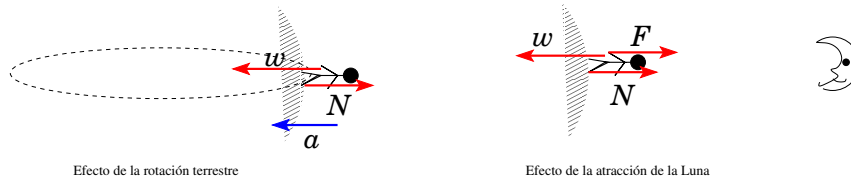


Figura 4.46: Efecto sobre el peso aparente (normal) debido a la rotación terrestre *versus* atracción lunar.

En el esquema izquierdo de la Fig. (4.46) se ilustra una persona sobre el ecuador. Considerando la aceleración centrípeta escribimos para la componente radial

$$-mg + N = -m\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad N = m(g - \omega^2 R) = mg(1 - \omega^2 R/g) .$$

Claramente el factor $\omega^2 R/g$ representa la fracción en que disminuye la sensación de peso. Considerando $R = 6,4 \times 10^6$ m, $\omega = 2\pi/T$, con $T = 24 \times 3600$ s, tenemos

$$\frac{\omega^2 R}{g} \approx 3,4 \times 10^{-3} .$$

Para el efecto debido a la atracción lunar (esquema derecho), si omitimos la rotación tenemos

$$-mg + N + F = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg(1 - F/mg) ,$$

donde F representa la fuerza gravitacional debido a la Luna sobre la persona. Esta fuerza está dada por GMm/d^2 , con $d \approx 60R$ la distancia Tierra-Luna. Entonces

$$\frac{F}{mg} = \frac{GMm}{mg(60R)^2} = \frac{1}{3600} \approx 2,8 \times 10^{-4} ,$$

donde hemos usado $GM = gR^2$. Claramente el efecto debido a la atracción lunar es más débil que el debido a la rotación terrestre: un factor 0.08 más débil. En cualquier caso ambos efectos son bastante pequeños. La rotación terrestre afecta en un 0.3 % en tanto que la Luna en 0.03 %.

⇒ *El Solar and Heliographic Observatory (SOHO)*

Para la observación de la actividad solar desde un punto en el espacio, se identifican algunos puntos entre el Sol y la Tierra que permiten la ubicación de satélites estacionarios con respecto a la Tierra. Eso quiere decir que no se alejan ni se acercan a ella: rotan con velocidad angular igual a la Tierra en torno al Sol. Nos planteamos entonces identificar alguno de tales puntos.

Consideremos un satélite ubicado entre el Sol y la Tierra, como se ilustra en la Fig. (4.47), donde el radio de la órbita terrestre es a . El satélite es atraído gravitacionalmente por la Tierra (a una distancia βa desde la Tierra) y por el Sol, (a una distancia $a(1 - \beta)$ de este). La aceleración centrípeta es de magnitud $\omega^2(1 - \beta)a$.

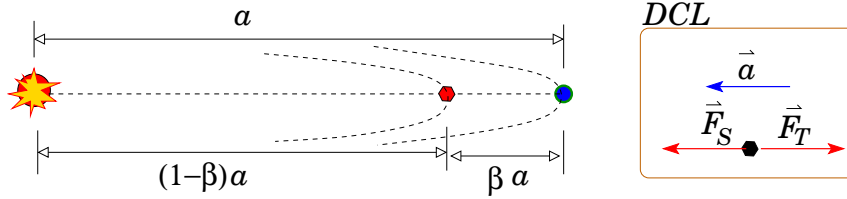


Figura 4.47: Un satélite entre la Tierra y el Sol, con velocidad angular igual a la de la Tierra.

Al considerar las fuerzas de atracción del Sol y la Tierra sobre el satélite planteamos $\vec{F}_S + \vec{F}_T = m\vec{a}$. Según componentes radiales:

$$-G \frac{M_S m}{(1 - \beta)^2 a^2} + G \frac{M_T m}{\beta^2 a^2} = -m\omega^2(1 - \beta)a .$$

Simplificando,

$$\frac{GM_S}{\omega^2 a^3} \left[\frac{1}{(1 - \beta)^2} - \frac{M_T/M_S}{\beta^2} \right] = 1 - \beta .$$

Es fácil constatar que $GM_S/\omega^2 a^3 = 1$ (¿porqué?). Por lo tanto

$$\frac{1}{(1 - \beta)^2} - \frac{M_T/M_S}{\beta^2} = 1 - \beta \quad \Rightarrow \quad \beta^2 - (M_T/M_S)(1 - \beta)^2 = \beta^2(1 - \beta)^3 .$$

Esta última ecuación se obtiene luego de multiplicar por $\beta^2(1 - \beta)^2$ ambos lados de la Ec. de la izquierda. Como se aprecia, la ecuación para β es de quinto grado, una ecuación para la cual no contamos con expresiones para sus raíces. Sin embargo actualmente disponemos de programas computacionales tales como *Mathematica*, *Maple*, *Matlab*, etc., los cuales permiten soluciones numéricas para los ceros de un polinomio. Considerando $M_T/M_S \approx 1/330\,000$, obtenemos cuatro soluciones complejas y una real, la cual resulta

$$\beta = 0,009999989 \approx 0,01 .$$

Considerando $a = 1,496 \times 10^8$ km, la distancia del satélite a la Tierra resulta $1,5 \times 10^6$ km. Puesto que el radio orbital de la Luna es $3,84 \times 10^5$ km, entonces el satélite queda ubicado más allá de la órbita lunar.

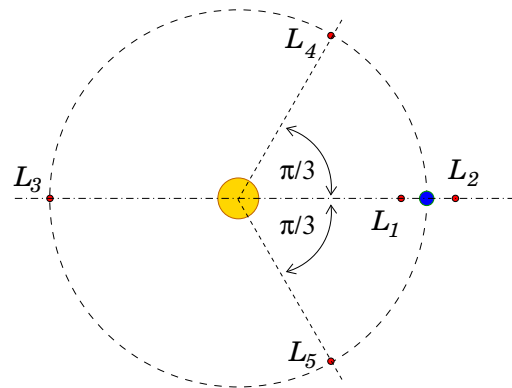


Figura 4.48: Los cinco Puntos de Lagrange en el sistema Sol-Tierra.

Hay otros dos casos que uno pudiera examinar: uno es cuando el satélite se ubica más afuera que la órbita terrestre, en tanto que el otro es cuando el satélite se ubica detrás del Sol (con respecto a la Tierra). A estos puntos se les conoce como *Puntos de Lagrange* y se ilustran en la Fig. (4.48). Los puntos L_4 y L_5 se ubican a un ángulo $\pi/3$ con respecto a la línea Sol-Tierra, medida desde el Sol.

Capítulo 5

Trabajo y energía

Si uno recurre a un diccionario para extraer ideas acerca de lo que se entiende por *energía*, el resultado nos deja con más interrogantes que aclaraciones. Desde luego, un diccionario no es la fuente más adecuada para entender un concepto físico. En particular, el término *energía* es visto desde tantos ángulos y por tantos segmentos culturales, que raras veces se alude a una misma idea: psíquica, física, cósmica, térmica, del alma, intelectual, espiritual, celestial, potencial, universal, terrenal, vital, positiva, negativa, nuclear, solar, renovable, electromagnética, magnética, cinética, etc.

Es interesante notar que todos los ejemplos listados arriba aluden a un inmanente accesible desde el punto de vista humano, el cual es sujeto a ser manipulable. Sin embargo muchos de estos son sólo ideas tendientes a dar sentido a construcciones intelectuales, no necesariamente vinculadas al mundo físico que conocemos. Puesto así, se trata de ideas inaccesibles desde un punto de vista experimental, totalmente alejadas del campo de la discusión y de la refutación.

En esta unidad comenzaremos un análisis bastante simple a partir de las Leyes de Newton, las que nos permitirán identificar los elementos más básicos de energía mecánica, su contexto e implicaciones. Estas ideas se irán replicando en ámbitos cada vez más amplios tales como la termodinámica, campos electromagnéticos y física de partículas. Lo interesante es que en todos estos casos ha sido posible cuantificar y medir sus manifestaciones.

5.0.5. La energía cinética y trabajo mecánico

Cuando una partícula está sometida a una aceleración constante $\vec{a}$, encontramos que la variación del cuadrado de la rapidez Δv^2 está dada por

$$\Delta v^2 = 2\vec{a} \cdot \Delta \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = m\vec{a} \cdot \Delta \vec{r},$$

donde $\Delta \vec{r}$ representa el desplazamiento correspondiente. Esta relación es estrictamente cinemática, además de exacta cuando la aceleración es constante. Cuando la aceleración no es constante, podemos considerar un pequeño trecho, $\delta \vec{r}$, lo suficientemente diminuto como para que la aceleración se pueda considerar constante. En tal caso tenemos

$$\delta \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = m\vec{a} \cdot \delta \vec{r}.$$

A este punto hacemos dos consideraciones. Primero, nos valemos de la segunda ley de Newton para una partícula, $\vec{F} = m\vec{a}$. Por otra parte introducimos la definición de *energía cinética* para una partícula,

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Con lo anterior se obtiene

$$\delta K = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}.$$

El lado derecho no es más que el producto punto entre la fuerza neta $\vec{F}$ y el desplazamiento $\delta \vec{r}$, término que denominaremos *trabajo de la fuerza neta $\vec{F}$ en un desplazamiento $\delta \vec{r}$* . En consecuencia, la variación de la energía cinética ante un desplazamiento $\delta \vec{r}$ es igual al trabajo realizado por la fuerza neta en ese trayecto.

La identidad anterior se ha obtenido para un desplazamiento pequeño $\delta \vec{r}$. Una trayectoria que une dos puntos, A y B, la podemos entender como una secuencia de N desplazamientos consecutivos $\delta \vec{r}_i$, con $i : 1 \rightarrow N$. En la Fig. (5.1) se ilustra una trayectoria arbitraria subdividida en N trechos. Por ahora N es finito, pero más adelante lo aumentaremos tanto como sea necesario. Cada uno de estos trechos conecta las coordenada $\vec{r}_{i-1}$ y $\vec{r}_i$.

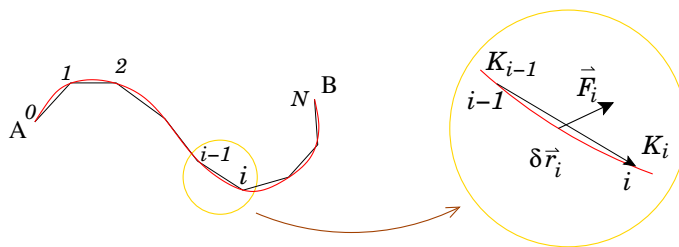


Figura 5.1: Trayectoria que une dos puntos segmentada en N trechos pequeños. Para el i -ésimo trecho se cumple $\delta K_i = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$.

Apliquemos la relación para δK_i a cada uno de los N trechos y los sumamos. Para la energía cinética tenemos

$$\underbrace{(K_1 - K_0)}_{\delta K_1} + \underbrace{(K_2 - K_1)}_{\delta K_2} + \underbrace{(K_3 - K_2)}_{\delta K_3} + \cdots + \underbrace{(K_{N-1} - K_{N-2})}_{\delta K_{N-1}} + \underbrace{(K_N - K_{N-1})}_{\delta K_N} = K_B - K_A$$

Observe que todos los términos de esta suma se han cancelado salvo K_0 y K_N , correspondientes a las energías cinéticas en los puntos extremos. Para los trabajos tenemos simplemente

$$\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r}_3 + \cdots + \vec{F}_N \cdot \delta \vec{r}_N \equiv \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i}_{\text{Trabajo}} \equiv W_{A \rightarrow B}(\text{Fuerza neta}) .$$

A este último término, $W_{A \rightarrow B}(\text{Fuerza neta})$, se le reconoce como el *trabajo* realizado por la fuerza neta $\vec{F}$ en la trayectoria que une los puntos extremos A y B. Por lo tanto hemos encontrado una relación entre la variación de la energía cinética de una partícula y el trabajo de las fuerzas participantes:

$$\Delta K = K_B - K_A = W_{A \rightarrow B}(\text{Fuerza neta}) .$$

Claramente, si no hay fuerzas externas entonces $W_{A \rightarrow B} = 0$, con lo cual la energía cinética se conserva.

OBSERVACIONES:

1. El trabajo es una cantidad escalar con dimensiones de fuerza $\times$ distancia:

$$[W] = [F][d] = [ma][d] = ML^2T^{-2} .$$

Sus unidades (idénticas a las de energía) en el Sistema Internacional vienen dadas en newton $\times$ metro, combinación que recibe el nombre de joule y se simboliza J: $1 \text{ Nm} = 1 \text{ newton} \times \text{metro} = 1 \text{ joule} = 1 \text{ J}$.

2. Como hemos visto, la fuerza neta sobre un cuerpo corresponde a la suma vectorial de fuerzas de distinta índole, tales como el peso ($\vec{w}$), normal ($\vec{N}$) y roce ($\vec{f}$), tensiones ($\vec{T}$), resortes ($\vec{F}_e$), etc. Si fuesen estas todas las fuerzas involucradas en el tránsito $A \rightarrow B$ de una partícula, entonces el trabajo de la fuerza neta corresponde a

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{w} + \vec{N} + \vec{f} + \vec{T} + \vec{F}_e) = W_{A \rightarrow B}(\vec{w}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{N}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_e) ,$$

igualdad que se obtiene a partir de la propiedad que hace equivalentes la *sumatoria de una suma con una suma de sumatorias*.¹

¹En matemáticas se demuestra que $\sum_i (a_i + b_i) = \sum_i a_i + \sum_i b_i$.

3. Dependiendo de la proyección de la fuerza según el desplazamiento, el trabajo puede ser positivo, nulo o negativo. Estas tres situaciones se ilustran en la Fig. (5.2). Puesto que $W \equiv \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = F \delta s \cos \theta$, con $|\delta\vec{r}| = \delta s$ y θ el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento. En particular, si $\theta < 90^\circ$, entonces $W > 0$. Cuando $\theta = 90^\circ$, entonces $W = 0$. Por último si la proyección de la fuerza es opuesta al desplazamiento, el trabajo es negativo. Si en este caso $\vec{F}$ corresponde a la fuerza neta, entonces la energía cinética δK decrece.

