



FI1002 - SISTEMAS NEWTONIANOS

Apuntes del curso

Elaborado por: Hugo Arellano, René Garreaud,
Diego Mardones, Nicolás Mujica, Alvaro Núñez, Rodrigo Soto

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

1 de agosto de 2017

Índice general

Unidad 1: Métodos experimentales	1
1.1. Introducción	1
1.2. Cantidades físicas relevantes y su medición	1
1.3. Tratamiento estadístico básico de datos	3
1.4. Errores de medición	5
1.5. Tratamiento de errores	6
1.5.1. Promedio de valores	7
1.6. Cifras significativas	8
1.7. Estadística con <code>Matlab</code>	9
1.8. Preguntas conceptuales	11
1.9. Ejercicios	12
Unidad 2: Métodos numéricos	15
2.1. Introducción	15
2.2. Cálculos complejos	15
2.2.1. Ejemplo	15
2.2.2. Análisis gráfico	16
2.2.3. Uso de <code>fzero</code> en <code>Matlab</code>	17
2.2.4. Intersección con valores discretos	18
2.3. Análisis de las leyes de Newton	19
2.3.1. Discretización temporal	19
2.3.2. Derivadas discretas	20
2.3.3. Solución de la ecuación de Newton: método de Verlet	24
2.4. Preguntas conceptuales	26
2.5. Ejercicios	27

Unidad 3: Sistemas extendidos	33
3.1. Introducción	33
3.2. Masa y centro de masas	35
3.2.1. Energía potencial gravitacional de un cuerpo.	36
3.2.2. Centro de masas de centros de masas	37
3.2.3. Problema resuelto: El centro de masas de un triángulo:	38
3.3. Momentum de un sistema extendido	40
3.3.1. La segunda ley de Newton para un sistema extendido	40
3.4. Energía cinética por rotación en torno a ejes fijos	42
3.5. Ejemplo: sistema de dos partículas	44
3.6. Área del círculo y volumen de una esfera con MATLAB	45
3.7. Preguntas conceptuales	46
3.8. Ejercicios	47
Unidad 4A: Sólidos rígidos–Estática	49
4A.1. Introducción	49
4A.2. Torque de una fuerza	50
4A.2.1. Producto cruz y torques	51
4A.2.2. El torque de una fuerza	52
4A.2.3. El torque debido a la gravedad terrestre	52
4A.3. Las leyes de la estática	53
4A.4. Ejemplo.	54
4A.5. Preguntas conceptuales	57
4A.6. Ejercicios	58
Unidad 4B: Sólidos rígidos–Energía cinética de rotación	63
4B.1. Conservación de la energía para una partícula	63
4B.2. Conservación de la energía para un cuerpo rígido	64
4B.2.1. Energía cinética de rotación	65
4B.2.2. Energía potencial gravitatoria	65
4B.3. El momento de inercia	66
4B.3.1. El centro de masa de un cuerpo rígido	67
4B.3.2. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos	68
4B.4. Energía de rotación de una barra en torno a un eje fijo.	70

4B.5. Teorema de los ejes perpendiculares	71
4B.6. Preguntas conceptuales	74
4B.7. Ejercicios	75
Unidad 4C: Sólidos rígidos–Torque y momento angular	77
4C.1. Torque y momento angular para una partícula	77
4C.1.1. Ejemplo	77
4C.2. Momento angular de un sólido rígido	79
4C.3. Ecuación de torque para un sólido rígido	81
4C.4. Torque sobre un sólido rígido	81
4C.5. Resumen	83
4C.6. Ejemplos	83
4C.6.1. Movimiento del péndulo físico	83
4C.6.2. Polea con masa	84
4C.7. Comentarios adicionales	86
4C.7.1. Movimiento en el plano	87
4C.8. Preguntas conceptuales	88
4C.9. Ejercicios	89
Unidad 4D: Sólidos rígidos–Rodadura	93
4D.1. Introducción	93
4D.1.1. Rotaciones en torno a eje fijo	94
4D.1.2. Rueda sobre plano inclinado	94
4D.1.3. Consideraciones geométricas	96
4D.1.4. Energía en rodadura perfecta	97
4D.1.5. Comentarios sobre la relación $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$	99
4D.1.6. Apéndice	100
4D.2. Preguntas conceptuales	102
4D.3. Ejercicios	103
Unidad 5A: Oscilaciones–Introducción	107
5A.1. Introducción: movimiento circular uniforme	107
5A.2. Movimiento armónico simple	108
5A.2.1. Resorte ideal	110

5A.3. Péndulo simple	111
5A.3.1. Péndulo físico	112
5A.4. Problemas resueltos:	113
5A.4.1. Problema: Hamster en apuros	113
5A.4.2. Esferita oscilando al interior de un cilindro hueco:	114
5A.5. Preguntas conceptuales	117
5A.6. Ejercicios	118
Unidad 5B: Oscilaciones amortiguadas	121
5B.1. Fuerzas de roce viscoso	121
5B.2. El frenado de una esfera (sin gravedad)	122
5B.3. Caída vertical con roce	123
5B.4. Oscilaciones amortiguadas	124
5B.5. La fuerza de Stokes	126
5B.6. La fuerza de arrastre de Rayleigh	126
5B.7. Péndulo formado por un globo	127
5B.8. Ejemplo	128
5B.8.1. Problema: tiempo de subida y bajada	128
5B.8.2. Solución	128
5B.9. Preguntas Conceptuales	129
5B.10. Ejercicios	130
Unidad 5C: Oscilaciones forzadas	133
5C.1. Introducción	133
5C.2. Ejemplos genéricos	133
5C.3. Ecuación y solución analítica	135
5C.4. Explicación de la resonancia	137
5C.5. Solución numérica	138
5C.6. Un forzamiento un poco más realista	139
5C.7. Sobre la solución de la ecuación de un oscilador forzado	140
5C.8. Problema resuelto	141
5C.8.1. Solución	142
5C.9. Preguntas conceptuales	144
5C.10. Ejercicios	145

Unidad 6A: Ondas propagativas	147
6A.1. Introducción a las ondas	147
6A.1.1. Fenomenología básica	147
6A.2. Descripción matemática de las ondas	148
6A.2.1. Ondas de torsión en un arreglo de varillas	148
6A.2.2. La cuerda	150
6A.3. Análisis de la ecuación: Solución de D' Alembert	153
6A.4. Problema resuelto	154
6A.4.1. Problema	154
6A.4.2. Solución	154
6A.5. Preguntas conceptuales	156
6A.6. Ejercicios	157
Unidad 6B: Ondas estacionarias	159
6B.1. Introducción	159
6B.2. Ondas armónicas	159
6B.3. Ondas en una cuerda semi-finita	161
6B.3.1. Extremo fijo	161
6B.3.2. Extremo móvil	162
6B.4. Ondas estacionarias	163
6B.5. Modos normales en una cuerda finita	164
6B.5.1. Ambos extremos fijos	164
6B.5.2. Un extremo fijo y el otro libre	166
6B.5.3. Ambos extremos libres	166
6B.6. Preguntas conceptuales	167
6B.7. Ejercicios	168
Unidad 7A: Hidrostática–Presión colisional	171
7A.1. Introducción	171
7A.2. Colisiones elementales	172
7A.2.1. La presión colisional	174
7A.3. Fuerza al desviar un chorro de partículas	174
7A.4. Rebotes en una placa inclinada	175
7A.5. Preguntas conceptuales	177

7A.6.Ejercicios	178
Unidad 7B: Hidrostática–Principio de Arquímedes	181
7B.1. Introducción	181
7B.2. Presión	182
7B.3. Dependencia de P con la profundidad de un fluido	183
7B.4. Ley de Pascal	183
7B.5. Principio de Arquímedes	184
7B.6. Preguntas conceptuales	186

Unidad 1: Métodos experimentales

1.1. Introducción

La física es una ciencia natural, y por ende el rol de la experimentación es clave. Toda ciencia natural se basa en el método científico, el cual puede resumirse brevemente en tres pasos:

1. Se realizan observaciones de un fenómeno natural.
2. Mediante un proceso de razonamiento se postulan hipótesis que explican los fenómenos observados. Con estas hipótesis es posible predecir otros fenómenos.
3. Se realizan experimentos para verificar las predicciones. En el caso de que estas no se verifiquen, los nuevos resultados experimentales sirven de observación (se vuelve al paso 1) para poder plantear nuevas hipótesis.

El proceso de medida es también esencial en la ingeniería, pues en muchas aplicaciones o procesos es necesario controlar o supervisar un grupo de cantidades físicas, ya sean mecánicas, térmicas o eléctricas.

En esta unidad se presentarán métodos experimentales básicos, en particular la medición de cantidades físicas como fuerza, posición, velocidad y aceleración. Se presentarán los conceptos básicos de un análisis estadístico y se discutirán los tipos genéricos de errores de medición. Se introducen luego algunas instrucciones de `Matlab` que le permitirán realizar un análisis estadístico básico de un conjunto de medidas.

1.2. Cantidades físicas relevantes y su medición

En este curso nos concentraremos en medir las siguientes cantidades físicas: fuerza, posición, masa y tiempo. Estas son las cantidades físicas básicas de la dinámica newtoniana de una partícula (lo visto en el curso *Introducción a la Física Newtoniana*). Sin embargo, veremos que ahora podremos aplicar conceptos de mecánica newtoniana a sistemas más complejos que una o dos partículas puntuales, como son los sólidos rígidos, las ondas mecánicas y los fluidos. Además, con las medidas de posición y tiempo obtendremos medidas de velocidad y aceleración.

Instrumentos simples para medir posición y tiempo son una regla y un cronómetro. Pero si el movimiento es muy rápido, estos elementos en general no son suficientemente precisos. En este curso usare-



Figura 1.1: Sensor de fuerza marca Vernier, modelo *Dual-Range sensor*. La fuerza puede ser aplicada en ambos sentidos en la dirección del eje que se muestra en la foto.

mos una cámara web, a partir de la cual obtendremos una secuencia de imágenes, ya sea un video o un conjunto de fotos. Las imágenes deberán ser calibradas, por ejemplo tomando una foto de una regla y obteniendo una conversión entre pixeles y metros. Además, el tiempo transcurrido entre dos cuadros del video debe ser determinado, por ejemplo grabando un cronómetro y determinando cuántos cuadros se graban durante un segundo. Con esta cámara se medirá entonces la distancia recorrida por un objeto entre dos cuadros consecutivos, con lo cual se puede definir una velocidad. En otras aplicaciones se medirá el ángulo subtendido por un objeto entre dos cuadros consecutivos, obteniéndose una medida de velocidad angular.

Mediremos fuerzas estáticas y dinámicas, es decir fuerzas constantes o que varíen en el tiempo, respectivamente. Una manera simple de medir fuerzas es usando masas conocidas. Por ejemplo, si se quiere aplicar tensión a una cuerda, podemos colocar un cuerpo de masa m colgando de un extremo de la cuerda. Si el sistema es estático, entonces las leyes de Newton nos dicen que la tensión, una fuerza, es igual a mg , suponiendo que se desprecie la masa de la cuerda. También se puede usar un dinamómetro, el cual mediante una escala y una aguja muestra la medida de fuerza tal como una balanza casera.

En este curso aplicaremos otra manera de medir una fuerza, la cual se basa en el uso de un sensor de fuerza como el mostrado en la figura 1.1. El tipo de sensor que usaremos, llamado *strain gauge* en inglés, consta de una pequeña y delgada lámina metálica la cual se deforma al aplicar una fuerza. Su deformación consiste básicamente en un cambio de espesor de la película, lo que induce un cambio de su resistencia eléctrica. El sensor entrega entonces un voltaje proporcional al cambio de resistencia, el que a su vez es proporcional a su espesor. Suponiendo un comportamiento elástico lineal, el cambio de espesor es a su vez proporcional a la fuerza aplicada (ley de Hooke). Entonces, el voltaje medido es proporcional a la fuerza aplicada.

El sensor tiene dos rangos de medición, ± 10 N y ± 50 N, a escoger según la aplicación. La salida de voltaje del sensor varía en el rango 0 a 5 V (en estas expresiones V corresponde a la unidad de Volt). La

relación entre fuerza y voltaje, es decir la calibración, es la siguiente:

$$F = -AU + B, \quad (1.1)$$

donde F es la fuerza y U el voltaje medido. En el rango ± 10 N del sensor, se tiene los siguientes parámetros nominales de calibración: $A = 4,90$ N/V y $B = 12,25$ N. En el rango ± 50 N, se tiene $A = 24,50$ N/V y $B = 61,25$ N. En ambas situaciones, si $F = 0$, entonces el voltaje medido será $U = 2,5$ V. El sensor tiene una sensibilidad de $0,01$ N y $0,05$ N en los rangos ± 10 N y ± 50 N, respectivamente. Se debe poner atención al hecho que el sensor es suficientemente sensible como para detectar el peso del gancho que usa. Para una configuración dada (horizontal o vertical), se puede imponer $F = 0$ para el voltaje medido que puede ser ligeramente diferente a $2,5$ V. En todo caso, cada sensor tiene constantes de calibración ligeramente diferentes a las nominales. Estrictamente uno debería calibrar independientemente cada uno de ellos.

Pregunta 1: A partir de un conjunto de imágenes consecutivas, ¿cómo determinaría usted la aceleración de un objeto? ¿Cuántas imágenes consecutivas necesitaría, al menos?

1.3. Tratamiento estadístico básico de datos

Al medir varias veces una cantidad bajo condiciones controladas, se obtiene un conjunto de valores que no son necesariamente iguales. Las hipotéticas condiciones controladas a las cuales hacemos referencia implicarían que, en una situación ideal, dado que controlaríamos todos los aspectos o parámetros de un sistema, las medidas de una cantidad debiesen entregar siempre el mismo valor. Esto no ocurre en una situación real debido a errores en el proceso de medición. Estos errores tienen diversos orígenes y los detallaremos más adelante.

Supongamos que realizamos un conjunto de medidas en forma controlada, bajo las mismas condiciones experimentales. Estas condiciones se refieren al tipo de instrumento, el tipo de escala usado con ese instrumento, que determina en general su precisión, como también a las condiciones de ambiente o del sistema como temperatura, humedad, luminosidad, por nombrar algunas. En general las condiciones del tipo de instrumento y su uso sí son determinantes en el grado de reproducibilidad de las medidas, pero algunas de las condiciones de ambiente mencionadas (u otras) puede que no tengan un efecto significativo.

Tenemos entonces N mediciones de una cantidad física x , obtenidas bajo las mismas condiciones experimentales. Supondremos que estas medidas, que no son iguales, se distribuyen en torno a un valor. Los valores medidos siguen una distribución de probabilidad, o de ocurrencia. Dos ejemplos de estas distribuciones de ocurrencia se presentan en la figura 1.2, con $N = 100$ y $N = 10000$ medidas de una cantidad x . El eje horizontal muestra los valores obtenidos y el eje vertical muestra la ocurrencia de estos valores, es decir cuántas veces, dentro del número total de mediciones N , se encuentran valores en un rango particular de x .

Usualmente, cuando N es un número grande, digamos sobre 30, los valores siguen en buena aproximación una distribución de ocurrencia llamada gaussiana, conocida también como distribución normal.

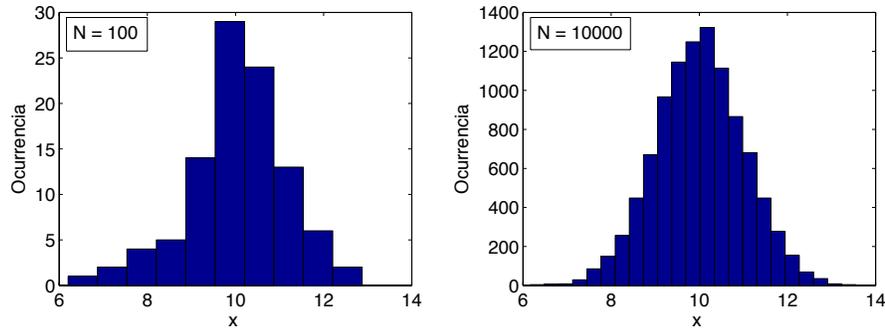


Figura 1.2: Ejemplos de histogramas de una cantidad x , con $N = 100$ y $N = 10000$ medidas respectivamente.

Esta distribución está caracterizada por dos parámetros: el valor promedio $\langle x \rangle$ y el ancho de la distribución 2σ y corresponde a la expresión:

$$f_{Gauss} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.2)$$

Las N mediciones experimentales serán entonces representadas por su valor medio $\langle x \rangle$ y su desviación estándar σ . Es importante notar que el promedio $\langle x \rangle$ es una estimación estadística del valor real de la cantidad x . Mientras más medidas se tomen, es decir, mientras mayor sea la cantidad de datos, mejor será esta estimación.

Si llamamos x_i a los valores medidos de x , con $i = 1, \dots, N$, el valor promedio y la desviación estándar que caracterizan la distribución de estos valores tienen las siguientes definiciones:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (1.3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (1.4)$$

De los datos de la figura 1.2 con $N = 100$ medidas se obtiene $\langle x \rangle = 10,05$ y $\sigma = 1,12$, y con los datos con $N = 10000$, $\langle x \rangle = 10,01$ y $\sigma = 1,00$. Se observa que las diferencias obtenidas no son muy grandes, pero evidentemente mientras más datos o medidas se tenga de una cantidad x , mejor será su estimación. En particular, la distribución es evidentemente más simétrica en torno al valor medio para el caso con $N = 10000$ medidas.

Para terminar daremos una interpretación del parámetro σ . En el caso de una distribución gaussiana de mediciones, aproximadamente el 68% de los datos se encuentra dentro del rango $[\langle x \rangle - \sigma, \langle x \rangle + \sigma]$, es decir dentro del ancho dado por 2σ . También se tiene que aproximadamente 95% de los datos se encuentra en el intervalo $[\langle x \rangle - 2\sigma, \langle x \rangle + 2\sigma]$.

Pregunta 2: Usando los datos presentados en la figura 1.2 con $N = 100$ ¿Cuál es el porcentaje de valores que se encuentran fuera del rango $[\langle x \rangle - 3\sigma, \langle x \rangle + 3\sigma]$?

1.4. Errores de medición

Existen diversas fuentes de error en una medición. Dentro de lo posible estos deben ser minimizados al momento de preparar un sistema en el cual se realizarán mediciones de una cierta magnitud. Existen dos tipos de errores, los errores sistemáticos y los aleatorios, los cuales detallamos a continuación:

- **Errores sistemáticos:** son aquellos errores asociados a una imperfección en el proceso de medición. Se dice que estos errores están sesgados, pues tienden a aumentar o disminuir el valor de la magnitud medida siempre en un sentido. Un reloj que atrasa, por ejemplo, siempre arrojará intervalos de tiempo mayores de lo que son realmente. Para eliminar o minimizar estos errores se deben detectar adecuadamente, ya sea con un análisis cuidadoso del sistema y del procedimiento utilizado, o simplemente comparando las medidas obtenidas con un método alternativo. La palabra *exactitud* se usa para referirse a una medición con bajo error sistemático.
- **Errores aleatorios:** como dice su nombre estos errores se producen fortuitamente. Para minimizar estos errores conviene realizar un número considerable de mediciones y promediar los resultados (ver siguiente sección). Como los errores aleatorios van en ambas direcciones con la misma probabilidad, al promediar los datos, estas contribuciones aleatorias se promedian a cero. La palabra *precisión* se usa para referirse a una medición con bajo error aleatorio.