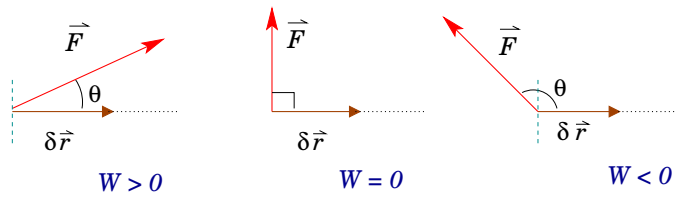


Figura 5.2: El signo del trabajo según la orientación de $\vec{F}$ con respecto al desplazamiento.

4. Cuando una fuerza es constante, entonces el trabajo asociada a ella es simplemente

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r},$$

con $\Delta\vec{r}$ el desplazamiento neto. En efecto, al considerar $\vec{F}$ constante, entonces $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \sum_i \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{F} \cdot (\sum_i \delta\vec{r}_i) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$.

5. Para el caso particular del peso, sabemos que esta fuerza es constante en la superficie terrestre. Usando un par de ejes xy , con x a lo largo de la horizontal y y a lo largo de la vertical (hacia arriba), entonces $\vec{w} = -mg\hat{y}$. Por otro lado un desplazamiento totalmente general se puede expresar $\Delta\vec{r} = \Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y}$, de modo que

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{w}) = -mg\Delta y = -mg(y_B - y_A). \quad (5.1)$$

Notamos que la gravedad trabaja sólo si hay un desnivel total involucrado ($y_B \neq y_A$). Si dos puntos de la trayectoria se ubican a un mismo nivel, entonces el trabajo neto debido al peso (gravedad) en el trayecto de uno de los dos puntos es nulo. En particular, la gravedad no trabaja ante desplazamientos horizontales, y su trabajo es $\pm mgh$ ante un descenso/ascenso vertical de magnitud h .

6. Cuando un objeto posa sobre una superficie inmóvil, entonces el trabajo debido a la fuerza normal es nulo. En efecto, así como se ilustra en la Fig. (5.3), para cualquier desplazamiento pequeño $\delta\vec{r}$ a lo largo de la trayectoria, la fuerza normal $\vec{N}$ será perpendicular, con lo cual $\vec{N} \cdot \delta\vec{r} = 0$. La suma de todas estas contribuciones nulas a lo largo de la trayectoria hace que el trabajo neto de la normal sea nulo.

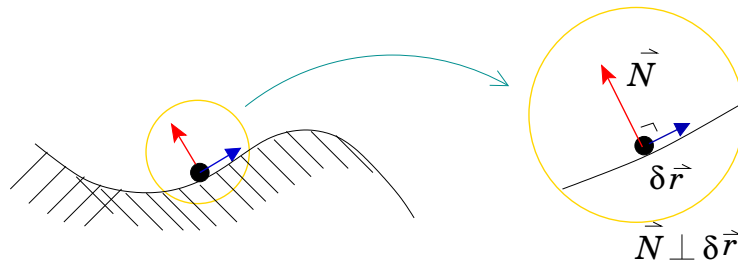


Figura 5.3: Cuando el piso no se mueve, el trabajo debido a la fuerza normal es nulo.

5.0.6. Aplicaciones

Con los pocos elementos que hemos estudiado hasta ahora estamos en condiciones de abordar una enorme cantidad de aplicaciones adicionales. Hagamos una pausa a la incorporación de nuevos elementos y examinemos algunos ejemplos sencillos.

⇒ Bloque deslizando sobre tramo rugoso

Consideremos un bloque de masa m resbalando con rapidez v_o sobre una región muy resbalosa (roce nulo). Luego entra en un sector horizontal rugoso, donde el coeficiente de roce cinético con el piso es μ . Se pide encontrar la rapidez v como función del tramo recorrido sobre el sector rugoso.

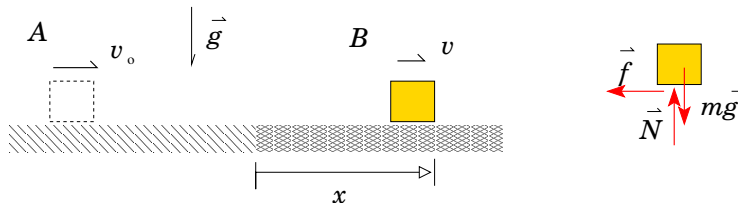


Figura 5.4: Un bloque resbalando sobre tramo horizontal rugoso.

La evolución del sistema se ilustra en la Fig. (5.4), donde identificamos tres fuerzas participando: el peso $\vec{w}$, la normal $\vec{N}$ y el roce $\vec{f}$. Si definimos como estado A aquel en el cual el bloque se ubica en el sector resbaladizo, y como estado B aquel en que el bloque se ubica en la coordenada x medida desde el punto donde comienza el tramo rugoso, entonces

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_o^2 + W_{A \rightarrow B}^0(\vec{w}) + W_{A \rightarrow B}^0(\vec{N}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{f})$$

Mientras el bloque resbala la fuerza de roce es constante e igual a $\mu N = \mu mg$. Para

esta fuerza tenemos

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = (-\mu mg \hat{x}) \cdot \Delta x \hat{x} = -\mu mgx .$$

Por lo tanto

$$v^2 = v_o^2 - 2\mu gx .$$

Para que nuestra solución tenga sentido físico, necesariamente se debe exigir que $v_o^2 - 2\mu gx \geq 0$, o bien, $x \leq v_o^2/2\mu g$. Esto también lo podemos interpretar como que el bloque *nunca* alcanzará una distancia mayor que $v_o^2/2\mu g$ resbalando.

⇒ *Trabajo debido al roce, sin conocer μ*

Un atributo notable de las consideraciones de energía es su capacidad de entregar información con pocos datos. Consideremos un bloque en una superficie horizontal, la cual resbala con rapidez v_o . Al atravesar un sector rugoso horizontal de longitud no especificada, el bloque emerge con una rapidez menor λv_o . Entonces, ¿cuál es el trabajo debido a la fuerza de roce?

En este ejemplo nos enfocamos, al igual como se hizo con las leyes de Newton, en *un objeto*. En este caso es natural centrarse en el bloque. Las fuerzas que participan en su evolución, desde la configuración inicial A hasta la final B, son el peso $\vec{w}$, la normal $\vec{N}$ y la fuerza de roce $\vec{f}$. Entonces,

$$K_B - K_A = W_{A \rightarrow B}(\vec{w}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{N}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) .$$

Examinemos por partes:

- El peso no trabaja puesto que no hay cambio de nivel entre A y B.
- La normal no trabaja puesto que el piso no se mueve.
- La diferencia de energía cinética es $(\lambda^2 - 1)mv_o^2/2$.

Por lo tanto el trabajo debido a la fuerza de roce es

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = -\frac{m}{2}v_o^2(1 - \lambda^2) \leq 0 .$$

Si $\lambda = 0$ vemos que el trabajo es igual a la energía cinética inicial, con signo negativo. En tal caso toda la energía cinética ha sido consumida por la fricción entre el piso y el bloque. En el otro caso extremo, cuando $\lambda = 1$, la rapidez emergente del bloque es la misma que la incidente. En este caso el trabajo debido al roce es nulo, como era de esperar.

⇒ *Tensión de un péndulo*

Consideremos un péndulo formado por una cuerda (ideal) de longitud L y una bolita de masa m en su extremo. El péndulo oscila con una amplitud angular β . Nos preguntamos por la tensión en función de la posición angular.

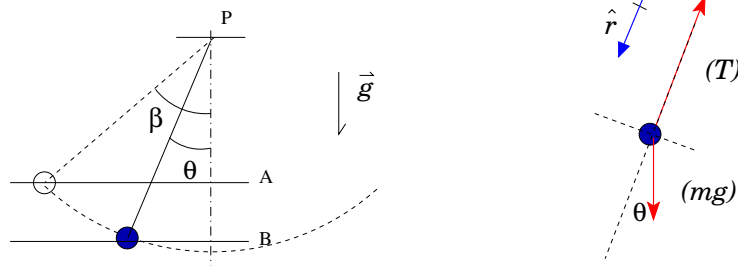


Figura 5.5: Un péndulo oscilando debido a la gravedad.

En esta aplicación es conveniente hacer un análisis previo de los escenarios con que nos encontraremos. Para la determinación de la tensión a un ángulo θ con respecto a la vertical, aplicaremos la Segunda Ley de Newton, para la componente radial. En esta participará directamente la tensión –nuestra incógnita– la proyección del peso y la aceleración centrípeta, cuyo aspecto es v^2/L . El problema se centra ahora en la determinación de la rapidez v , la cual se puede obtener con la relación $\Delta K = W$.

Procedemos entonces a la inversa: calculemos la rapidez del péndulo cuando evoluciona desde A hasta B. Consideremos

$$K_B - K_A = W_{A \rightarrow B}(\vec{w}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) .$$

- La energía cinética en A es nula (parte del reposo) y en B es $mv^2/2$.
- El trabajo debido al peso es igual a $-mg(y_B - y_A)$. Si ubicamos el nivel $y = 0$ en P, entonces $y_A = -L \cos \beta$, e $y_B = -L \cos \theta$, con lo cual $W_{A \rightarrow B}(\vec{w}) = mgL(\cos \theta - \cos \beta)$.
- Puesto que la cuerda no se estira ni acorta, los desplazamientos experimentados por la bolita resultan siempre perpendiculares a la tensión $\vec{T}$. Por lo tanto, al igual que en el caso de la normal, el trabajo debido a la tensión es nulo.

Con lo anterior tenemos

$$\frac{mv^2}{2} = mgL(\cos \theta - \cos \beta) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gL(\cos \theta - \cos \beta) . \quad (5.2)$$

Ahora examinamos la ecuación de movimiento de la bolita sometida a la tensión $\vec{T}$ y la gravedad $m\vec{g}$. Escribimos y proyectamos según la dirección $\hat{r}$ indicada en el DCL de la derecha en la Fig. (5.5). Entonces

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad -T + mg \cos \theta = -m \frac{v^2}{L} . \quad (5.3)$$

Sustituyendo v^2 de la Ec. (5.2) en la Ec. (5.3) para la tensión obtenemos

$$T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \beta) .$$

5.0.7. La energía potencial gravitacional

Para una partícula que esté sometida a varias fuerzas, entre las cuales está el peso $\vec{w}$, podemos escribir

$$K_B - K_A = W_{A \rightarrow B}(\vec{w}) + W_{A \rightarrow B}(\text{resto}) ,$$

donde $W_{A \rightarrow B}(\text{resto})$ se refiere al trabajo de todas las fuerzas *exceptuando* la gravitacional. Como vimos anteriormente [c.f. Ec. (5.1)],

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{w}) = -mg(y_B - y_A) ,$$

con lo cual

$$\underbrace{K_B + mgy_B}_{E_B} = \underbrace{K_A + mgy_A}_{E_A} + W_{A \rightarrow B}(\text{resto}) . \quad (5.4)$$

A la cantidad $U_g = mgy$ se le denomina *energía potencial gravitacional*, de modo que la suma $E = K + U_g$ recibe el nombre de *energía mecánica*. Más adelante identificaremos a los resortes como participantes de la energía mecánica. Por ahora nos conformaremos con los términos ya descritos.

Por lo tanto, ahora contamos con una relación entre la energía de un sistema en sus estados A y B, y el trabajo de las fuerzas participantes en la evolución $A \rightarrow B$, no incluidas en los términos de energía

$$E_B = E_A + W_{A \rightarrow B}(\text{resto}) .$$

Notar que en la expresión $U_g = mgy$, el origen $y = 0$ es totalmente arbitrario. Eso porque lo que físicamente interesa es la variación (resta) de la energía potencial entre los estados A y B. La identidad anterior permite establecer que, si en la evolución $A \rightarrow B$ el trabajo realizado por el resto de las fuerzas es nulo, entonces la energía se conserva, vale decir:

$$E_B = E_A .$$

En la Fig. (5.6) se ilustra un sistema evolucionando desde el *estado A* al *estado B*. Ambos estados están caracterizados por configuraciones geométricas y de movimiento (rapideces). La diferencia de energía entre ambos estados corresponde al trabajo de las fuerzas no participantes en la contabilidad de la energía mecánica.



Figura 5.6: La evolución de un sistema entre dos estados, $A \rightarrow B$. Energéticamente se cumple $E_B = E_A + W_{A \rightarrow B}(\text{resto})$.

⇒ *Pérdida de contacto ante un resbalamiento sobre un domo esférico*

Consideremos una bolita ubicada sobre la parte más alta de un domo esférico de radio R . Entonces la bolita comienza a resbalar cuesta abajo sin roce, hasta perder contacto con el domo. Nos preguntamos por el desplazamiento sobre el domo.

Abordaremos este problema haciendo uso de nociones de energía, donde visualizaremos la evolución del sistema desde un estado A a un estado B, ilustrado en la Fig. (5.7). Las fuerzas que participan en esta evolución son el peso y la fuerza normal del domo sobre la bolita. Si el peso lo hacemos partícipe de la energía mecánica del sistema ($E = K + U_g$), entonces

$$E_B = E_A + W_{A \rightarrow B}(\vec{N}) .$$

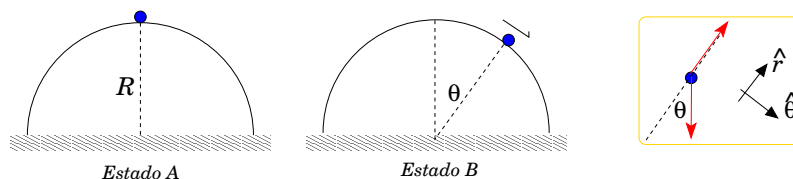


Figura 5.7: Una bolita resbala desde el punto más alto de un domo. ¿Donde se despeja?

Daremos cuenta de cada uno de las energías asociadas a los estados A y B. Estás contribuciones son cinética K y potencial U_g . Para evaluar la energía potencial escogemos un nivel de referencia. En este ejemplo el nivel donde se centra el domo es el más apropiado dada la simplicidad en la geometría. Para los estados A y B tenemos, respectivamente,

$$E_A : \begin{cases} K_A = 0 \\ U_A = mgR \end{cases} \quad E_B : \begin{cases} K_B = mv^2/2 \\ U_B = mgR \cos \theta . \end{cases}$$

Igualando las energías y despejando v^2 tenemos

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \theta) . \quad (5.5)$$

Para identificar el punto en el cual la bolita pierde contacto con el domo examinamos la fuerza de contacto $\vec{N}$. Notamos que mientras la bolita resbala el movimiento es circunferencial no uniforme. La aceleración tiene dos componentes, radial y tangencial: $\vec{a} = -(v^2/R)\hat{r} + \alpha R\hat{\theta}$. Aplicamos $N + m\vec{g} = m\vec{a}$ en una ubicación angular θ y proyectamos según $\hat{r}$, obteniendo

$$N - mg \cos \theta = -mv^2/R.$$

Imponemos $N = 0$ (pérdida de contacto) y usamos v^2 de la Ec. (5.5), para obtener $\cos \theta = 2/3$. Por lo tanto la pérdida de contacto se produce para $\theta = 48^\circ$.

⇒ Arrastre vertical de un cubo

Consideremos una bolita y un cubo unidas por una cuerda ideal. El cubo posa sobre el piso y la bolita cuelga de la cuerda, la cual ha pasado por una polea que no ofrece resistencia al resbalamiento de la cuerda. Supongamos que inicialmente el sistema se dispone como se ilustra en la Fig. (5.8), con la bolita a una distancia H del piso. Nos preguntamos por la rapidez con que la bolita golpea el piso al caer sobre este.

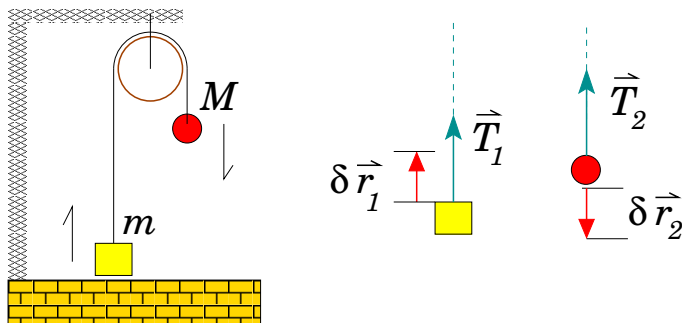


Figura 5.8: Una bolita arrastra verticalmente un cubo de menor masa. Notar que $\vec{T}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{T}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$.

Lo particular de este problema es el hecho de que nos vemos enfrentados a un sistema de dos cuerpos, unidos por un cordel. Cada uno de estos cuerpos está regido por la 2^{da} ley de Newton, por lo que la relación $E_B = E_A + W_{A \rightarrow B}(\text{resto})$ se aplica individualmente. Sin embargo, como veremos a continuación, es posible estudiar este sistema en forma global. Para ello deberemos examinar el rol que desempeña la tensión en el balance de energías.

Analicemos separadamente cada uno de los dos cuerpos, donde rotulamos con '1' al bloque y '2' la bolita. Entonces

$$\begin{aligned} E_B^{(1)} &= E_A^{(1)} + W_{A \rightarrow B}(\vec{T}_1) \\ E_B^{(2)} &= E_A^{(2)} + W_{A \rightarrow B}(\vec{T}_2) \end{aligned}$$

Sumando los términos correspondientes obtenemos

$$\underbrace{E_B^{(1)} + E_B^{(2)}}_{\equiv E_B} = \underbrace{E_A^{(1)} + E_A^{(2)}}_{\equiv E_A} + W_{A \rightarrow B}(\vec{T}_1) + W_{A \rightarrow B}(\vec{T}_2) .$$

Lo interesante es observar que, mientras en el caso del cubo la tensión $\vec{T}_1$ tiene el mismo sentido que el desplazamiento $\delta\vec{r}_1$, el desplazamiento $\delta\vec{r}_2$ de la bolita ocurre en sentido contrario a la tensión $\vec{T}_2$. En magnitud tanto los desplazamientos como las tensiones son iguales, por lo que $\vec{T}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{T}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 = 0$. Así entonces, la energía se conserva, vale decir

$$E_B = E_A .$$

Es importante hacer notar que en este caso las energías incluyen la cinética y potencial para los dos cuerpos.

Abordemos ahora el problema. El estado A lo hacemos corresponder al sistema detenido, con el bloque en el piso y la bolita a una altura H del piso. El estado B representa los dos cuerpos en movimiento (con rapidez v), con el bloque alcanzando una altura H y la bolita llegando al piso. Entonces

$$E_A : \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = 0 \\ U_1 = 0 \\ U_2 = Mgh \end{cases} \quad E_B : \begin{cases} K_1 = Mv^2/2 \\ K_2 = mv^2/2 \\ U_1 = mgh \\ U_2 = 0 \end{cases}$$

Sumando y despejando obtenemos

$$v^2 = 2gh \frac{M - m}{M + m} .$$

Podemos verificar dos casos límites. El primero de ellos es cuando la masa del bloque es nula ($m = 0$), implicando caída libre de la bolita. Nuestro resultado arroja $v^2 = 2gh$, que es lo esperable. El otro caso es cuando $M \approx m$, lo cual hace que el descenso sea muy lento. En tal caso nuestro resultado implica $v^2 \approx 0$, también consistente con nuestras expectativas.

El siguiente análisis queda propuesto. Una vez que la bolita llega al suelo, el bloque continuaría su movimiento hasta detenerse por efecto de la gravedad. En tal caso, ¿hasta qué altura llegaría con respecto al piso?. Y si la bolita rebota elásticamente con el piso, ¿hasta donde llegaría?. ¿Qué ocurrirá luego de que la cuerda se tense nuevamente?.

5.0.8. Trabajo de una fuerza que es función de la posición

Hay ejemplos de fuerzas que tienen una ley de comportamiento completamente definido con la posición. Por ahora podemos citar dos casos: los resortes y la fuerza gravita-

cional entre dos cuerpos. En el primer caso la fuerza tiene un comportamiento de la forma ' $F(x) = -kx$ ', en tanto que en el segundo caso tiene la forma ' $F(r) = -GMm/r^2$ '. Indudablemente hay muchos otros casos, de modo que examinar el caso general nos será de mucha utilidad.

Para fijar ideas consideremos una fuerza función de la posición de la forma

$$\vec{F}(x) = F(x)\hat{x} ,$$

y consideraremos una trayectoria rectilínea en la dirección $\hat{x}$. En la Fig. (5.9) se muestra el trayecto, desde x_A hasta x_B , el cual se ha subdividido en N pequeños intervalos. Cada intervalo lleva asociado un desplazamiento $\delta x_i \hat{x}$.

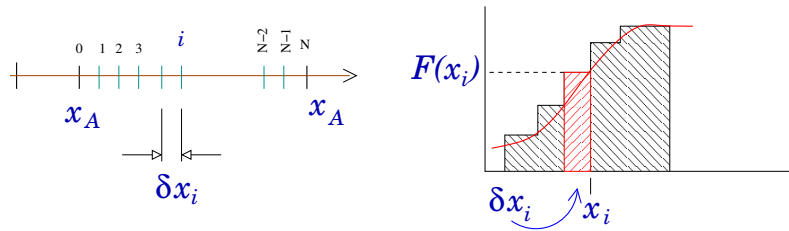


Figura 5.9: Un objeto es desplazado a lo largo del eje $\hat{x}$, donde actúa una fuerza que es función de la posición x . El trabajo, $\sum_i F(x_i)\delta x_i$, corresponde al área achurada en el diagrama de la derecha.

De acuerdo a su definición, el trabajo se reduce a la suma

$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{i=1}^N F(x_i)\delta x_i .$$

Notar que los productos $F(x_i)\delta x_i \sim \text{Altura} \times \text{Base}$, se pueden interpretar como un elemento de área en un gráfico $F(x)$ versus x . Esta idea se ilustra en el esquema de la derecha de la Fig. (5.9). En la medida que los δx_i se hagan más diminutos, lo que conlleva a hacer crecer el número de subdivisiones, los peldaños achurados cubren por completa el área entre la curva $F(x)$ y el eje x . El resultado se ilustra en la Fig. (5.10).

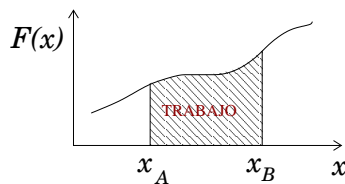


Figura 5.10: El trabajo debido a una fuerza que es función de la posición está dado por el área bajo la curva, en el gráfico F vs x .

5.0.9. Trabajo de la fuerza de un resorte y su energía potencial

Consideremos un resorte de constante elástica k fijo en uno de sus extremos, como se ilustra en la Fig. (5.11). Mediante un agente externo –una cuerda por ejemplo– su extremo libre es llevado desde x_A hacia x_B .

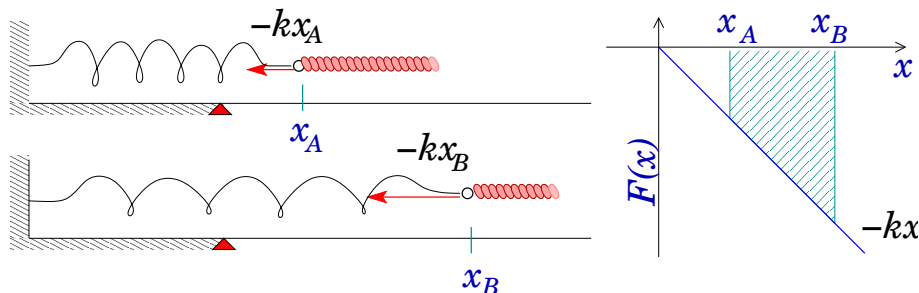


Figura 5.11: Un resorte de constante elástica k es elongado desde x_A hasta x_B . El trabajo debido a la fuerza del resorte (flechas rojas) está dado por el área del trapecio achurado: $-kx_B^2/2 + kx_A^2/2$.

La ley de fuerzas del resorte, suponiendo que su extremo libre se ubica en el origen $x = 0$, está dada por

$$F(x) = -kx .$$

Esta ley se grafica en el esquema de la derecha. El área bajo la curva es la del trapecio achurado, la cual se puede visualizar como la resta del área de dos triángulos. El área del triángulo mayor es $\frac{1}{2} \text{Base} \times \text{Altura} = \frac{1}{2}x_B \times (-kx_B) = -\frac{1}{2}kx_B^2$. Análogamente, el área del triángulo menor cuya base x_A es $-\frac{1}{2}kx_A^2$. Por lo tanto, para el resorte obtenemos:

$$W_{a \rightarrow B}(\text{Resorte}) = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 .$$

La energía potencial del resorte

Lo interesante del resultado anterior es que el trabajo de la fuerza elástica depende sólo de las coordenadas x_A y x_B . No depende de la forma como se llega de una a la otra. Esta particularidad ya la vimos cuando evaluamos el trabajo realizado por la gravedad, $W = -mgy_B + mgy_A$, lo que nos permitió definir energía potencial asociada al peso. En forma totalmente análoga, podremos introducir una energía potencial elástica. Reconsideremos la Ec. (5.4) y re-definamos lo que entendemos por resto de las fuerzas. Si la evolución de un sistema involucra fuerzas de diversa índole, entre ellas el peso y fuerzas de resortes, entonces podemos escribir

$$K_B = K_A + W_{A \rightarrow B}(\text{Peso}) + W_{A \rightarrow B}(\text{Resorte}) + W_{A \rightarrow B}(\text{Resto})$$

Sustituyendo las expresiones para el trabajo debido al peso y el resorte, y luego reagrupar términos, se obtiene

$$\underbrace{K_B + mgy_B + \frac{1}{2}kx_B^2}_{E_B} = \underbrace{K_A + mgy_A + \frac{1}{2}kx_A^2}_{E_A} + W_{A \rightarrow B}(\text{Resto}) ,$$

Ahora la energía mecánica E del sistema incluye la energía potencial elástica U_e ,

$$E = K + U_g + U_e ,$$

donde

$$U_e = \frac{1}{2}k\delta^2 ,$$

con δ la *elongación* del resorte.

⇒ Compresión vertical de un resorte

Consideremos un resorte de longitud natural L y constante elástica k dispuesto en forma vertical, con su extremo inferior fijo al piso [ver Fig. (5.12)]. En su extremo superior hay una pequeña placa de masa nula. Un cuerpo de masa m es soltada desde una altura b con respecto a la placa. Cuando el cuerpo se encuentra con la placa, el resorte se empieza a comprimir hasta frenar completamente el cuerpo. Nos preguntamos por la mínima altura que alcanza el cuerpo.

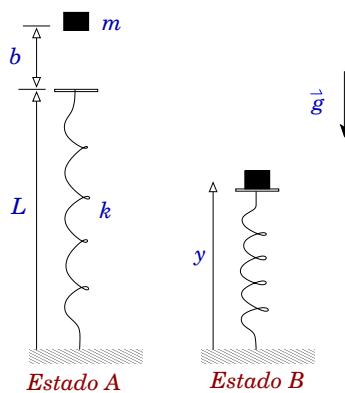


Figura 5.12: El trabajo debido a una fuerza que es función de la posición está dado por el área bajo la curva, en el gráfico F vs x .