Un ejemplo de error sistemático es la medición de una longitud utilizando una regla plástica que ha sido deformada, por ejemplo estirada en una dirección. Entonces, al medir una longitud con esta regla, se obtendrá un valor sistemáticamente menor al valor real. Otro ejemplo es la medición del ángulo de un plano inclinado. Supongamos que este plano está puesto sobre una mesa, con un cierto ángulo α respecto al plano de la mesa. Ya sea mediante el uso de un transportador o de una imagen obtenida con una cámara se puede determinar el ángulo α . Pero si se trata de usar este ángulo para comprobar alguna predicción realizada con el plano inclinado, es muy probable que encontremos un error. La razón de esto es que el ángulo a utilizar en nuestro cálculo es el ángulo con respecto a la horizontal que es perpendicular a la dirección de gravedad. Si la mesa no se encuentra bien nivelada con respecto a esta horizontal, es decir hay un ángulo $\beta \neq 0$ entre la horizontal y el plano de la mesa, entonces nuestra medida presentará un error sistemático. La forma de eliminar este error es simplemente nivelando bien la mesa (tratando de obtener $\beta = 0$), o bien, en lugar de usar el plano de la mesa como referencia se puede usar una plomada, la cual definirá la dirección vertical de la gravedad.

Los errores aleatorios se pueden presentar por un problema de medición, como por la precisión de un instrumento, o bien porque la cantidad misma a medir tiene una variación intrínseca. Por ejemplo, si se quiere medir una barra metálica de longitud $L = 12,46$ cm con una regla común, lo más probable es que ciertas veces midamos 12,4 cm, otras veces 12,5 cm, y tal vez interpolando la graduación milimétrica de la regla, algunas veces 12,45 cm. Si hacemos un gran número de medidas, lo más probable es que al promediarlas obtengamos 12,45 cm, lo que es una muy buena estimación del valor real. Otro ejemplo

es la determinación de la estatura de los niños de un curso de primero básico. La altura de estos varía intrínsecamente, no por un problema de medición sino porque simplemente es imposible que todos midan lo mismo. Una representación estadística nos dirá cuál es el valor medio, supongamos 1,14 m, con una desviación estándar de 0,12 m. Pero si tomamos un solo niño para medir su estatura, este valor no será una buena estimación.

1.5. Tratamiento de errores

También se puede representar los errores según la siguiente clasificación:

- **Error absoluto:** se asocia como error absoluto de una medida el valor de la desviación estándar σ . La cantidad C queda representada entonces por

$$C = \langle C \rangle \pm \Delta C, \quad (1.5)$$

con $\Delta C = \sigma$. Esto quiere decir que C toma valores típicamente (un 68 % de las veces) entre $\langle C \rangle - \Delta C$ y $\langle C \rangle + \Delta C$.

- **Error relativo:** corresponde al cociente entre el error absoluto y el valor medio, de la forma

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta C}{\langle C \rangle}. \quad (1.6)$$

Por ejemplo, un error relativo de 0,05 significa que $\langle C \rangle$, que es una representación estadística de la cantidad C , es una buena estimación dentro del 5 % de error.

Es necesario enfatizar que la expresión \pm no significa que haya que sumar ni restar nada, es solamente un *símbolo* para denotar que el 68 % de las mediciones se encuentra en un cierto intervalo.

Si se poseen dos cantidades representadas por $a = \langle a \rangle \pm \Delta a$ y $b = \langle b \rangle \pm \Delta b$, usualmente nos encontramos en situaciones donde queremos realizar operaciones aritméticas con estas cantidades. El resultado final debe tener un error asociado también. El método para determinar el resultado final se llama propagación de errores, y se debe usar el siguiente conjunto de expresiones, dependiendo de la operación (estas expresiones se justifican posteriormente en cursos de estadística o probabilidades):

- **Suma:** $c = a + b$

$$c = \langle c \rangle \pm \Delta c = (\langle a \rangle + \langle b \rangle) \pm \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}, \quad (1.7)$$

- **Resta:** $c = a - b$

$$c = \langle c \rangle \pm \Delta c = (\langle a \rangle - \langle b \rangle) \pm \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}, \quad (1.8)$$

- **Multiplicación:** $c = ab$

$$c = \langle c \rangle \pm \Delta c = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \pm (\langle a \rangle \langle b \rangle) \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\langle a \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\langle b \rangle}\right)^2}, \quad (1.9)$$

- **División:** $c = a/b$

$$c = \langle c \rangle \pm \Delta c = \frac{\langle a \rangle}{\langle b \rangle} \pm \frac{\langle a \rangle}{\langle b \rangle} \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\langle a \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\langle b \rangle}\right)^2}, \quad (1.10)$$

- **Multipliación por escalar:** $c = \lambda a$ (con λ sin error)

$$c = \langle c \rangle \pm \Delta c = \lambda \langle a \rangle \pm \lambda \Delta a. \quad (1.11)$$

Se debe notar que al sumar o restar valores, el error absoluto siempre aumenta. Por ejemplo: $(2,0 \pm 0,3) - (1,9 \pm 0,4) = 0,1 \pm 0,5$.

Tarea: Explique por qué este resultado es razonable. Para esto, puede dibujar las distribuciones gaussianas correspondientes y analizar los casos posibles.

En otras situaciones se tiene que aplicar una función $f(x)$ a una cantidad representada por $a = \langle a \rangle \pm \Delta a$. Para ello se puede recurrir al desarrollo siguiente:

- **Función $f(x)$:**

$$f(a) = f(\langle a \rangle \pm \Delta a) = f(\langle a \rangle) \pm \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=\langle a \rangle} \Delta a, \quad (1.12)$$

Esta última fórmula corresponde simplemente a la expansión en serie de Taylor de la función $f(x)$ aplicado en $a = \langle a \rangle \pm \Delta a$, suponiendo evidentemente que Δa es un número pequeño, pues se guardan sólo los dos primeros términos de la serie.

Pregunta 3: Suponga que intenta medir una fuerza con el sensor de fuerza, obteniéndose un voltaje $U = 0,55 \pm 0,04$ V. Considere las constantes de calibración del sensor con sus respectivos errores asociados, $A = -4,9 \pm 0,1$ N/V y $B = 12,25 \pm 0,05$ N en la ecuación 1.1. Obtenga la fuerza con su error asociado. ¿Cuáles son las expresiones de propagación de errores que debe utilizar?

1.5.1. Promedio de valores

Considere que se tienen dos medidas de una misma cantidad, cada una con su propio error (por ejemplo, hechas por dos grupos diferentes): $a_1 = \langle a_1 \rangle \pm \Delta a_1$ y $a_2 = \langle a_2 \rangle \pm \Delta a_2$. Es usual escuchar que conviene promediar estos resultados para obtener una mejor estimación de esta cantidad; veamos que es efectivamente así.

El promedio se calcula aplicando propagación de errores:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad (1.13)$$

$$= \frac{(\langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle) \pm \sqrt{\Delta a_1^2 + \Delta a_2^2}}{2}, \quad (1.14)$$

$$= \frac{\langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta a_1^2 + \Delta a_2^2}. \quad (1.15)$$

Se puede probar que el error del promedio, $\Delta \bar{a} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta a_1^2 + \Delta a_2^2}$, es menor que Δa_1 y Δa_2 (queda de tarea), pero es más fácil de ver en el caso en que ambas mediciones tienen igual error, $\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a$. En este caso, el error del promedio es

$$\Delta \bar{a} = \frac{\Delta a}{\sqrt{2}}, \quad (1.16)$$

el cual es efectivamente menor, aumentando la precisión del resultado.

Tarea: Muestre que si se hacen N medidas, todas con igual error Δa , el error del promedio es

$$\Delta \bar{a} = \frac{\Delta a}{\sqrt{N}}. \quad (1.17)$$

1.6. Cifras significativas

Como ya hemos visto, la medida de una cantidad física entrega un valor con un cierto grado de error. El hecho de tomar un conjunto de medidas nos permite definir el valor medio y su error absoluto como una buena representación de la cantidad física que se está midiendo. Un concepto asociado es el de las *cifras significativas* de este resultado, el cual depende del error.

Antes de definir lo que son las cifras significativas de una cantidad, daremos un ejemplo de su uso. Cuando se habla de la población de un país, o una ciudad, generalmente la precisión no es muy buena. Se habla entonces que “en Chile hay aproximadamente 15 millones de personas”, es decir 15×10^6 habitantes. Nunca se dice “en Chile hay 15.123.876 habitantes”. La primera frase incluye una cantidad con dos cifras significativas, la segunda, con ocho. ¿Cuál es correcta? ¿Cuál es la precisión? Probablemente la respuesta correcta no es ninguna de las dos, pero se acerca bastante más a la primera.

Definiremos las cifras significativas de una cantidad como el número total de cifras que tiene el número respecto a la posición de la cifra “importante” que tiene su error, lo que equivale de cierta manera a su precisión. Esto quedará más claro dando algunos ejemplos. Supongamos que se mide una longitud con una regla y se concluye que el valor es de $14,4 \pm 0,1$ cm. La cifra importante del error es el “1”, o sea los ceros no cuentan. En este caso el número 14,4 tiene tres cifras significativas. Si por algún motivo, la medida hubiese dado $14,4 \pm 1$ cm, entonces lo correcto es decir que tiene dos cifras significativas y se deja el resultado como 14 ± 1 cm. Si en vez de 14,4 es 14,5, entonces el resultado ese número se aproxima a 15, siendo el resultado final 15 ± 1 cm.

Un error clásico, que lamentablemente se “acarrea” hasta muy adelante en las carreras científicas y de ingeniería, es que al presentar un resultado, por el ejemplo el promedio y la desviación estándar de una cantidad, un estudiante suele entregar $C = 12,23453 \pm 0,01236$. ¿Se tiene la precisión para entregar todas esas cifras? ¿Cuáles son las cifras significativas de este número? Lo cierto es que no se puede presentar un resultado así. Lo correcto es darse cuenta que la cifra importante del error es el “1” en la centésima, por lo tanto la forma correcta de expresar el resultado es $C = 12,24 \pm 0,01$, y el resultado tiene cuatro cifras significativas.

Cuando se realizan operaciones aritméticas con varias cantidades físicas, entonces las cifras significativas estarán dadas por el error final, dadas por las fórmulas de la sección precedente. Por ejemplo, al multiplicar $14,4 \pm 0,1$ por $5,3 \pm 0,1$, para calcular un área por ejemplo, se obtiene $76,32 \dots \pm 1,53 \dots$, donde los “...” representan más dígitos. Lo correcto en este caso es dejar el resultado como 76 ± 2 , siendo $76,3 \pm 1,5$ también aceptable.

Nota: el concepto de cifra significativa no está realmente bien definido, puesto que este número depende de la elección de la base del sistema de numeración, que es arbitrario. No obstante es de suma utilidad práctica, ya que es fácil determinar, como en el ejemplo anterior, si una cierta cantidad de decimales es excesiva en relación a la precisión de un experimento.

Pregunta 4: Indique el número de cifras significativas y escriba la forma correcta de presentar las siguientes cantidades: $a = 23,34 \pm 0,19$; $b = 234,56 \pm 12,21$; $a + b$; $a - b$; ab ; a/b ; ab^2 ; \sqrt{a} ; \sqrt{b} .

1.7. Estadística con Matlab

Supongamos que se realiza una serie de mediciones y que usted tiene un archivo de texto donde estas mediciones están ordenadas en una columna de datos. Para practicar usted puede usar un archivo llamado *datos.txt* que está disponible en la sección de material docente de U-Cursos. Por supuesto que después podrá usar estos comandos de Matlab para los datos que usted obtenga en clases. Para leer el archivo usted debe estar en el directorio donde se encuentra el archivo (cambiando el *Current Directory*). Luego, se hace

```
>> d = load('datos.txt');
```

Esta instrucción crea una variable llamada d , que tiene una estructura de vector de dimensiones 100×1 . Una advertencia, para que Matlab lea bien los datos estos deben tener como separador decimal un punto y no una coma (datos del tipo 3.45 los entiende como un sólo número pero 3,45 no, de hecho los entiende como dos datos diferentes). A veces el sistema operativo está configurado para grabar los números con comas, lo cual puede provocar errores en Matlab. Esto se corrige cambiando la opción en *Configuración regional* del sistema operativo. Si un archivo ya contiene los datos usando la coma como separador decimal, entonces puede abrir el archivo con un editor de texto y usar la opción de *Reemplazar* para cambiar todas las comas por puntos.

A continuación usted puede calcular el valor medio y la desviación estándar de este conjunto de datos usando las instrucciones

```
>> p = mean(d);  
>> s = std(d);
```

Un histograma puede ser creado usando la siguiente instrucción

```
>> hist(d);
```

Esto creará una figura con el histograma obtenido con 10 intervalos. Si se quiere cambiar el número de intervalos a 25, se debe digitar:

```
>> hist(d, 25);
```

Supongamos ahora que se quiere encontrar el porcentaje de datos que se encuentran dentro de un intervalo:

```
>> K = find(d >= (p-s) & d <= (p+s));  
>> porcentaje = length(K) / length(d)
```

La primera línea crea una variable K que tiene como valores los índices (posiciones) del vector de datos d que cumplen con la condición de estar en el rango $[p - s, p + s]$. El segundo comando calcula la fracción de datos que se encuentran en este rango.

Otros datos que pueden ser útiles son el máximo y mínimo de un conjunto de números. Estos se obtienen con

```
>> max(d)  
>> min(d)
```

Pregunta 5: Usando los datos del archivo *datos.txt*, ¿cuál es el porcentaje de mediciones fuera del intervalo $[\langle C \rangle - 3\sigma, \langle C \rangle + 3\sigma]$? ¿Coincide bien esta medición con el resultado que obtuvo para la pregunta 2?

1.8. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: Enumere y justifique las cantidades físicas básicas a considerar en la dinámica newtoniana.

Pregunta 2: Describa las diferencias entre los errores de medición sistemáticos y los aleatorios.

Pregunta 3: Explique cómo se puede medir velocidad y aceleración de un cuerpo usando una regla y una cámara web. Suponga que usted conoce el tiempo δt entre fotos sucesivas.

Pregunta 4: Dé un ejemplo de un error sistemático y uno de un error aleatorio y diga cómo pueden minimizarse estos errores.

Pregunta 5: Explique cómo usando una regla y un resorte de rigidez y largo natural conocidos se puede medir una fuerza.

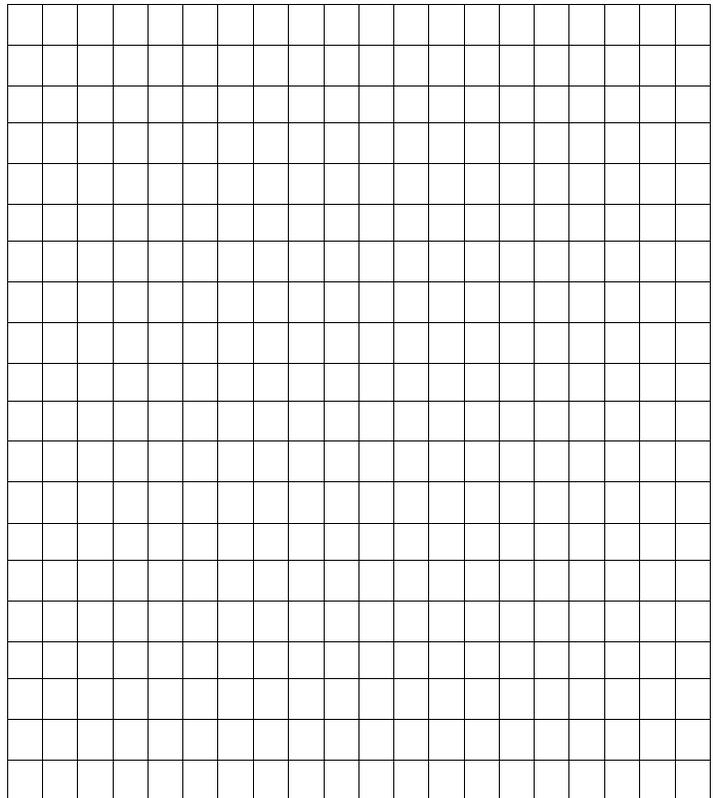
1.9. Ejercicios

Ejercicio 1: Este ejercicio consta de tres partes.

- P1. Un péndulo simple se usa para medir la aceleración de gravedad, usando la expresión para el período de oscilación T de un péndulo de longitud L , $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. El período medido es $T = 1,51 \pm 0,03$ s y su longitud, $L = 56,7 \pm 0,2$ cm. ¿Cuál es el valor resultante de g , su error absoluto y relativo?
- P2. Se da un valor como $35,562 \pm 0,2$. Reescríbalo con el número adecuado de cifras significativas. Si el valor se diera como $35,562 \pm 0,7\%$ ¿Cómo debiera escribirse?
- P3. Se realiza una serie de medidas de temperatura T con un termopar a través de una medida de voltaje, que denotaremos U . Se usa además un segundo sensor de temperatura que entrega una medida directa en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$). La conversión entre U y T para el termopar está dada por una ecuación a determinar.

El cuadro 1 tabula estas medidas. A partir de estos datos grafique la curva temperatura versus voltaje en el rectángulo cuadrículado que se encuentra en el reverso de esta hoja. Sugiera y justifique la ecuación que describe la conversión entre estas dos cantidades.

Medida N°	U (Volts)	T ($^{\circ}\text{C}$)
1	0,18	-77,7
2	1,22	-66,3
3	1,88	-57,4
4	2,83	-45,2
5	4,19	-24,3
6	4,87	-12,9
7	6,07	10,5
8	7,23	34,7
9	8,08	52,8
10	9,19	78,4
11	9,75	93,5



Ejercicio 2: Se realiza una serie de medidas de tensión T en un hilo, cada medida con sus respectivo error ΔT . Todos los datos se anotan en una tabla. Encuentre el valor medio de T y el error absoluto asociado. Con los valores de tensión, realice además un histograma con cinco intervalos.

Medida N°	T (N)	ΔT (N)	Observaciones
1	11.7	0.3	
2	16.9	0.2	
3	12.0	0.5	
4	3.5	1.5	Medida mal realizada: hilo se salió de la polea
5	18.2	0.5	
6	14.0	0.2	
7	15.1	0.1	
8	19.4	0.3	
9	12.7	0.3	
10	10.4	0.4	
11	11.2	0.5	
12	12.7	0.1	
13	14.9	0.2	

Ejercicio 3: Un estudiante decide hacer una medida de la velocidad media con la cual camina desde la estación de metro a su universidad. Para ello decide recorrer el mismo camino durante cinco días (de lunes a viernes) y utiliza un cronómetro, con precisión de 0,1 s, para registrar el tiempo recorrido T_r . Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla.

Medida N°	T_r (s)
1	605,5
2	623,3
3	598,6
4	655,3
5	640,9

- Obtenga el promedio del tiempo recorrido con su error absoluto asociado.
- Con el resultado anterior, determine la velocidad media con su error asociado. Se sabe que la distancia entre estos dos puntos es de $L = 800 \pm 5$ m.
- ¿Qué errores aleatorios o sistemáticos pueden ser importantes en este proceso de medición?

Nota: En este problema, el concepto de *velocidad media* se refiere a la velocidad constante equivalente que tendría un objeto al recorrer una trayectoria entre dos puntos dados. Por supuesto que en este caso el estudiante puede variar su velocidad (al cruzar una calle por ejemplo), pero nos interesa su velocidad media como si realizara su trayectoria a una velocidad constante.