En este caso identificamos dos estados de interés. El estado A se ilustra en el diagrama de la izquierda, en tanto que el estado B muestra el resorte comprimido y el bloque con velocidad *instantánea* igual a cero. Nuestro sistema consiste en el bloque, por lo que las fuerzas externas responsables de la evolución $A \rightarrow B$ son el peso y la fuerza del resorte, ambas participantes de la energía mecánica total. No hay otras fuerzas, por lo que aplicamos $E_B = E_A$. Para cuantificar la energía potencial usaremos el piso como referencia. Entonces

$$E_A : \begin{cases} K = 0 \\ U_g = mg(L + b) \\ U_e = 0 \end{cases} \quad E_B : \begin{cases} K = 0 \\ U_g = mgy \\ U_e = \frac{1}{2}k(y - L)^2 \end{cases}$$

Igualando las energías, $mg(L + b) = mgy + \frac{1}{2}k(y - L)^2$. La ecuación es cuadrática para y . Antes de aplicar directamente la ecuación para una ecuación cuadrática introduzcamos una nueva variable,

$$z = y - L.$$

Esta variable nos servirá para contener la proliferación de términos, simplificando el álgebra. Así,

$$\frac{1}{2}kz^2 + mgz - mgb = 0,$$

de donde obtenemos

$$z = \frac{-mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 4 \frac{1}{2}k(-mgb)}}{k} = -\frac{mg}{k} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{2kb}{mg}} \right).$$

Identificamos dos soluciones, las cuales debemos analizar antes de descartar. Volviendo a la variable original y ($y = L + z$), las soluciones para y están dadas por

$$y_1 = L - \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kb}{mg}}, \quad y_2 = L - \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kb}{mg}}.$$

Observamos que $y_1 \leq y_2$, de modo que el punto más bajo está dado por y_1 . La otra solución tiene una interpretación bastante simple. Una vez que el cuerpo queda adherido al resorte, este se mantendrá oscilando verticalmente, siempre prendido al resorte. La solución y_2 da cuenta de la altura máxima alcanzada por el sistema. Para fijar ideas podemos pensar que $b = 0$, lo que significa que el bloque es soltado tocando al resorte. Para este caso particular

$$y_1 = L - 2\frac{mg}{k}, \quad y_2 = L,$$

que corresponde a oscilaciones entre $y = L$, e $y = L - 2mg/k$. El punto medio de las oscilaciones es $y_o = L - mg/k$, la coordenada donde se ubicaría el cuerpo en una situación de equilibrio estático. Por lo tanto, las oscilaciones ocurren en torno a la posición de equilibrio.

Análisis propuesto: Note que la solución para y_1 permite que ella sea igual a cero, lo cual es posible para un b adecuado. Esta situación representaría un resorte completamente comprimido (en L). Determine el valor de b para que ello ocurra y verifíquelo a partir de la solución para y_1 .

5.0.10. Fuerzas conservativas

Cuando el trabajo realizado por una fuerza no depende de la trayectoria que se tome para unir dos puntos A y B, a la fuerza se le denomina *conservativa*. Toda fuerza conservativa lleva asociada una función escalar que reconocemos como energía potencial.

Los casos del peso y la fuerza elástica de un resorte constituyen ejemplos de fuerzas conservativas. En la Fig. (5.13) se ilustra una manzana de masa m que es llevada desde el punto A hacia el punto B. El trabajo de la fuerza de gravedad (peso), de acuerdo a nuestro resultado anterior, es $W_g = -mgh$. En esta figura hemos incluido otras tres trayectorias imaginarias, todas las cuales arrojan el mismo resultado para el trabajo. Por ejemplo, la trayectoria I está formada por un ascenso vertical (trabajo $-mgh$) con un desplazamiento horizontal (trabajo nulo), lo que conlleva a un trabajo neto de $-mgh$. La trayectoria II está formada por un desplazamiento horizontal (trabajo nulo) y un ascenso vertical (trabajo $-mgh$). En el caso de la trayectoria escalonada III, todo desplazamiento

horizontal conlleva trabajo nulo y sólo los ascensos verticales suman, contribuyendo al mismo total: $-mgh$. Como se observa, el trabajo no depende de la trayectoria, por lo que la fuerza resulta conservativa.

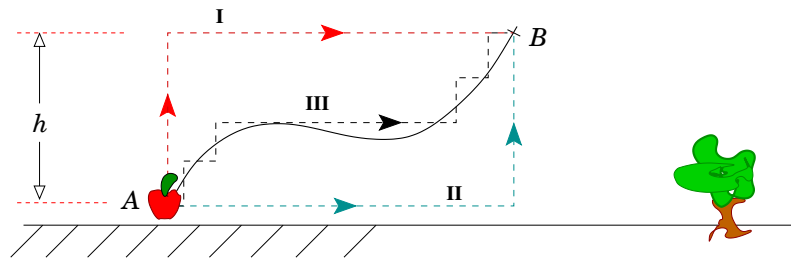


Figura 5.13: El trabajo realizado por el peso no depende de las trayectorias escogidas para ir desde A a B.

Un corolario del resultado anterior es que *el trabajo de una fuerza conservativa en una trayectoria cerrada arbitraria es nula*. Esto es inmediato si se tiene en cuenta que $W_{A \rightarrow B} = -W_{B \rightarrow A}$. Esta propiedad geométrica tiene bastantes implicaciones interesantes, las cuales emergen nuevamente en *Mecánica* y *Electromagnetismo*.

Otro caso en el cual el trabajo es independiente de la trayectoria es el caso de un resorte, el cual está fijo en uno de sus extremos. En la Fig. (5.14) se muestra un resorte con uno de sus extremos fijo en O , mientras su otro extremo es llevado desde A hacia B. Se ha supuesto longitud natural igual a cero, lo que no afecta la independencia de trayectoria.

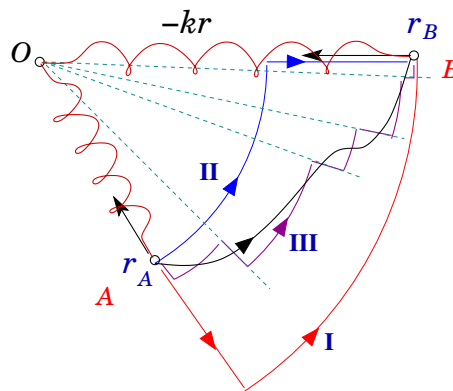


Figura 5.14: El trabajo realizado por un resorte no depende de la trayectoria escogida para ir desde A hasta B. La fuerza del resorte se supone radial de la forma $-kr$.

La trayectoria I involucra una elongación radial, estrictamente unidimensional, seguida de un desplazamiento angular sin cambio de radio. En este último trayecto el trabajo es nulo pues el desplazamiento resulta perpendicular a la fuerza del resorte. La trayectoria II parte con un desplazamiento angular (trabajo nulo) el cual es seguido de uno radial. Al igual que en el caso de la gravedad, el trayecto es escalonado III conduce al mismo trabajo. La curva continua representa un caso arbitrario.

5.0.11. Trabajo debido a un campo gravitacional

En la Sección 5.0.8 vimos que si contamos con una fuerza función de la posición, entonces el trabajo queda dado por el área bajo la curva en el intervalo de desplazamiento. Esta idea la aplicaremos en el caso de la fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m , cuya dirección es radial y está dada por

$$F(r) = -G \frac{Mm}{r^2}.$$

La curva de esta función se ilustra en la Fig. (5.15): es una función negativa, que se hace infinitamente negativa cuando $r \rightarrow 0$, y que además se acerca al eje r (por debajo) cuando $r \rightarrow \infty$.

Para fijar ideas supondremos (aunque no es necesario) que el el cuerpo de masa M es muy masivo, por lo que se mantiene siempre en una posición fija. Por lo tanto, el trabajo de la fuerza gravitacional al alejar radialmente el cuerpo de masa m desde r_A hasta r_B queda dado por el área achurada que se ilustra en la Fig. (5.15)

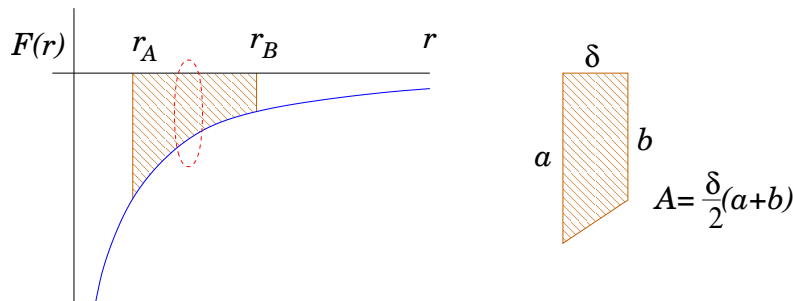


Figura 5.15: El trabajo realizado por la gravedad está dado por el área achurada.

El área achurada se puede calcular de diversas formas, de las cuales presentaremos dos.

5.0.11.1. Area haciendo uso de la regla del trapezoide

En este método subdividimos el intervalo $[r_A, r_B]$ en N partes iguales, cada una de ancho $\delta = (r_B - r_A)/N$. La i -ésima coordenada con la anterior se relacionan mediante

$$r_i = r_{i-1} + \delta, \quad r_o \equiv r_A.$$

El área δA_i de $F(r)$ vs r en el tramo $(i-1, i)$ es igual a (base) $\times$ (semi-altura), vale decir,

$$\delta A_i = \frac{\delta}{2} (-GMm) \left(\frac{1}{r_{i-1}^2} + \frac{1}{r_i^2} \right) = \frac{\delta}{2} (-GMm) \left(\frac{r_i^2 + r_{i-1}^2}{r_{i-1}^2 r_i^2} \right)$$

Manipulando algebraicamente,

$$\frac{r_i^2 + r_{i-1}^2}{r_i^2 r_{i-1}^2} = \frac{2r_i^2 - 2r_i\delta + \delta^2}{r_i^2 r_{i-1}^2} = \frac{2r_i(r_i - \delta + \delta^2/2r_i^2)}{r_i^2 r_{i-1}^2} \approx \frac{2}{r_i r_{i-1}},$$

donde hemos despreciado δ^2 con respecto a δ y usado $r_{i-1} + \delta = r_i$. Por lo tanto,

$$\delta A_i = (-GMm) \frac{\delta}{r_{i-1} r_i} = (-GMm) \left(\frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \right).$$

Para el área total A sumamos todas las contribuciones, $\delta A_1 + \dots + \delta A_N$, conducente a

$$A = (-GMm) \left[\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_{N-1}} - \frac{1}{r_N} \right) \right] = (-GMm) \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Con lo anterior

$$W_{A \rightarrow B}(\text{Gravedad}) = \frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A}.$$

5.0.11.2. Area haciendo uso de variación de funciones

Como hemos visto, el trabajo de una fuerza está dada por el área bajo la curva $F(x)$ versus x . En un contexto totalmente general, nos planteamos el cálculo del área entre el eje x y la curva definida por $f(x)$. Para el intervalo $[a, x]$ denotamos esta área por $A = A(x)$. Claramente, con esta definición, $A(a) = 0$.

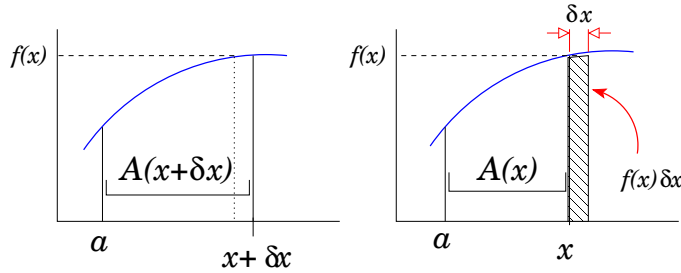


Figura 5.16: Cuando δx es suficientemente pequeño, el área bajo la curva, $A(x)$, satisface $A(x + \delta x) \approx A(x) + f(x) \delta x$.

Al pasar de x a $x + \delta x$, el área correspondiente será $A(x + \delta x)$. Observando la Fig. (5.16), vemos que $A(x + \delta x)$ se aproxima a la suma de $A(x)$ con el área de una pequeña lonja de anchura δx y altura $f(x)$. En otras palabras,

$$A(x + \delta x) \approx A(x) + f(x) \delta x .$$

Denotando $\delta A \equiv A(x + \delta x) - A(x)$, entonces

$$\delta A \approx f(x) \delta x .$$

Esta ecuación es distinta a las algebraicas que comunmente hemos enfrentado puesto que en este caso el dato es la *función* $f(x)$, en tanto que la incógnita es $A(x)$. La pregunta con que nos enfrentamos es, dada una función $f(x)$, ¿cuál es aquella función $A(x)$ cuya variación, $A(x + \delta x) - A(x)$ resulta $f(x)\delta x$? Dar respuesta general a esta pregunta es imposible, además de inútil. Sin embargo, cuando $f(x)$ es una potencia de x , entonces $A(x)$ resulta igualmente sencilla.

Si denotamos por $W_a(x)$ el trabajo realizado por una fuerza $F(x)$ en un desplazamiento desde $x = a$ hasta x , entonces podemos escribir

$$\delta W_a = F(x) \delta x .$$

Revisemos dos casos estudiados anteriormente y exploremos el caso de la gravitación universal.

i.- El caso de la gravedad terrestre

Aquí el trabajo ocurre ante desplazamientos verticales, δy . La fuerza según y es $F = -mg$. Entonces,

$$\delta W_a = -mg \delta y .$$

Claramente, en este caso $W_a(y) = -mgy + \text{Cte}$, donde la constante se evalúa exigiendo que $W_a(a) = 0$. Entonces $0 = -mga + \text{Cte}$, por lo que

$$W_a(y) = -mgy + mga ,$$

resultado ya conocido.

ii.- El caso de un resorte

En el caso de un resorte la fuerza está dada por $F(x) = -kx$, por lo que

$$\delta W_a = -kx \delta x .$$

En este caso

$$W_a(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + \text{Cte} .$$

Imponiendo $W_a(a) = 0$, tenemos

$$W_a(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ka^2 .$$

iii.- El caso de la atracción gravitacional

En este caso contamos con $F(r) = -GMm/r^2$, por lo cual

$$\delta W_a = -GMm \frac{1}{r^2} \delta r .$$

Ya vimos que

$$\delta \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} \delta x ,$$

con lo cual

$$W_a(r) = \frac{GMm}{r} + \text{Cte} .$$

Imponiendo $W_a(a) = 0$, tenemos

$$W_a(r) = \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{a} . \quad (5.6)$$

5.0.12. Energía potencial gravitacional

Consideremos una partícula de masa m sometida a la fuerza gravitacional de la Tierra o cualquier otro astro de masa M . Entonces podemos escribir la relación entre las energías cinéticas de la partícula entre dos estados A y B, y el trabajo debido a la fuerza gravitacional en esa evolución,

$$K_B = K_A + W_{A \rightarrow B}(\text{Gravedad}) = K_A + \frac{GMm}{r_B} - \frac{GMm}{r_A} .$$

Claramente,

$$K_B + \frac{-GMm}{r_B} = K_A + \frac{-GMm}{r_A} ,$$

Esto nos permite definir la *energía potencial gravitacional* U_G según

$$U_G(r) = \frac{-GMm}{r} .$$

Por lo tanto,

$$(K + U_G)_B = (K + U_G)_A ,$$

la energía es conservada.

Implícito en la definición de la energía potencial está el hecho que el nivel cero se encuentra en el infinito ($r \rightarrow \infty$). Esta elección es pura conveniencia, puesto que lo que interesa físicamente es la diferencia de energía entre dos estados.