Ejercicio 4: Determine si falta alguna información relevante o si hay algún error evidente para todas las siguientes expresiones que involucran alguna cantidad física:

- La tensión de corte medida es $T = 32,131 \pm 2,2$.
- La velocidad medida es $23,123212 \pm 0,210234 \text{ m/s}^2$.
- Se determinó un peso igual a $0,3212 \pm 0,031 \text{ kg}$.

Ejercicio 5: Considere las siguientes cantidades: $a = 4,3 \pm 0,1$, $b = 10,12 \pm 0,04$ y $c = -6,08 \pm 0,03$. Evalúe las siguientes expresiones y tenga cuidado con las cifras significativas de su resultado final.

- $a/b - c$
- $9,81 \exp(-bc/10)$
- $a + 3,2b - c$

Ejercicio 6: Considere las siguientes cantidades: $a = 2,4X \pm 0,1Y$, $b = 1,XX \pm 0,YY$ y $c = 3,4Y \pm 0,1X$, donde X e Y son el primer y último dígito de su Rut (antes del "-"), y XX e YY son los primeros dos y últimos dos dígitos de su Rut (antes del "-"). Evalúe las siguientes expresiones y tenga cuidado con las cifras significativas de su resultado final.

- $a/b + c$
- $5,5a \exp(-bc)$
- $a \ln(2b) + c$
- $a + 7b - c$
- abc
- $a - 3 \sin(bc)$

Ejercicio 7: Considere los siguientes valores de velocidad entregados por una persona que no sabe de cifras significativas ni errores. Corríjalos para que sean consistentes

1. $V = 10 \text{ m/s} \pm 0,178 \text{ m/s}$
2. $V = 1,5735 \text{ m/s} \pm 0,2 \text{ m/s}$
3. $V = 23,78 \text{ m/s} \pm 0,22 \text{ m/s}$
4. $V = 0,998 \text{ m/s} \pm 0,02 \text{ m/s}$

Unidad 2: Métodos numéricos

2.1. Introducción

En la descripción cuantitativa de los fenómenos físicos no siempre es posible resolver analíticamente el modelo que lo describe. En algunos casos en que esto sí es posible, la solución analítica no siempre es fácil de interpretar y visualizar. Como una herramienta complementaria a las técnicas analíticas, es usual en la física utilizar las herramientas numéricas, que con la ayuda de un computador permiten resolver, analizar y graficar diversos modelos físicos. En esta unidad se ilustrará cómo se utiliza el computador, mediante el programa `Matlab` con estos fines.

2.2. Cálculos complejos

Un primer uso de los métodos numéricos consiste en realizar cálculos complejos, para los cuales no existe una solución analítica o esta es muy difícil de analizar.

2.2.1. Ejemplo

Consideremos el ejemplo de una persona parada sobre una tarima. La persona está sujeta a dos resortes de largo natural L , cada uno de los cuales está amarrado a la misma altura de la persona en direcciones opuestas y que inicialmente no están elongados y en posición horizontal.

En cierto momento la persona se suelta de la tarima y cae debido a la fuerza de gravedad. Se desea encontrar la profundidad hasta la que cae.

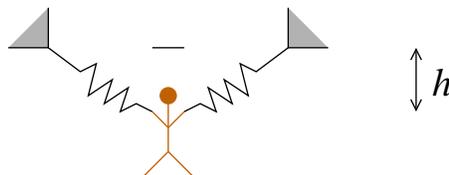


Figura 2.1: Persona sujeta a dos resortes

Si consideramos el nivel cero de la energía potencial gravitatoria en la altura inicial, entonces la

energía inicial de la persona es nula.

$$E = 0.$$

Una vez que la persona se lanza, adquiere energía potencial gravitatoria, elástica y cinética. En la elongación máxima la energía cinética se anula y su energía es:

$$E = -mgh + k(\sqrt{h^2 + L^2} - L)^2,$$

donde h es la profundidad a la que cae.

Si no hay roce se puede obtener h igualando la energía inicial y final, lo que da

$$-mgh + k(\sqrt{h^2 + L^2} - L)^2 = 0. \quad (2.1)$$

Si esta expresión se expandiera daría lugar a una ecuación de tercer grado en la variable \sqrt{h} lo que no permite realizar un análisis simple de la solución. Sin embargo, si se dan valores numéricos es posible obtener el valor de h pedido. A continuación se explicarán dos métodos posibles para obtener este tipo de solución.

2.2.2. Análisis gráfico

Una forma de encontrar la solución a la ecuación (2.1) es graficar la función y , por inspección, determinando cuándo interseca el eje x . Para eso, primero hay que darle valores precisos a las variables, por ejemplo $m = 80$ kg, $L = 10$ m, $k = 10$ N/m y $g = 9,8$ m/s². Luego, en Matlab se genera un arreglo de posibles valores de h , para los que se evalúa el lado izquierdo de (2.1). Finalmente, se grafica

```
>> L=10 % Se asignan los valores fijos
>> k=10
>> g=9.8
>> h=0:1:120; % Se genera un arreglo que parte en 0, incremento 1
>> % y el ultimo valor es 120
>> % Se evalua el lado izquierdo (ojo con el uso del punto . )
>> ladoizq=h.^3-(m*g/k)*h.^2+(m*g/2/k)^2*h-2*m*g*L^2/k
>>
>> % Se grafica las soluciones en funcion de las masas
>> plot(h,ladoizq)
```

Por inspección se encuentra que la solución está alrededor de $h = 95$. Luego, se puede refinar la búsqueda cambiando el arreglo de valores de h , por ejemplo

```
>> h=90:0.1:100;
```

2.2.3. Uso de *fzero* en Matlab

Otra forma de obtener una solución de la ecuación (2.1) es usando el comando *fzero* en Matlab. Este comando busca una solución que haga que una función se anula, que es un caso particular de la intersección de una función con el valor cero. Sin embargo, *fzero* no usa el método de cambio de signo presentado antes, sino que otro método numérico que no es necesario detallar en este curso (método de Newton-Raphson).

Como ejemplo de la forma en que usa esta función, consideremos la ecuación (2.1) y los valores $m = 80$ kg, $L = 10$ m, $k = 10$ N/m y $g = 9,8$ m/s². En Matlab se escribe:

```
>> m=80 % Se asignan valores sin unidades
>> L=10
>> k=10
>> g=9.8
>> % Se define la ecuacion que se quiere resolver
>> ec=@(h) -m*g*h + k*(sqrt(h^2+L^2)-L)^2
>>
>> % Se resuelve usando la funcion fzero(ecuacion,adivinanza)
>> hsol= fzero(ec,90) % Se resuelve para h
```

La respuesta es $hsol = 96,4$ m.

Noten que la sintaxis de la definición de funciones es

```
funcion = @(variable) definicion
```

Como la ecuación es no lineal, puede tener muchas soluciones. Para escoger la atinente al problema se debe escoger una condición inicial apropiada. Matlab va a buscar la solución más cercana a la adivinanza inicial, de manera que es conveniente usar una buena aproximación inicial (en este caso $h = 90$).

También se podría preguntar cómo depende h de la masa m , manteniendo los otros valores fijos. Para eso, lo mejor es hacer un gráfico de la forma:

```
>> L=10 % Se asignan los valores fijos
>> k=10
>> g=9.8
>> masas=10:1:80; % Se genera un arreglo para las masas que parte en 10,
>> % incremento 1 y el ultimo valor es 80
>> hsol=zeros(1,length(masas)); % Se genera un arreglo de ceros para h de
>> % igual largo que masas
>> % Se puso punto y coma (;) para no desplegar los resultados:
>> % las masas y hsol son arreglos y pueden ocupar mucha pantalla
```

```

>> for i=1:length(masas)
>>   m=masas(i); % Se escoge cada valor de masa
>>   % Se define la ecuacion para cada valor de masa
>>   ec=@(h) h^3-(m*g/k)*h^2+(m*g/2/k)^2*h-2*m*g*L^2/k
>>
>>   % Se resuelve y se asigna la solucion encontrada al arreglo hsol
>>   hsol(i)= fzero(ec,0.5)
>> end
>> % Se grafica las soluciones en funcion de las masas
>> plot(masas,hsol)

```

Tarea: Ejecute este programa y analice si los resultados obtenidos son razonables.

2.2.4. Intersección con valores discretos

Finalmente, se puede encontrar la solución cuando se conoce la función sólo para valores discretos de h . En este caso, lo más probable es que ninguno de los valores discretos coincida exactamente con el valor pedido. La ecuación (2.1) puede ser modificada para llevarla a la forma:

$$mgh - k(h^2 + L^2 - 2L\sqrt{h^2 + L^2}) = kL^2.$$

El lado izquierdo de esta ecuación puede ser definido como una función $f(h)$, con las constantes m , g , L y k conocidas. Presentado así, resolver la ecuación (2.1) equivale a encontrar la intersección de $f(h)$ con la constante kL^2 .

El ejemplo de la figura 2.2 muestra el caso general de cómo se puede obtener la intersección de una función con un valor dado x^* cuando se tiene un conjunto de valores discretos de una función, en este caso de una trayectoria. Luego, lo que se desea hacer es encontrar la intersección de la función $x(t)$ con x^* , pero con un conjunto discreto de datos. El valor x^* se alcanza entre los tiempos t_4 y t_5 . Para determinar en qué intervalo ocurre la intersección, notamos que entre t_4 y t_5 la función pasa de estar bajo x^* a estar sobre este valor. En otros casos podría ocurrir justo a la inversa, pero lo importante es que la diferencia $(x - x^*)$ cambia de signo en la intersección.

Luego, el criterio que se usa para determinar una intersección es:

$$\boxed{\text{Una intersección ocurre en el intervalo } i \text{ si: } (x_i - x^*) \times (x_{i+1} - x^*) < 0 \quad (2.2)}$$

Una vez que se sabe en qué intervalo ocurre la intersección, se debe asignar un tiempo. Dado que la función se conoce sólo con una precisión Δt , la respuesta también tendrá esta indeterminación. Así, las siguientes respuestas son igualmente válidas.

$$t^* \approx t_i \quad (2.3)$$

$$t^* \approx t_{i+1} \quad (2.4)$$

$$t^* \approx (t_i + t_{i+1})/2 \quad (2.5)$$

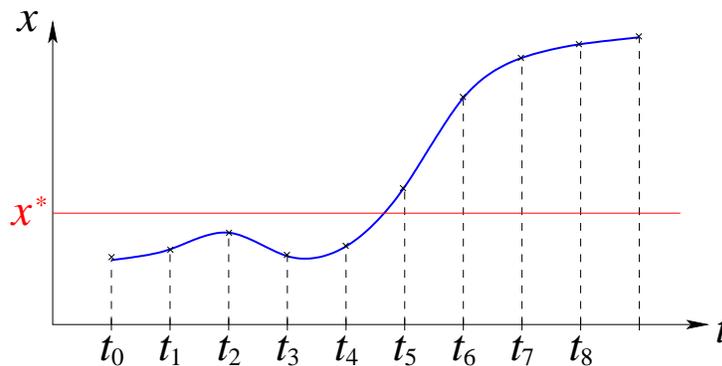


Figura 2.2: Estrategia para encontrar la intersección con un valor: $x - x^*$ cambia de signo.

Una mejor estimación se puede obtener haciendo una interpolación lineal, pero esto se dejará para más adelante.

2.3. Análisis de las leyes de Newton

Las leyes de Newton en una dimensión tienen típicamente la forma

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}),$$

donde F es la fuerza, la cual puede depender de la posición x y la velocidad \dot{x} .

Si F es una expresión complicada, la ecuación de movimiento que resulta (una ecuación diferencial) puede ser imposible o muy difícil de resolver analíticamente. Sin embargo, usando algunas herramientas numéricas es posible obtener su solución.

2.3.1. Discretización temporal

Para poder estudiar la ecuación de movimiento numéricamente, lo primero que debemos revisar es el concepto de *discretización temporal* (figura 2.3).

Representar una función $x(t)$ en el computador (y también en los experimentos) es una tarea imposible pues para eso habría que dar los valores de la función para cada instante. En vez de eso, se aprovecha la propiedad de que muchas de las magnitudes físicas, en particular la posición $x(t)$, son funciones continuas del tiempo. Esto implica que si se conoce x_o para un instante dado t_o , el valor de x para otros tiempos, cercanos a t_o , estarán muy bien aproximados por x_o . Es decir, para una función continua:

$$\text{Si } t \approx t_o \Rightarrow x(t) \approx x(t_o).$$

Entonces, si se quiere representar una función $x(t)$ en un intervalo $[T_A, T_B]$ lo primero que se hace es *discretizar* el tiempo usando un espaciado pequeño Δt , de manera que

$$t_i = T_A + i \times \Delta t; \quad \text{con } i = 0, 1, 2, \dots$$

Luego, la función $x(t)$ se representa de manera discreta, dando los valores de ésta sólo en los instantes discretos

$$x_i = x(t_i).$$

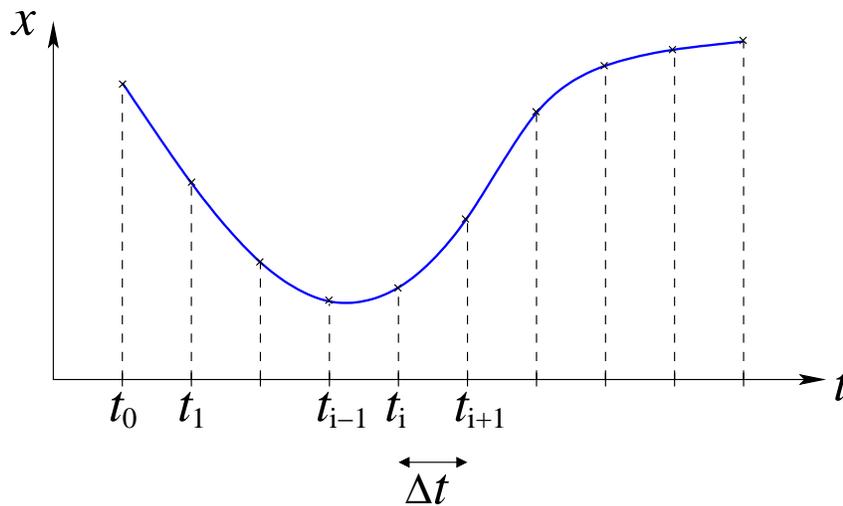


Figura 2.3: La función $x(t)$ (línea continua) y su discretización temporal (cruces).

Entonces, cuando se quiera resolver la ecuación de Newton en el computador, en vez de buscar la función completa $x(t)$, vamos a buscar los valores de $x_i = x(t_i)$ para un Δt dado. Es importante destacar que mientras más pequeño sea el valor de Δt , más fiel será la representación de la función; pero de todos modos no es necesario exagerar pues las funciones son continuas. Una discretización excesivamente fina hace el cálculo más lento y puede a veces generar inestabilidades numéricas.

Hay que notar que esta representación discreta de las funciones es lo que usualmente se hace cuando se miden magnitudes físicas que varían en el tiempo o el espacio. Así, por ejemplo, la temperatura en Santiago se mide una vez cada minuto y no de manera continua. Lo mismo ocurre cuando se utiliza una cámara para filmar la posición de un objeto móvil, lo cual proporciona un muestreo cada cierta fracción de segundo solamente.

2.3.2. Derivadas discretas

Teniendo la función representada en tiempos discretos, es posible calcular de manera aproximada las derivadas de ésta en los tiempos de medición. Analizaremos la primera y segunda derivada que son las que se usan en la física newtoniana.

Se sabe que la primera derivada de $x(t)$ es

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Luego, si Δt es chico, una muy buena aproximación de la derivada se puede evaluar como

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

que evaluada en uno de los puntos de la discretización da:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_i) &\approx \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Esta expresión se conoce como la derivada *hacia adelante* pues usa el valor de la función en un instante y en otro más adelante en el tiempo (figura 2.4).

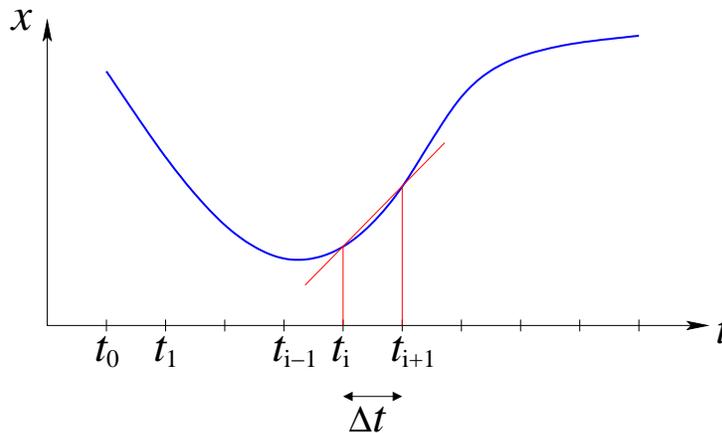


Figura 2.4: Derivada discreta hacia adelante

También, si se usa $h = -\Delta t$ se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_i) &\approx \frac{x(t_i - \Delta t) - x(t_i)}{-\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_i) - x(t_i - \Delta t)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t} \\ &\approx \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

que se llama derivada *hacia atrás* (figura 2.5).

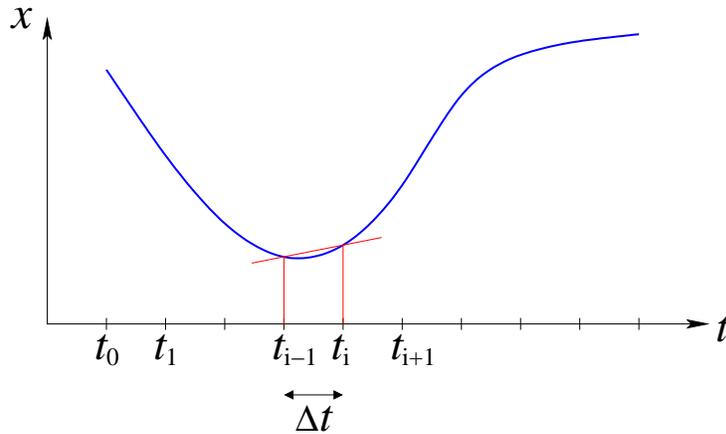


Figura 2.5: Derivada discreta hacia atrás

Promediando las dos expresiones, de la derivada hacia adelante y hacia atrás, se obtiene la llamada *derivada centrada* (figura 2.6)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_i) &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} + \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \right] \\ &\approx \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\approx \frac{x(t_i + \Delta t) - x(t_i - \Delta t)}{2\Delta t}. \quad (2.9)$$

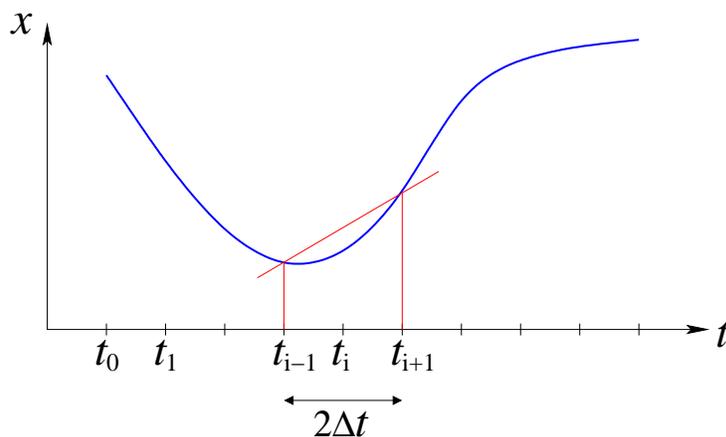


Figura 2.6: Derivada discreta centrada

De las tres expresiones para la derivada, si Δt está fijo, se puede demostrar que la derivada centrada es más precisa que las otras, pero a veces por comodidad o facilidad de cálculo se usarán las otras dos.