5.0.13. La rapidez de escape

Supongamos que desde la superficie de la Tierra a un proyectil se le imprime una rapidez v . Si el objeto es lanzado verticalmente, este alcanzará una cierta altura máxima y luego volverá a su lugar de lanzamiento. Mientras mayor sea la rapidez de lanzamiento, más demorará en regresar. Nos preguntamos por aquella rapidez mínima necesaria, v_e , para que el objeto nunca regrese. A esta rapidez se le denomina *rapidez de escape*.

Una vez puesto el objeto en movimiento con rapidez v_e , este tiene una energía mecánica total igual a la suma de la cinética y potencial,

$$(K + U_G)_i = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} .$$

Esta energía es la misma a que la que tendría el proyectil infinitamente lejos del centro de atracción (la Tierra),

$$(K + U_G)_\infty = \overset{0}{K} + \overset{0}{U_G} = 0 ,$$

donde la energía cinética es nula 'en el infinito', en tanto que la energía potencial tiende a cero pues $r \rightarrow \infty$. Con lo anterior,

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GMm}{R} \quad \rightarrow \quad v_e^2 = \frac{2GM}{R} = 2gR .$$

Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, y $R = 6400 \text{ km}$, obtenemos $v_e = 11\,300 \text{ m/s}$, o bien $41\,000 \text{ km/h}$.

5.0.14. La energía potencial en proximidades a la superfcie terrestre

Cuando nos encontramos en las vecindades de la superficie terrestre es innecesario hacer uso de la expresión $U_G = -GMm/r$ para la energía potencial. Ilustramos enseguida como surge la forma ' $-mgh$ ' para el trabajo debido a la gravedad al subir un objeto una distancia h . Para ello consideremos el desplazamiento de un cuerpo de masa m desde un cierto nivel inicial en la Tierra, digamos $r_A = R + y_A$, hacia otro nivel $r_B = R + y_B$. La trayectoria se ilustra en la Fig. (5.17).

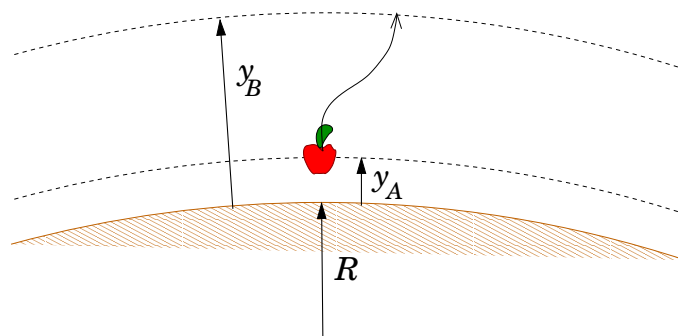


Figura 5.17: Un cuerpo es desplazado desde una altura y_A a otra y_B en vecindades de la superficie terrestre.

De acuerdo a nuestros resultados, el trabajo para el ascenso descrito está dado por

$$W_{A \rightarrow B} = -GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = -GMm \left(\frac{1}{R + y_A} - \frac{1}{R + y_B} \right).$$

Cuando estamos cerca de la superficie de la Tierra, y_A es típicamente unos cuantos metros o kilómetros, cantidad pequeña en relación a los 6,4 millones de metros del radio terrestre R . Por lo tanto, estamos en un régimen en el cual $y_A/R \ll 1$, donde podemos aproximar²

$$\frac{1}{R + y_A} = \frac{1}{R(1 + y_A/R)} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{y_A}{R} \right).$$

Sustituyendo en la expresión para $W_{A \rightarrow B}$ obtenemos

$$W_{A \rightarrow B} \approx -GMm \left[\frac{1}{R} \left(1 - \frac{y_A}{R} \right) - \frac{1}{R} \left(1 - \frac{y_B}{R} \right) \right] = GMm \left(\frac{y_A}{R^2} - \frac{y_B}{R^2} \right) = -mg(y_B - y_A).$$

En esta última hemos hecho la identificación $g = GM/R^2$. Considerando $y_B - y_A = h$, reproducimos el resultado conocido.

²Aquí hemos usado $(1 + \epsilon)^p \approx 1 + p\epsilon$, para $\epsilon \ll 1$.

⇒ *La energía mecánica negativa de la Luna*

En lenguaje común es usual asociar energías positivas con virtudes, en contraste con las energías negativas, focos de adversidades, defectos e impredecibilidad. Como veremos, en física eso no es tal. De hecho los mínimos de energía conllevan a equilibrios mecánicos. Para ilustrar este punto calculemos la energía mecánica de un astro en movimiento circunferencial uniforme en torno a un centro de fuerzas gravitacional. Este pudiera ser el caso de la Luna, un satélite cualquiera, o incluso la Tierra alrededor del Sol.

La energía mecánica total de tal sistema está dado por $K + U_G$. En presencia de un campo gravitacional debido a un planeta de masa M tenemos

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}.$$

En órbita circunferencial de radio r , la Segunda Ley de Newton conduce a

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{r}.$$

Reemplazando v^2 en la expresión para la energía obtenemos

$$E = \frac{1}{2}m \times \frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r},$$

la cual evidentemente es negativa. Podemos contrastar este resultado con el caso del escape de un proyectil, el cual tiene energía mecánica total igual a cero. Si el cuerpo en cuestión tiene una energía entre estos dos valores, su órbita resultará elíptica. Estos aspectos son estudiados en mayor detalle en *Mecánica*, una asignatura donde herramientas de cálculo diferencial están más a mano.

5.0.15. Potencia

Una manera de cuantificar la tasa de transferencia de energía aportada por una fuerza, o mediante procesos de conversión eléctrica o térmica, es mediante la *potencia*. La idea genérica detrás de su definición es la de trabajo por unidad de tiempo, es decir

$$\text{Potencia} \sim \frac{\text{Trabajo}}{\text{Tiempo}}.$$

Desde un punto de vista mecánico, consideremos un cuerpo en movimiento. Su trayectoria es una consecuencia de la fuerza neta que sobre él actúa. El trabajo que una de

las tantas fuerzas participantes, que denotaremos $\vec{F}$, realizara un pequeño trabajo en un desplazamiento $\delta\vec{r}$, el cual está dado por

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}.$$

El trabajo por unidad de tiempo queda dado por

$$\frac{\delta W}{\delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\delta\vec{r}}{\delta t}.$$

En el límite $\delta t \rightarrow 0$ tenemos la potencia instantánea,

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Esta es la expresión para la potencia instantánea debido a una fuerza $\vec{F}$. Es un escalar que puede ser positivo (cuando $\vec{F}$ aporta energía), nulo o negativo (cuando $\vec{F}$ quita energía).

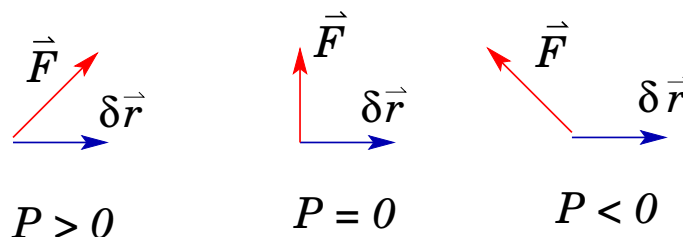


Figura 5.18: La potencia instantánea puede ser positiva, nula o negativa.

Dimensionalmente tenemos que

$$[Potencia] = \frac{[Trabajo]}{[Tiempo]} = \frac{ML^2/T^2}{T} = ML^2T^{-3}.$$

En el Sistema Internacional la potencia la expresamos en unidades de joule/segundo, combinación que se denomina watt. Así,

$$1 \frac{\text{joule}}{\text{segundo}} = 1 \frac{J}{s} = 1 \text{ watt} \equiv 1 W.$$

ADVERTENCIA: El kilowatt-hora (kW h) es unidad de energía, equivalente a la aportada por 1000 W durante 1 hora. En otras palabra,

$$E = 1000 (J/s) \times 3600 s = 3,6 \times 10^6 J = 3,6 MJ.$$

5.0.15.1. Algunos ejemplos

⇒ *Potencia media debido a la caída de un cuerpo*

Consideremos la caída de un cuerpo de 1 kg desde una altura de 10 m. Tal puede ser también el caso de 1 litro de agua en caída libre. Calcularemos entonces la potencia media aportada por la gravedad terrestre.

Puesto que el peso $\vec{w}$ es colineal con la velocidad $\vec{v}$, entonces la potencia es positiva: hay aporte energético. La potencia media es el trabajo neto debido a la gravedad ($mgh = 1 \times 10 \times 10$ J) dividido por la duración de la caída:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2 \times 10/10} = \sqrt{2} \text{ s}.$$

Evaluyendo,

$$\bar{P} = \frac{100}{\sqrt{2}} \approx 71 \text{ W}.$$

⇒ *Bloque frenado por roce*

Estudiemos el frenado de un bloque sobre una superficie rugosa. En particular, nos interesa examinar la potencia disipada por la fuerza de roce.

En la Fig. (5.19) un bloque de masa m se mueve con velocidad v_o sobre una superficie resbaladiza, para luego entrar a un sector rugoso caracterizado por un coeficiente de roce μ .

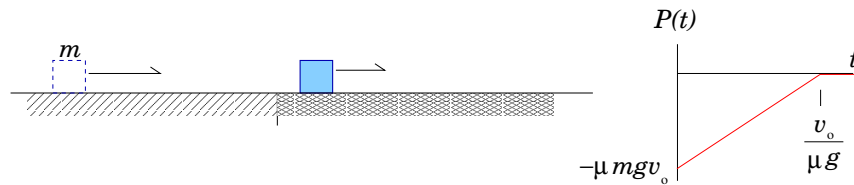


Figura 5.19: Disipación de energía en el frenado de un bloque.

La potencia instantánea de la fuerza de roce está dada por $\vec{f} \cdot \vec{v}$. Escogiendo la dirección positiva hacia la derecha, entonces la componente de la velocidad es la de un movimiento acelerado, con aceleración $-\mu g$. Entonces,

$$v(t) = v_o - \mu g t.$$

Claramente el móvil se detiene en el instante $t = v_o / \mu g$. La potencia instantánea es entonces

$$P(t) = -\mu mg(v_o - \mu g t).$$

El signo negativo es consecuencia del ángulo entre la fuerza de roce $\vec{f}$ y la velocidad $\vec{v}$. En el gráfico de la derecha de la Fig. (5.19) se ilustra el comportamiento de $P(t)$, el cual se caracteriza por una recta hasta $t = v_o/\mu g$, instante en que cesa el movimiento. El área bajo la curva corresponde a la energía total disipada. Tomando ventaja de la forma triangular, es directo constatar que tal área es $-mv_o^2/2$: toda la energía cinética es consumida por el roce.

Capítulo 6

Sistemas binarios y leyes de conservación

En la actualidad, en diversos países alrededor del mundo, hay un sinnúmero de aceleradores de partículas con propósitos de investigación y terapéuticos. La característica de todos ellos es la de mantener haces colimados de partículas de una misma clase. Estos haces son dirigidos hacia un blanco, o bien a un encuentro frontal con otro haz. Lo que allí ocurre son colisiones (choques) entre los constituyentes, las que se caracterizan por interacciones de duración muy breve. Al igual que en los sistemas clásicos, las colisiones que allí ocurren obedecen una misma ley fundamental, cual es la *ley de conservación del momentum*.

Utilicemos la teoría de Newton para describir la interacción de dos cuerpos, 1 y 2. Para fijar ideas supongamos que los cuerpos se acercan mutuamente, sin interactuar, hasta que alcanzan la cercanía suficiente como para que la interacción entre ellas haga manifiesta, rompiéndose así la naturaleza rectilínea de sus trayectorias.

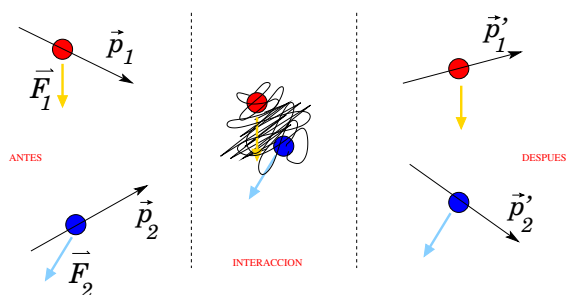


Figura 6.1: Colisión entre dos cuerpos en presencia de fuerzas externas.

Como se ilustra en el sistema binario de la Fig. (6.1), la partícula 1 es afectada por dos tipos de fuerzas: la primera es la que 2 ejerce sobre 1, $\vec{f}_{2/1}$, mientras que segunda

es ajena (externa) al sistema, que denotaremos $\vec{F}_1$. Si $\vec{p}_1(t)$ representa el momentum de la partícula 1, entonces su movimiento está gobernado por la ecuación

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{2/1} + \vec{F}_1 .$$

De forma totalmente análoga la partícula 2 obedece

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{1/2} + \vec{F}_2 .$$

Sumando los lados correspondientes obtenemos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \underbrace{(\vec{f}_{2/1} + \vec{f}_{1/2})}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 ,$$

donde hemos definido el *momentum total*

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 .$$

El principio de acción y reacción nos permite afirmar que $\vec{f}_{1/2} = -\vec{f}_{2/1}$, por lo que el comportamiento del momentum total $\vec{P}$ resulta completamente independiente de la naturaleza de las fuerzas internas. Por lo tanto, si definimos la fuerza (externa) neta $\vec{F}$ sobre el sistema mediante

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 ,$$

entonces

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} .$$

Esta es una ecuación vectorial, por lo que cada una de las tres componentes cartesianas obedece la misma relación:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x , \quad \frac{dp_y}{dt} = F_y , \quad y \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z .$$

Analicemos el caso particular en el que haya ausencia total de fuerzas externas. En tal caso $d\vec{P}/dt = 0$, para todo instante t , por lo que el momentum es una constante (vectorial) en el tiempo:

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_t = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_{Ini} .$$

La lectura a este resultado es que la suma de los momenta es constante, lo cual no implica que $\vec{p}_1$ (o $\vec{p}_2$) sean constante. De hecho la variación del momentum de una de las partículas es absorbida por la otra.