Para evaluar la segunda derivada, procedemos considerando que ésta es la derivada de la primera derivada. Así aplicando la expresión para la derivada centrada pero con $\Delta t/2$ se obtiene

$$\dot{x}(t) = \frac{\dot{x}(t + \Delta t/2) - \dot{x}(t - \Delta t/2)}{\Delta t}.$$

A su vez,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t + \Delta t/2) &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \\ \dot{x}(t - \Delta t/2) &= \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}.\end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} - \frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} \\ &= \frac{x(t + \Delta t) - 2x(t) + x(t - \Delta t)}{\Delta t^2}.\end{aligned}$$

Luego, evaluando en un punto de la discretización

$$\ddot{x}(t_i) = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}, \quad (2.10)$$

que se llama *derivada centrada de segundo orden*.

Tarea: (i) Muestre que si $x(t) = \alpha t + \beta$ (α y β constantes), es decir, una línea recta, entonces la expresión aproximada de la derivada da α , tal como la expresión exacta. (ii) Muestre que si $x(t) = x_0 + v_0 t + at^2/2$ (x_0 , v_0 y a constantes), entonces la expresión aproximada de la segunda derivada da a , tal como la expresión exacta.

En resumen, se tienen la siguientes expresiones aproximadas para la derivadas

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \quad (2.11)$$

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \quad (2.12)$$

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \quad (2.13)$$

$$\ddot{x}(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (2.14)$$

2.3.3. Solución de la ecuación de Newton: método de Verlet

Primero consideremos el ejemplo simple de una partícula unida a un resorte:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Evaluando la ecuación en t_i y usando la expresión discreta para la segunda derivada (2.14), se tiene

$$m \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} = -kx_i,$$

de la que se puede despejar x_{i+1} como

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m}x_i\Delta t^2. \quad (2.15)$$

Esta expresión indica que si se conoce la posición (x_i) y la aceleración ($-kx_i/m$) en el tiempo t_i y la posición en el tiempo t_{i-1} (x_{i-1}), entonces es posible calcular la posición en un instante posterior t_{i+1} . Dado lo anterior surge la idea de realizar una *iteración*, pues con el nuevo valor obtenido ahora es posible calcular el siguiente y así sucesivamente (figura 2.7).

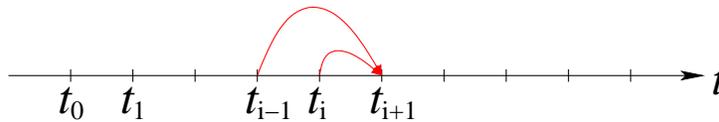


Figura 2.7: En el método de Verlet, se necesitan los datos en dos instantes, t_{i-1} y t_i para calcular el paso en el instante siguiente t_{i+1}

Como para cada paso de la iteración se necesitan dos valores previos de la posición, surge el problema de cuáles deben ser los valores iniciales para comenzar la iteración. Como se sabe, en la física newtoniana se debe indicar la posición y velocidad inicial del cuerpo para poder resolver el movimiento. Es decir, se dan x_o y v_o . Recordando que la velocidad es la primera derivada de la posición y usando la expresión (2.11) se tiene

$$\begin{aligned} v_o &= \dot{x}(0) \\ &= \frac{x_1 - x_o}{\Delta t}, \end{aligned}$$

de la que se despeja

$$x_1 = x_o + v_o\Delta t. \quad (2.16)$$

Se tienen así todos los pasos del llamado algoritmo de Verlet

- Datos: x_o, v_o
- Se calcula: $x_1 = x_o + v_o\Delta t$
- Se itera desde $i = 1$ hasta el tiempo final:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \frac{k}{m}x_i\Delta t^2$$

que va entregando sucesivamente los valores de x_2, x_3, \dots . Como el paso i entrega el valor de x_{i+1} se debe iterar hasta $N - 1$, donde N es el número total de puntos.

En Matlab, considerando que $m = 1$ kg, $k = 0,5$ N/m, $x_0 = 5,0$ m y $v_0 = 2,0$ m/s, podemos encontrar la posición de la partícula para distintos tiempos usando el algoritmo de Verlet de la siguiente forma:

```
>> m=1.0 % Se dan los valores de m y k
>> k=0.5
>> Tfin = 20.0 % Se resuelve hasta 20 segundos
>> dt = 0.1 % Se da el paso de tiempo Deltat
>> % Se dan las condiciones iniciales
>> x0=5.0
>> v0=2.0
>>
>> % Se define el arreglo de tiempos
>> t=0:dt:Tfin;
>> % Se define el arreglo de posiciones del mismo largo que los tiempos
>> x=zeros(1,length(t));
>> % Se ponen las condiciones iniciales
>> x(1) = x0;
>> x(2) = x0+v0*dt;
>> % Se itera usando el algoritmo de Verlet
>> for i=2:length(x)-1
>>   x(i+1) = 2*x(i)-x(i-1) - k*x(i)*dt^2/m;
>> end
>> plot(t,x)
```

Para el caso de una fuerza cualquiera $F(x)$ el resultado es análogo y el paso de iteración es:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F(x_i)\Delta t^2/m. \quad (2.17)$$

Si el sistema tiene fuerzas que dependen de la velocidad, por ejemplo fuerzas de roce viscosas o turbulentas, $F(x, \dot{x})$, se debe escribir la derivada de manera discreta. Lo más práctico en este caso es usar la derivada hacia atrás, para obtener

$$F(x, \dot{x}) \approx F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right),$$

de manera que la iteración se puede escribir como

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + F\left(x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)\Delta t^2/m. \quad (2.18)$$

Esta última expresión es fácil de implementar porque es *explícita*, es decir, el valor de x_{i+1} sólo depende de valores previos, los cuales ya son conocidos.

2.4. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: Escriba un programa en `Matlab` que calcule el factorial de 100.

Recuerde que el factorial de n es: $n! = \prod_{i=1}^n i$.

Pregunta 2: Escriba la expresión para la segunda derivada aproximada de una función en el punto X .

Pregunta 3: Expresé la siguiente ecuación en forma discreta: $\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$.

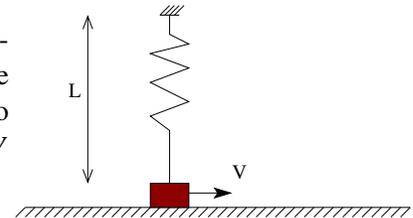
Pregunta 4: Si $x(t) = \sin(t) \exp(-0,1t)$, escriba las líneas de `Matlab` que permitirían graficar esa función en el intervalo $t \in [0, 10]$ usando un espaciado $\Delta t = 0,1$.

Indicación: debe definir un arreglo para t y otro para x .

Pregunta 5: Si $x(t) = \cos(t) \exp(-2t)$, escriba las líneas de `Matlab` que permitirían graficar esa función en el intervalo $t \in [0, 4]$ usando un espaciado $\Delta t = 0,1$.

Indicación: debe definir un arreglo para t y otro para x .

Pregunta 6: Una partícula de masa m , apoyada sobre una superficie rugosa horizontal de coeficiente de roce μ , está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural L , cuyo otro extremo está fijo a una altura L . Inicialmente se le da a la partícula una velocidad V hacia la derecha.



Escriba la ecuación de energía que permite determinar el punto donde se detiene la partícula.

Pregunta 7: Suponga que tiene dos arreglos de N elementos, T y X . $T(i)$ indica el tiempo i -ésimo y $X(i)$ la posición de una partícula en dicho instante. Escriba un programa que encuentre el instante aproximado en que la partícula cruza en origen.

2.5. Ejercicios

Ejercicio 1: Considere una partícula que se deja caer verticalmente desde el reposo a una altura H y que sufre roce con el aire de la forma $F_{\text{roce}} = -\gamma v$, donde γ es el coeficiente de roce viscoso, con unidades de Kg/s y v es la velocidad de la partícula.

Se busca comparar el tiempo que tarda la partícula en caer y la velocidad con la que golpea al suelo con los valores que se obtienen en ausencia de roce: $\sqrt{2H/g}$ y $\sqrt{2gH}$, respectivamente.

Para eso, resuelva numéricamente la ecuación de Newton que resulta con los parámetros $m = 1$ kg y $H = 10$ m con $\gamma = 0; 0,1$ kg/s; $0,2$ kg/s; \dots ; $0,5$ kg/s.

Grafique el tiempo de caída y la velocidad con que llega al suelo en función de γ .

Ejercicio 2: Se desea determinar la altura máxima a la que llega un proyectil cuando es lanzado verticalmente con velocidad V_0 en presencia de roce viscoso, tal como el descrito en el problema anterior.

Busque un método numérico que permita determinar la altura máxima.

Resuelva para $m = 0,1$ kg, $V_0 = 1$ m/s y $\gamma = 0,1$ kg/s. Compare con la predicción sin roce $H = V_0^2/2g$.

Ejercicio 3: Se desea resolver el movimiento de la Tierra en torno al Sol. Se sabe que en ese caso la fuerza es la de gravitación universal:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}.$$

Con el fin de poder tratarla numéricamente, la fuerza se reescribe de la siguiente manera (considerando el movimiento en el plano $x - y$)

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \\ &= -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \\ &= -\frac{GMm}{r^3}(x\hat{i} + y\hat{j}) \\ &= -\frac{GMm}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x\hat{i} + y\hat{j}).\end{aligned}$$

Luego, la ley de Newton $m\vec{a} = \vec{F}$ se escribe por componentes como

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2)^{3/2}}x, \quad (2.19)$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2)^{3/2}}y. \quad (2.20)$$

Use el método de Verlet para resolver estas ecuaciones acopladas. Considere los siguientes valores de las constantes: $G = 1$ y $M = 1$. Además considere como condición inicial para la posición $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$ y para la velocidad $v_{x0} = 0$, $v_{y0} = 0,5, 1,0$ y $2,0$.