La relación anterior, inferida para dos partículas, es válida para un número indeterminado (N) de partículas. El momentum total es la suma vectorial de los momenta,

$$\vec{P} = \sum_i^N \vec{p}_i ,$$

el cual satisface

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} ,$$

idéntica relación al caso de dos cuerpos. Este resultado establece que en un choque de dos cuerpos extendidos el momentum total se conserva, siendo lo suficientemente general como para admitir deformaciones, intercambio de masa entre los cuerpos e incluso presencia de fragmentos. Esta idea se ilustra en la caricatura de la Fig. (6.2), donde el par emergente no necesariamente es el mismo antes de chocar.

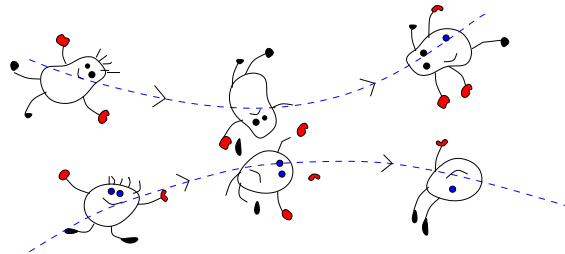


Figura 6.2: La colisión entre dos cuerpos con estructura conserva el momentum total.

6.0.15.2. Un ejemplo

⇒ *Saco resbalando sobre un trineo*

Consideremos un saco resbalando sobre una superficie horizontal muy resbaladiza (hielo). La superficie empalma con la cubierta de un trineo, el cual puede resbalar sin fricción sobre el piso [ver Fig. (6.3)]. Una vez que el saco entra en contacto con el trineo su movimiento es frenado, mientras que el trineo adquiere movimiento. El deslizamiento mutuo termina una vez que ambos alcanzan la misma velocidad. Si la masa del saco es m y la del trineo es M , ¿cuál es la velocidad del par cuando la velocidad inicial del saco es v_0 ?

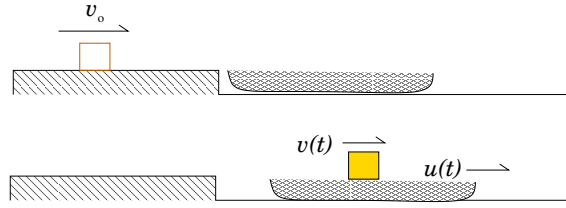


Figura 6.3: Un saco resbalando sobre hielo hasta posar sobre un trineo.

Nuestro primer paso es identificar el sistema a estudiar, para luego examinar el rol de las fuerzas externas. En este caso es natural identificar como sistema a estudiar el par *saco-trineo*. Está claro que no hay fuerzas externas a lo largo de la horizontal (la fuerza de roce entre el saco y el trineo es interna), por lo que la componente horizontal del momentum total es conservado. Escribimos para la componente horizontal

$$(p_S + p_T)_{Ini} = (p_S + p_T)_{Fin} \quad \rightarrow \quad mv_o + 0 = mv + Mv ,$$

donde v denota la velocidad del conjunto. Despejando obtenemos

$$v = \left(\frac{m}{m + M} \right) v_o .$$

Examinemos la variación de la *energía cinética total* del sistema, definida como la suma de las energías cinéticas de sus constituyentes. Así, la energía cinética inicial es $K_o = mv_o^2/2$, en tanto que la final es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}(m + M)v^2 = \frac{1}{2}(m + M) \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 v_o^2 ,$$

de donde

$$K = \left(\frac{m}{m + M} \right) K_o \leq K_o .$$

Observamos que la energía cinética del sistema *no es conservada*. De hecho disminuye, manteniéndose invariable sólo en caso que $M = 0$, que equivale a un trineo de masa nula.

La diferencia de energía cinética ha sido disipada por el roce entre el trineo y el saco. Este problema es idéntico desde un punto de vista mecánico a la incrustación de un proyectil en un blanco masivo.

Una variante al problema anterior es considerar un saco lo suficientemente rápido, como para que este siga de largo y abandone el trineo por su parte delantera. Puesto que hay resbalamiento con roce, sólo podemos contar con las restricciones impuestas por la conservación de momentum. Si bién las velocidades individuales de cada cuerpo son desconocidas, el conocer (medir) una de ellas permite determinar la otra.

6.1. Colisiones elásticas

Una clase especial de colisiones la constituyen los choques elásticos. Ellos, por definición, conservan la energía cinética. Esto es, la energía cinética después de la colisión es igual a la energía cinética total antes de ella. Analicemos el caso del choque unidimensional ilustrado en la Fig. (6.4), donde un bloque de masa m alcanza a una bolita de masa M . Las componentes de sus velocidades son v y V , respectivamente.



Figura 6.4: Colisión elástica entre un bloque de masa M y una bolita de masa m .

Imponiendo conservación de momentum y de energía cinética tenemos

$$\begin{aligned} MV + mv &= MV' + mv' \\ \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2. \end{aligned}$$

Contamos con un sistema de 2×2 : dos ecuaciones y dos incógnitas (v' y V'). Notese que una de las ecuaciones es cuadrática. A fin de evitar una manipulación algebraica elaborada, conviene observar la siguiente estrategia. Agrupemos los términos proporcionales a m a la izquierda, y los proporcionales a M a la derecha, obteniendo

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (6.1)$$

$$m(v^2 - v'^2) = M(V'^2 - V^2). \quad (6.2)$$

La segunda de estas ecuaciones contiene sumas-por-diferencias:

$$m(v^2 - v'^2) = m(v - v')(v + v'), \quad M(V'^2 - V^2) = M(V' - V)(V' + V).$$

Al usar la Ec. (6.1) se logran cancelaciones, conduciendo al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (6.3)$$

$$v + v' = V' + V. \quad (6.4)$$

Ahora nos enfrentamos a un sistema lineal de 2×2 , mucho más simple de resolver. Para ello despejamos v' de la Ec. (6.4), $v' = V' + V - v$ y la reemplazamos en la Ec. (6.3). Obtenemos para V' ,

$$V' = \frac{(M - m)V + 2mv}{M + m}.$$

Análogamente para la otra velocidad,

$$v' = \frac{(m - M)v + 2MV}{m + M}.$$

Examinemos casos particulares interesantes.

Cuerpos de igual masa

Si las masas son iguales, $m = M$, entonces claramente

$$v' = V, \quad V' = v.$$

La lectura es evidente: ¡las velocidades se intercambian!, vale decir, la bola adquiere la velocidad del bloque y el bloque la velocidad de la bola.



Figura 6.5: Intercambio de velocidades en colisión elástica entre cuerpos de igual masa.

Cuerpos de igual masa, con la bola en reposo

Si la bola está inicialmente en reposo ($v = 0$), entonces

$$V' = 0, \quad v' = V.$$

Esto implica que el cuerpo en movimiento queda detenido después del choque ($V' = 0$), en tanto que la bola adquiere la velocidad del bloque ($v' = V$).



Figura 6.6: Colisión elástica entre cuerpos de igual masa, con el blanco en reposo.

Bloque muy masivo contra bola liviana en reposo

Consideremos $M \gg m$, de modo que $m/M \ll 1$. Este pudiera ser el caso de un tren de masa M chocando con una pelota de ping-pong de masa m en reposo ($v = 0$). Al hacer $m \sim 0$ y $v = 0$ en nuestras soluciones para las velocidades finales, se obtiene

$$V' = V; \quad v' = 2V.$$

La lectura es que el tren de masa M no altera su velocidad con el choque ($V' = V$), en tanto que la pelota de ping-pong emerge con el doble de la velocidad del tren: $v' = 2V$. Este caso extremo también se da cuando una pelota de tenis es golpeada por la raqueta.



Figura 6.7: Colisión elástica sobre bolita liviana en reposo.

Choque frontal entre partículas de igual masa

Cuando las partículas son de igual masa ($m = M$) vimos que

$$v' = V, \quad V' = v.$$

Consideremos que los cuerpos chocan frontalmente en forma elástica. Para fijar ideas, supongamos que el bloque se mueve hacia la derecha con velocidad $V = v_o$, por lo que la bolita se acerca al bloque con velocidad $v = -v_o$. Luego del choque las velocidades se intercambian, por lo que el bloque emerge con velocidad $-v_o$, en tanto que la bolita con velocidad v_o .



Figura 6.8: Colisión frontal elástica entre cuerpos de igual masa.

Al sistema de referencia donde el momentum total es nulo se le denomina *Sistema de Centro de Momentum*.

6.1.1. Clasificación de colisiones

Como hemos visto, en ausencia de fuerzas externas las colisiones conservan el momentum total, $\vec{P}_i = \vec{P}_f$. Esta es una ley universal. Sin embargo, desde el punto de vista energético, es posible identificar tres clases de colisiones.

Colisiones elásticas: Son aquellas donde se conserva la *energía cinética*. En la práctica estas situaciones no se dan a escala macroscópica, pues siempre ocurren pérdidas

energéticas ya sea por vibraciones producidas por el choque, deformaciones, fracturas, calentamiento (calor), ruido, rotaciones, etc. Todas estas son formas donde parte de la energía cinética inicial es transferida al resto del universo. La energía cinética final resulta menor que la inicial debido a esas pérdidas.

Colisiones perfectamente inelásticas (plásticas): Corresponden a aquella situación en que los dos objetos que chocan quedan completamente adheridos, emergiendo luego de la colisión como una unidad.

Colisiones inelásticas: Cubren toda la región intermedia entre los dos casos descritos anteriormente. En estos casos no hay conservación de energía cinética. Prácticamente todos las colisiones de tipo macroscópico son inelásticas.

⇒ *Subida sobre cuña luego de incrustamiento.*

Consideremos un choque perfectamente inelástico, donde un proyectil de masa m –incidiendo horizontalmente con velocidad u – se incrusta en un bloque de plasticina de igual masa. El proceso se ilustra en la Fig. (6.9), en el instante justo antes en que el bloque sea impactado por el proyectil. El par entra en movimiento hasta lograr contacto con una rampla de masa M , la cual tiene una curva suave que termina a una altura h desde su nivel inferior. Todas las superficies de la rampla son perfectamente resbaladizas. Nos preguntamos por la altura h mínima de la rampla que garantice que el par proyectil-bloque nunca caiga por la parte delantera de la rampla.

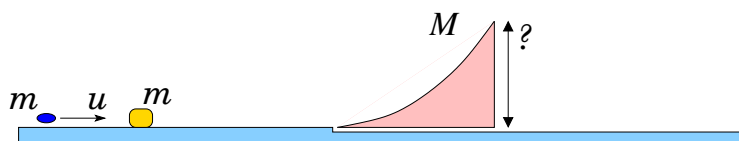


Figura 6.9: Choque plástico, seguido de ascenso sobre una rampla.

El proceso incluye dos etapas totalmente distinguibles, las que discutimos a continuación. Primero ocurre un choque inelástico entre el proyectil y el bloque de plasticina. Este proceso conserva el momentum total del par proyectil-bloque (PB), no así la energía cinética. La conservación del momentum (componente vectorial horizontal) implica

$$mu + 0 = (m + m)v \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{2}u .$$

Aquí v representa la velocidad de PB. Una vez que PB entra en contacto con la rampla, la interacción entre ambos hace que la rampla adquiera movimiento (horizontal), mientras que PB adquiere una trayectoria curvilínea que desconocemos (además de ser innecesaria para este problema). Si examinamos el sistema $\{PB \oplus Rampla\}$, vemos que la fuerza

de contacto entre ambas es interna. Al no haber fuerzas horizontales a este sistema, entonces su momentum total horizontal es constante.

Analicemos entonces el sistema $PB \oplus Rampla$ entre dos situaciones: *i*) Justo antes de entrar PB en contacto con la rampla; y *f*) Justo cuando PB deja de subir en la rampla. En este último caso PB está en reposo (instantáneamente) *con respecto a la rampla*, por lo que ambas tienen la misma velocidad instantánea [ver Fig. (6.10)]. Como la rampla se mueve siempre en forma horizontal, entonces en ese instante (el de la máxima altura) PB también se mueve horizontalmente.

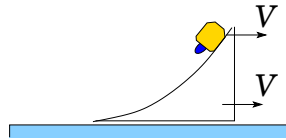


Figura 6.10: Cuando PB alcanza la altura máxima, su velocidad instantánea es la misma que la de la rampla.

Denotemos la velocidad de ambos por V . Entonces, conservación del momentum (horizontal) conduce a

$$(2m)v = (2m)V + MV \quad \rightarrow \quad 2mv = (2m + M)V$$

En lo que concierne a la energía, puesto que el resbalamiento es sin fricción, entonces la energía *mecánica* total del sistema se conserva. En este caso debemos dar cuenta tanto de la energía cinética como potencial. Igualando las energías entre los estados *i* y *f* tenemos

$$\frac{1}{2}(2m)v^2 = \frac{1}{2}(2m)V^2 + \frac{1}{2}MV^2 + (2m)gh \quad \rightarrow \quad 2mgh = mv^2 - \frac{1}{2}(2m + M)V^2.$$

Al combinar estas ecuaciones obtenemos para h

$$h = \frac{Mu^2}{8g(2m + M)}.$$

A esta altura llega PB. Si la altura de la rampla fuese menor que esta, entonces PB sigue de largo, cayendo por la parte de adelante.

6.2. Choques y tirones son la misma idea

En una de las secciones anteriores estudiamos choques elásticos. En ellos la energía mecánica total es conservada en todo instante. Si pensamos en la colisión frontal con

igual rapidez entre dos cuerpos de igual masa, va a haber un instante en que los cuerpos dejan de acercarse mutuamente. A ese instante la energía cinética es nula, habiendo sido guardada en forma de energía potencial. Al igual que en un resorte simple, la energía potencial almacenada es devuelta al sistema en forma de movimiento. Cuando la devolución es total, entonces la energía cinética al final es igual a la que había antes del choque.

La idea anterior se ilustra en la Fig. (6.11), donde dos masas se acercan mutuamente. Durante el contacto se producen deformaciones elásticas, las que permiten almacenar la energía inicial para luego devolverla en forma de movimiento.

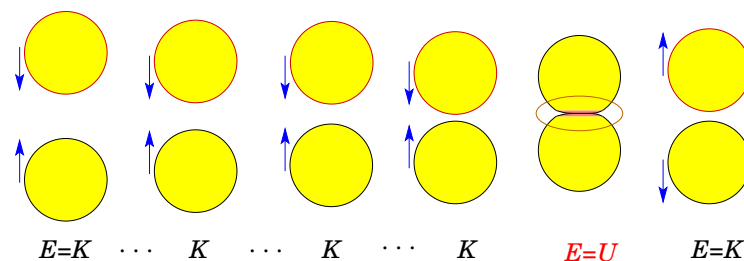


Figura 6.11: Secuencia de la colisión frontal de dos cuerpos de igual masa. Cuando dejan de acercarse, toda la energía cinética se almacena en forma de energía potencial, la cual es devuelta al sistema en forma de energía cinética.

Pensemos ahora en dos cuerpos unidos por una cuerda firme, pero que a su vez tenga la facultad de almacenar energía potencial elástica. Un buen ejemplo de ella es la cuerda de nylon utilizada para la pesca. Desde un punto de vista mecánico, a esta cuerda la podemos visualizar como dos trozos de cuerda ideal, unidas por un resorte imaginario de constante elástica muy alta (lo que ayuda a la rigidez, permitiendo el almacenamiento de energía potencial). Este *modelo de juguete* se ilustra en la Fig. (6.12), donde se muestra un pequeño resorte uniendo dos segmentos de cuerda ideal.

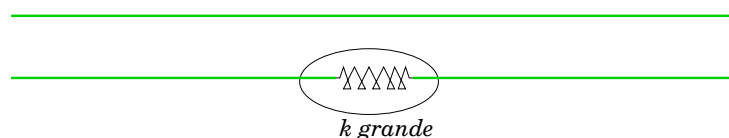


Figura 6.12: Una cuerda modelada como dos cuerdas ideales unidas mediante un resorte diminuto de constante elástica muy alta.

Consideremos ahora dos cuerpos de igual masa unidos mediante una cuerda como

la descrita. Inicialmente uno de los cuerpos es dejado en reposo, mientras que al otro se le imprime una velocidad (u), alejándose radialmente de la que está detenida [ver Fig. (6.13)]. Supongamos que la cuerda tiene una longitud L . Entonces va a haber un instante en que la cuerda se tense completamente. ¿Cuales son las velocidades después del tirón?

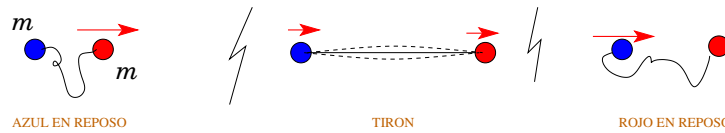


Figura 6.13: Dos bolitas unidas por una cuerda. Si el tirón es elástico, la bolita en movimiento se detiene y la que estaba detenida entra en movimiento.

En este caso imponemos conservación de energía cinética y momentum total (la cuerda representa una fuerza interna del sistema). Puesto que el sistema de ecuaciones es idéntico al que se obtuvo para colisiones frontales en la Sección 6.1, las soluciones resultantes son las mismas. En particular, en el ejemplo descrito luego del tirón se intercambian las velocidades: (Reposo, Movimiento) $\rightarrow$ (Movimiento, Reposo).

Desde el instante en que la cuerda deja de estar tensa transcurrirá un lapso $\Delta t = L/u$ hasta los cuerpos se encuentren nuevamente, produciéndose un choque por contacto. Nuevamente se produce intercambio de velocidades. Así, cada uno de los cuerpos experimentará estados alternados de reposo y movimiento. Los lapsos duran L/u . Una representación gráfica de los movimientos descritos se ilustra en la Fig. (6.14).

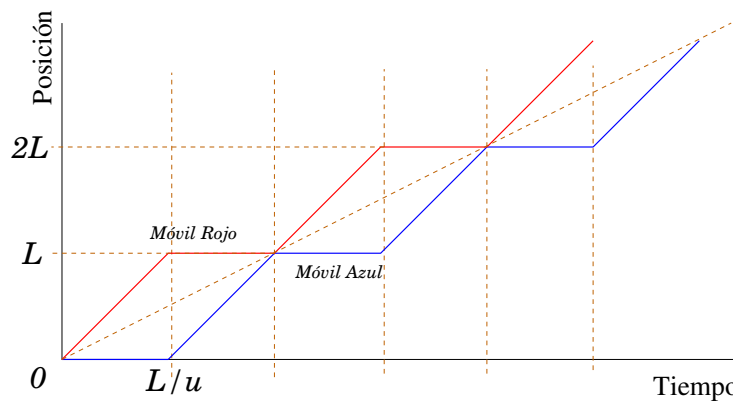


Figura 6.14: Representación gráfica del movimiento alternado de dos bolitas unidas por una cuerda, donde tanto los choques como los tirones son elásticos.

6.3. Impulso

En los ejemplos de colisiones y tirones vistos anteriormente observamos que cada uno de los cuerpos interactuantes experimenta un cambio de momentum. Estos cambios se deben a la fuerza de interacción entre los cuerpos, las cuales tienen muy corta duración. Se trata entonces de fuerzas dependiente del tiempo. Si bien no contamos con una descripción detallada de estas fuerzas, veremos que hay propiedades globales que ellas deben satisfacer, las cuales resultan totalmente independientes de tales detalles.

Consideremos un cuerpo de masa m sometido a una fuerza $\vec{F}(t)$, dependiente del tiempo. Supongamos además que la fuerza tiene una duración definida, vale decir que la fuerza es nula (o despreciable) fuera de cierto intervalo temporal $[t_a, t_b]$. Por otra parte, la ecuación de Newton para la componente x de la fuerza es

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x(t) \quad \rightarrow \quad \delta p_x = F_x(t) \delta t .$$

Esta relación nos indica que el producto de $F_x(t) \times \delta t$ da cuenta de la variación de momentum δp_x .

En la Fig. (6.15) se ilustra una fuerza $F(t)$ de duración finita. Se define el *impulso* J de la fuerza entre los instantes t_a y t_b como el área bajo la curva F vs t . Entonces, si ese intervalo de tiempo es dividido en N partes, el impulso estará dado por

$$J \equiv \sum_i^N F(t_i) \times \delta t_i .$$

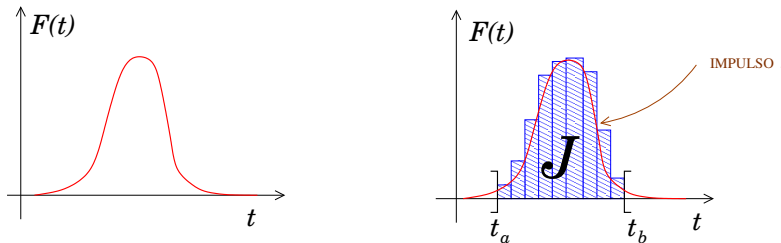


Figura 6.15: Una fuerza de duración finita en función del tiempo. A la derecha, el área de cada lonja $F(t) \times \delta t$ representa la variación del momentum δp entre t y $t + \delta t$. El área total es el *impulso* J , que coincide con la variación total del momentum Δp entre t_a y t_b .

Puesto que $F(t_i) \times \delta t_i$ representa δp_i , entonces $J = \sum_i^N \delta p_i = \Delta p$. En otras palabras, el área bajo la curva F vs t da cuenta del cambio de momentum,

$$J = \Delta p .$$

6.3.0.1. Fuerzas medias

Para efectos de estimaciones es práctico el uso de valores medios. Para ello recurramos a la Segunda Ley de Newton, donde

$$\delta p = F \delta t .$$

Por lo tanto, si contamos con la duración aproximada de un golpe (Δt) la cual da cuenta de un cambio de momentum Δp (J), entonces podemos estimar la *fuerza media* responsable de ese empujón:

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{J}{\Delta t} .$$

Una representación gráfica de esta idea se muestra en la Fig. (6.16), donde se muestra un escalón de altura $\bar{F}$ y anchura Δt .

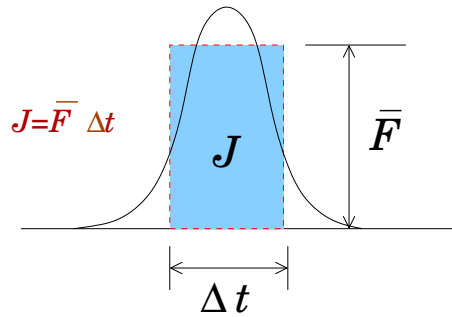


Figura 6.16: El impacto de una fuerza es emulado por un escalón, cuya área J es la misma que la de la curva $F(t)$.

Si queremos que $\bar{F}$ sea mecánicamente equivalente a la fuerza $F(t)$, entonces imponemos que las áreas bajo las curvas sean las mismas. Ello da garantías de que el cambio de momentum sea el mismo.

⇒ *Fuerza media en un rebote*

Consideremos una pelota de golf (cuya masa es de 0,046 kg), la cual se deja caer desde una altura de 1 m, rebotando elásticamente. Queremos estimar la fuerza media del impacto en el piso.

La rapidez v con que llega la pelota al piso es $\sqrt{2gh} \sim 4,5$ m/s. El cambio de momentum es $2mv \sim 0,4$ kg m/s, el cual corresponde al impulso J . Puesto que $J \sim \bar{F}\Delta t$, entonces necesitamos una estimación del Δt .

En primer lugar, es razonable suponer que Δt es a lo sumo D/v , con D el diámetro de la pelota. Si $D \sim 5$ cm, entonces $\Delta t \sim 0,01$ s. Tomando este valor como referencia

(el cual podemos refinar), entonces la fuerza media del impacto, $\bar{F} \sim J/\Delta t = 40$ N. Desde luego que si el tiempo del impacto se reduce a la mitad, la fuerza media aumenta al doble. En cualquier caso, la fuerza sobre el piso resulta bastante grande: $\bar{F}/mg \sim 80$.

6.3.1. Rebotes de objetos duros y blandos

Cuando un objeto da un rebote elástico, el cambio de momentum es $J = 2p$, donde p es el momentum de incidencia. Este resultado es totalmente independiente de la duración del rebote. Puesto que J representa el área bajo la curva de la fuerza en función del tiempo, a una menor duración del impacto mayor será la fuerza máxima. Esta cualidad se ilustra en la Fig. (6.16),

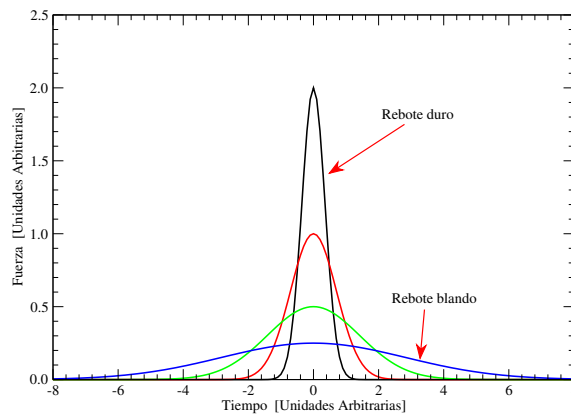


Figura 6.17: Fuerzas en función del tiempo que dan cuenta del mismo impulso (área bajo la curva). Mientras más breve es la fuerza, necesariamente su máximo es más intenso.

donde se representan cuatro curvas que tienen en común el área bajo ellas. Se observa que la curva más aguzada (la de impacto más breve) es más intensa. Esa es la razón porqué evitamos golpes con objetos duros. Una pelota de fútbol es más masiva que una pelota de golf, sin embargo un golpe en la cabeza por una pelota de golf es más peligroso que el de una pelota de fútbol. Detrás de eso está el Δt del golpe, por ende la fuerza máxima asociada.

⇒ *Tirón elástico simétrico de dos cuerpos en reposo.*

Dos bolitas de igual masa m se unen mediante una cuerda ideal de longitud $2L$. Una tercera bolita de masa M se adhiere al centro de la cuerda. Inicialmente las dos bolitas iguales yacen en reposo sobre una superficie horizontal pulida, a una distancia mutua $2D$, mientras que la bolita del centro es eyectada con rapidez u en dirección

perpendicular al trazo que une a las otras dos, desde el punto medio. El tirón de la cuerda es completamente elástico. Determine el lapso entre el primer tirón de la cuerda y el instante en que las dos bolitas chocan por primera vez. Determine el tirón (impulso) experimentado por la cuerda.

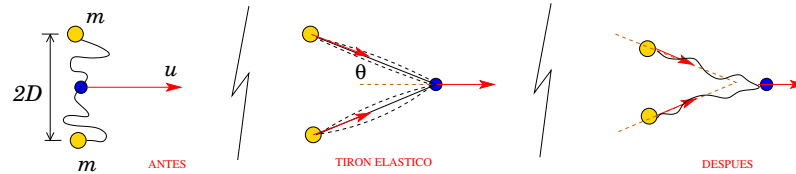
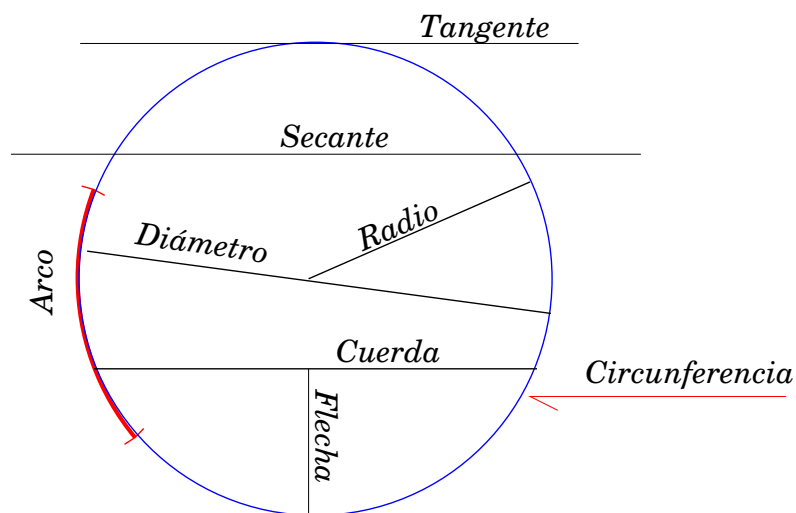


Figura 6.18: Dos bolitas unidas por una cuerda experimentan un tirón elástico debido a una bolita central en movimiento.

Apéndice A

Addenda

A.1. Partes del círculo (terminología)



A.2. Aproximación práctica

Hemos visto que no siempre es necesario un cálculo aritmético preciso. Hay muchas situaciones en las cuales una estimación numérica razonable es suficiente para tomar una decisión objetiva. En esa línea la aproximación

$$(1 + \varepsilon)^p \approx 1 + p\varepsilon ,$$

puede resultar extremadamente útil. Esta es una *receta* que surge de aproximar la función $f(x) = x^p$ cuando $x \approx 1$, asimilándola a una línea recta con pendiente p . Esta apro-

ximación resulta adecuada para cualquier potencia p finita, toda vez que la magnitud de ε sea *considerablemente* menor que la unidad: $|\varepsilon| \ll 1$. Los tres casos siguientes corresponden a $p = 2$, $1/2$, y -1 , respectivamente.

$$(1 + \varepsilon)^2 \approx 1 + 2\varepsilon; \quad \sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon; \quad \frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon.$$

A modo de ejemplo, calculemos en forma aproximada $\sqrt{0,9}$:

$$\sqrt{0,9} = \sqrt{1 - 0,1} = (1 - 0,1)^{1/2} \approx 1 - 0,5 \times 0,1 = 0,95.$$

En el desarrollo anterior tomamos $\varepsilon = 0,1$, claramente menor que 1. A fin de verificar cuan acertada es esta aproximación comparamos con el resultado que obtenemos mediante el uso de una calculadora: $\sqrt{0,9} = 0,9486$. Vemos que el error en este caso es menor que el 0,2%, lo que resulta bastante impresionante.

Podemos complementar la aproximación anterior con las siguientes observaciones: $\pi \approx 22/7$ (válida al 0.04%) y $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ (válida al 2%). A modo de ilustración calculemos $\sqrt{3}$. Observe atentamente la siguiente secuencia y trate de dilucidar la intención de cada paso...

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= \frac{\sqrt{9 \times 3}}{3} = \frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{\sqrt{25 + 2}}{3} = \frac{5(1 + 2/25)^{1/2}}{3} \\ &\approx \frac{5}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2}{25}\right) = \frac{5 \times 52}{3 \times 50} = \frac{26}{15} \approx 1,73. \end{aligned}$$

El resultado por calculadora arroja $\sqrt{3} = 1,73205$, de modo que la aproximación es correcta al 0.1%. Las operaciones mostradas en estos ejemplos se pueden agilizar con la práctica.

A.3. La ecuación cuadrática

Consideremos la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. En ella los parámetros a , b y c se suponen conocidos, de modo que nos interesa obtener las soluciones en x que la satisfacen. Supondremos que $a \neq 0$, lo que permite dividir por a todos los términos. Además sumemos y restemos $(b/2a)^2$ a fin de formar un cuadrado de binomio. Entonces

$$x^2 + 2 \left(\frac{b}{2a} \right) x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Los tres primeros términos conforman el cuadrado de un binomio. Los términos restantes son pasados al lado derecho:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Al tomar raíz cuadrada debemos dar cuenta de dos posibles signos,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

de donde obtenemos dos raíces x_+ y x_- , las que vienen dadas por

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Una exigencia para que la solución sea un número real es que la cantidad subradical $b^2 - 4ac$ sea positiva o nula. Por lo tanto

$$b^2 \geq 4ac.$$

De no cumplirse tal exigencia, las soluciones resultan complejas. Si x representa una cantidad física, entonces la condición $b^2 \geq 4ac$, debe ser examinada a fin de entender las restricciones implícitas en el sistema físico.

A.4. Aproximación cuadrática de una circunferencia

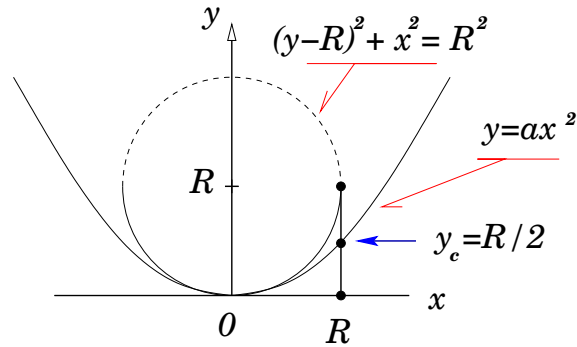
En algunos casos tales como movimiento parabólico, pequeñas oscilaciones y óptica, resulta útil aproximar un pequeño trazo de arco de circunferencia a una parábola, o vice-versa.

Consideremos la circunferencia descrita en la figura centrada en $(0, R)$ y representada por

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

La rama inferior de ésta queda descrita por

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y = R \left(1 - \left[1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right]^{1/2} \right).$$



Para $x \ll R$ podemos aproximar $[1 - (x/R)^2]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}(x/R)^2$, con lo cual obtenemos

$$y \approx \frac{1}{2R} x^2 .$$

Vale decir, la rama inferior de la circunferencia efectivamente se comporta como una parábola.

A.5. Variación de funciones

En innumerables ámbitos nos encontramos leyes de comportamiento de alguna propiedad (una función) en términos de un parámetro que la caracteriza, que llamamos variable. Sólo para ser específico podemos nombrar: El área de un cuadrado en función de la longitud b de sus lados, $A(b) = b^2$; El área de un círculo en función de su radio r , $A(r) = \pi r^2$; Velocidad de un móvil con aceleración constante en función del tiempo t , $v(t) = v_o + at$; Fuerza de un resorte en función de su estiramiento x , $F = -kx$; Fuerza gravitacional entre dos cuerpos en función de su separación r , $F = -GMm/r^2$; Velocidad de una onda de agua en función de la profundidad h del fondo, $v = \sqrt{gh}$; etc.

Todos estos ejemplos se pueden concebir como funciones F de un parámetro x , vale decir, $F = F(x)$. Al variar x , también lo hace $F(x)$. Entonces no planteamos, si x es incrementado en δx , ¿en cuánto cambia $F(x)$?

No pretendemos dar una respuesta general ni detallado a este problema. Nos limitaremos a escudriñar algunos ejemplos sencillos, los más comunes, lo que nos permitirá captar las ideas básicas implícitas en la variación de una función.

Definiremos la *variación* de una función ante un cambio de su argumento en δx por

$$\delta F \equiv F(x + \delta x) - F(x) .$$

Lo interesante es que siempre podremos expresar esta variación de la siguiente forma:

$$\delta F = m \delta x ,$$

donde $m = m(x)$, una función de x que caracteriza las variaciones de F . Geométricamente, $m(x)$ representa la *pendiente* de la tangente de la curva $F(x)$ en x .

Propiedades fundamentales

En relación a las variaciones hay tres propiedades que nos serán de mucha utilidad. Las dos primeras se demuestran trivialmente.

- **Multipliación por escalar:** Si c es una constantes, entonces

$$\delta(c F) = c \delta F .$$

- **Variación de la suma:** Si $F(x) = g(x) + h(x)$, entonces

$$\delta F = \delta g + \delta h .$$

- **Variación del producto:** Si $F(x) = g(x)h(x)$, entonces

$$\delta(gh) = (\delta g) h + g (\delta h) .$$

Para demostrar esta propiedad denotemos el incremento mediante $\delta x \equiv \epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \delta(F) &= g(x + \epsilon)h(x + \epsilon) - g(x)h(x) \\ &= g(x + \epsilon)h(x + \epsilon) - \cancel{g(x)h(x + \epsilon)} + \cancel{g(x)h(x + \epsilon)} - g(x)h(x) \\ &= \underbrace{[g(x + \epsilon) - g(x)]}_{\delta g} h(x + \epsilon) + g(x) \underbrace{[h(x + \epsilon) - h(x)]}_{\delta h} \\ &= (\delta g)h(x + \epsilon) + g(x)(\delta h) \approx (\delta g)h + g(\delta h) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\delta(gh) = (\delta g) h + g (\delta h)$.

Ejemplos sencillos

En los ejemplos que siguen nos daremos $F(x)$ y encontraremos la pendientes $m(x)$ respectiva.

1. Cuando F es constante

Si $F = c$ = constante, entonces $F(x + \delta x) - F(x) = c - c = 0$, por lo que $m(x) = 0$: la pendiente es nula.

2. Cuando F es lineal: $F(x) = x$

En este caso $F(x + \delta x) - F(x) = (x + \delta x) - x = \delta x$, por lo que $m(x) = 1$: la pendiente es constante.

3. Cuando F es cuadrática: $F(x) = x^2$

Para este caso hagamos uso del resultado para la variación de un producto. Aquí hacemos $g(x) = x$, y $h(x) = x$, con lo cual

$$\delta(gh) = \delta(xx) = (\delta x)x + x(\delta x) = 2x\delta x.$$

Por lo tanto $m = 2x$: la pendiente crece linealmente con x .

4. Cuando F es cúbica: $F(x) = x^3$

Hagamos en este caso $g(x) = x$, y $h(x) = x^2$. Claramente $gh = x^3$. Por lo tanto, utilizando el resultado anterior, tenemos

$$\delta(gh) = (\delta x)x^2 + \underbrace{x(\delta x^2)}_{2x\delta x} = (\delta x)x^2 + x(2x\delta x) = 3x^2\delta x.$$

Por lo tanto $m = 3x^2$: la pendiente crece cuadráticamente con x .

5. Cuando F es la inversa: $F(x) = 1/x$

En este caso consideremos $g(x) = x$, y $h(x) = 1/x$, con lo cual $gh = 1$. Usando esta construcción tenemos:

$$\underbrace{\delta(gh)}_0 = (\delta x)\frac{1}{x} + x\delta\left(\frac{1}{x}\right),$$

con lo cual

$$\delta\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

El problema inverso

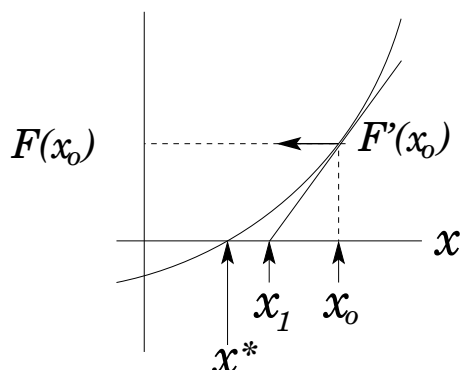
En las aplicaciones anteriores nos dimos la función $F(x)$ y luego encontramos $m(x)$. Dentro del mismo contexto procederemos a la inversa, vale decir, nos damos $m(x)$ y buscamos la función $F(x)$ correspondiente. Veamos los ejemplos más sencillos.

1. Si $m(x) = 0$, entonces $F(x) = C$, con C una constante que depende de datos adicionales del problema.
2. Si $m(x) = 1$, entonces $F(x) = x + C$, con C una constante a determinar.
3. Si $m(x) = x$, entonces $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, con C una constante a determinar.
4. Si $m(x) = -\frac{1}{x^2}$, entonces $F(x) = \frac{1}{x} + C$, con C una constante a determinar.

A.6. Cálculo de raíces por Newton

Newton ideó un algoritmo sumamente ingenioso para resolver numéricamente ecuaciones cuyas soluciones no eran directamente calculables. Por ejemplo todos sabemos que $\sqrt{4} = \pm 2$. Sin embargo, en el caso de $\sqrt{5}$ podemos decir que su valor numérico 2 más algunos decimales. El problema es encontrar los decimales que le siguen al 2. Este problema se puede plantear en forma general de la siguiente forma.

Sea $F(x)$ una función conocida en la variable x y supongamos que la pendiente de la tangente en cualquier punto es también conocida, $F'(x)$, la derivada de F en x . Buscamos una raíz de $F(x)$, vale decir, un valor x^* tal que $F(x^*) = 0$. Para ello nos valemos de la figura de más abajo para $F(x)$ y consideremos un punto inicial x_0 'adecuado' como el que se ilustra.



La tangente a la curva en x_0 es una recta que cruza al eje x en el punto x_1 , encajonado entre x^* y x_0 . Claramente x_1 está m'as cerca de x^* que x_0 .

Por inspección podemos afirmar la siguiente relación geométrica que involucra sólo x_0 y x_1 :

$$\frac{F(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = F'(x_0) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

La lectura de este resultado es la siguiente: dado un x_0 adecuado, la relación de arriba permite encontrar un x_1 más cercano a x^* . Por lo tanto, una vez obtenido x_1 podemos reasignar $x_1 \rightarrow x_0$ y evaluar nuevamente la relación de arriba. Así nos acercaremos aún más a x^* . El uso repetitivo (iterativo) de la relación de arriba permite entonces aproximarse a x^* tanto como uno desee.

A modo de ejemplo, calculemos $\sqrt{5}$. Para ello construyamos la función $F(x) = x^2 - 5$, cuya raíz sabemos que es $\sqrt{5}$, pero buscamos su representación decimal. Claramente

$F'(x) = 2x$, con lo cual

$$x_1 = x_0 + \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{x_0^2 + 5}{2x_0}$$

Iteremos:

$$\text{Dado } x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = (1 + 5)/2 = 3;$$

$$\text{Redefinimos } x_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = (9 + 5)/6 = 7/3 ;$$

$$\text{Redefinimos } x_0 = 7/3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 47/21.$$

Este resultado ya es correcto al 0.2 %. Más iteraciones permiten refinar más aun el resultado. Por lo tanto,

$$\sqrt{5} \approx \frac{47}{21}.$$

En general, si de alguna manera tenemos una idea aproximada de la solución que buscamos, nos podemos valer de esa información para acercarnos más rápidamente a la raíz.

Para ilustrar este último punto consideremos esta vez $x_0 = 2$, una mejor adivinanza de $\sqrt{5}$. Entonces:

$$\text{Dado } x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 9/4;$$

$$\text{Redefinimos } x_0 = 9/4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = (161 \times 2)/(16 \times 9) = 161/72.$$

Obtenemos en este caso

$$\sqrt{5} \approx \frac{161}{72}.$$

Pudieramos dejar este resultado hasta aquí (correcto al 0,002 %). Sin embargo notemos que $161/16 \approx 10$, por lo que $20/9$ pareciera ser una buena raíz de 5. En efecto, $(20/9)/\sqrt{5} = 0,994$, lo que implica una imprecisión de sólo un 0,6 %. Bastante razonable considerando el poco cálculo.

A.7. Identidades trigonométricas

1. Identidades trigonométricas útiles

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\operatorname{sen}(\theta/2) = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$\cos(\theta/2) = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$$

$$\tan(\theta/2) = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$