Grafique la trayectoria que resulta (usando `plot(x, y)`). Compare con los cálculos analíticos que predicen, para los datos del problema, que la velocidad para una órbita circular es $V_{\text{circ}} = \sqrt{GM/R} = 1$.

Ejercicio 4: La deducción de métodos numéricos no siempre es simple y a veces algunos métodos pueden resultar inestables. Un ejemplo clásico es el de la ecuación que describe como decrece la velocidad de un cuerpo en presencia de roce viscoso:

$$m\dot{v} = -\gamma v.$$

Sustituyendo se puede mostrar que la solución es

$$v(t) = v(0) \exp(-\gamma t/m),$$

es decir, decae en el tiempo.

Una discretización centrada que en principio parece precisa es

$$\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta t} = -\frac{\gamma}{m} v_i.$$

Muestre que si resuelve para $m = 1$ kg, $\gamma = 0,1$ kg/s, $\Delta t = 0,1$ s, $T_{\text{final}} = 100$ s y $V(0) = 1$ m/s el resultado no tiene sentido.

Sin embargo, se puede escribir otra discretización centrada, en que el lado derecho se promedia en dos instantes

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} = -\frac{\gamma}{m} \frac{v_{i+1} + v_i}{2},$$

de la cual se puede despejar v_{i+1} como

$$v_{i+1} = \left(\frac{1 - \gamma\Delta t/2m}{1 + \gamma\Delta t/2m} \right) v_i.$$

Muestre que esta discretización es estable y entrega resultados sensatos.

Ejercicio 5: Considere el movimiento de una partícula de masa m unida a un resorte de constante k , descrita por la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Resuelva la ecuación de movimiento, es decir calcule $x(t)$, usando el método de Verlet para el siguiente conjunto de valores: $m = 1$ kg, $k = 1$ N/m, $x_0 = 3$ m y $v_0 = 0$.

Una vez que tenga la solución de la ecuación, estudie si numéricamente la energía mecánica se conserva

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Para eso escriba de alguna manera discreta la velocidad y evalúe la energía en función del tiempo. ¿Es constante?

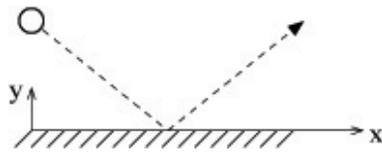
Ejercicio 6: Se desea saber cómo disminuye en el tiempo la energía mecánica de un cuerpo que cae en el aire en presencia de roce turbulento $F_{\text{roce}} = -\gamma|v|v$, donde $|x|$ es el valor absoluto de x .

Para eso, considere que se suelta un cuerpo de masa m desde una altura H del piso y se sigue su evolución hasta que golpea al suelo.

1. Escriba la ecuación de movimiento del cuerpo.
2. A partir de la ecuación de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por Δt .
3. Escriba una expresión discreta para la energía mecánica del cuerpo, que use las posiciones discretas encontradas en el punto anterior.

Ejercicio 7: Se desea modelar un billar donde las bolas se mueven en un plano con roce viscoso sobre la superficie y rebotan contra las paredes de manera elástica (es decir, el ángulo de entrada es igual al ángulo de salida en el rebote).

Para simplificar el ejercicio, se considerará sólo una pared (en vez de 4 que tiene el billar). Esta pared es horizontal y está en $y = 0$.



1. Escriba las ecuaciones de movimiento para x e y .
2. A partir de las ecuaciones de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por Δt .
3. Escriba el algoritmo que permita detectar el choque con la pared y modificar la velocidad cuando el choque ocurra.

Ejercicio 8: Los buses del Transantiago disponen de GPS, aparato que les entrega la posición de la micro (x, y) cada cierto intervalo de tiempo Δt . Se desea incorporar a las micros un mecanismo de control que, usando los datos del GPS, permita medir la velocidad \vec{v} y la aceleración \vec{a} en cada instante de manera que suene una alarma si $|\vec{v}| > V_c$ o $|\vec{a}| > A_c$.

Considere por simplicidad que el movimiento es puramente bidimensional (es decir, Santiago es plano).

1. Escriba las expresiones que permiten calcular instantáneamente la velocidad y aceleración, dadas las posiciones entregadas por el GPS.
2. Complete el siguiente programa Matlab que hace el control llamando al método `Alarma` que hace sonar la alarma:

```

for i=1:fin
    if (XXXXXXXX)
        Alarma;
    end
end
end

```

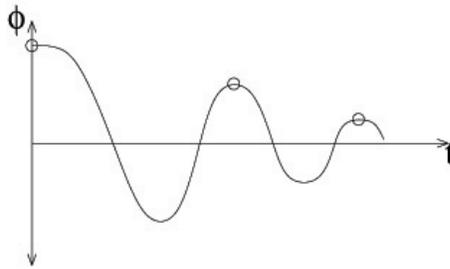
Ejercicio 9: Un péndulo con roce se describe por la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi - \gamma \dot{\phi},$$

donde L es el largo del péndulo y γ el coeficiente de roce.

Como el sistema tiene roce, si el péndulo se suelta del reposo desde un ángulo inicial ϕ_0 , los ángulos máximos que alcance (indicados por un círculo en la figura) serán cada vez menores.

Se busca resolver numéricamente la dinámica del sistema para obtener cómo van disminuyendo estos ángulos máximos. Para eso:



1. A partir de la ecuación de movimiento, escriba la discretización de Verlet que permitiría calcular la posición en función del tiempo para una discretización temporal dada por Δt .
2. Escriba el criterio numérico que permita determinar los instantes en que el péndulo alcanza los ángulos máximos y los valores de estos ángulos.

Ejercicio 10: Se desea calcular el alcance de un proyectil que se lanza, desde el nivel del suelo, en un ángulo α respecto a la horizontal con velocidad V_0 . Sobre el proyectil actúa el roce con el aire, que le ejerce una fuerza $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$.

1. Escriba la parte del programa Matlab que permita calcular la trayectoria ($x(t)$ e $y(t)$) del proyectil. No olvide poner las condiciones iniciales.
2. Escriba la parte del programa Matlab que entregue el alcance del proyectil.

Ejercicio 11: Sea un resorte horizontal de constante $k = 1$ N/m fijo en uno de sus extremos a una pared y unido a un bloque de masa $m = 1$ kg en el otro extremo. El sistema reposa sobre una mesa con coeficiente de roce dinámico $\mu = 0,1$ y coeficiente de roce estático $\mu_e = 0,11$. Se define el eje horizontal x con origen en el largo natural del resorte. Buscamos calcular numéricamente la velocidad máxima que alcanza el bloque si este se suelta desde el reposo desde una posición inicial $x_0 = 3$ m.

1. Escriba la ecuación del movimiento y la ecuación de energía del bloque.
2. Defina en lenguaje Matlab las constantes del problema y arreglos para el tiempo, posición, velocidad, y energía.
3. Escriba en lenguaje Matlab el algoritmo de Verlet para resolver numéricamente el problema, incluyendo condiciones de borde.
4. Escriba en lenguaje Matlab la condición a imponer para encontrar la velocidad máxima del bloque.

Unidad 3: Sistemas extendidos

3.1. Introducción

Durante las primeras aproximaciones a la física ustedes han sido expuestos a las ideas de Galileo y Newton sobre la naturaleza del movimiento. En estas nociones introductorias se ha usado el concepto de *partícula puntual*. Entendemos por partícula puntual un objeto sin dimensiones espaciales, dotado de una posición y masa como únicos atributos físicos. Dicho concepto es una idealización, solo aplicable cuando la extensión espacial de los objetos puede ser despreciada en el fenómeno bajo estudio. De este modo, Newton fue capaz de explicar el movimiento de la traslación de la Tierra en su conjunto, sin preocuparse de otros movimientos, como la rotación. Del mismo modo, Ud. ha trabajado con conceptos como la velocidad de un automóvil, la aceleración de un paracaidista, etc. Todos los ejemplos son sistemas complejos, cada cual con una estructura interna capaz de cambiar. En este capítulo construiremos las herramientas básicas que permiten la comprensión del movimiento de los objetos extendidos.

Para poder plantear el estudio de un sistema complejo, usando las herramientas que nos entrega la mecánica newtoniana, debemos establecer un modelo del mismo. El hacer un modelo implica dejar de lado una serie de fenómenos asociados con el sistema, hacer aproximaciones, y por último, plantear representaciones simplificadas del sistema. Todo esto es, en principio, de gran dificultad, y requiere una gran intuición, pero por sobre todo hace necesaria la constante comprobación experimental. No es posible establecer modelos físicos que abarquen la totalidad de los fenómenos asociados a un sistema. La validez de nuestros modelos está limitada a ciertos aspectos y ciertos rangos de valores.

En un intento de clasificación muy general, los tipos de sistemas que podemos contemplar son:

- i.- Disgregados, tales como galaxias de estrellas, sistemas granulares, gases, etc.
- ii.- Líquidos, donde las moléculas constituyentes mantienen cohesión, pero permiten que dos moléculas en contacto puedan, luego de algún tiempo, estar muy distantes entre sí.
- iii.- Medios elásticos, donde el conjunto de moléculas vecinas se mantiene pero sus distancias de separación puede variar moderadamente ante deformaciones.
- iv.- Sólidos indeformables, donde las distancias promedio entre moléculas vecinas son invariables en el tiempo.



Figura 3.1: Choque de dos galaxias interpretado a partir de datos obtenidos por el telescopio espacial Hubble.

Es importante destacar que dicha clasificación, aunque superficialmente evidente, corresponde a la elección de un rango experimental para nuestros estudios. Por ejemplo, no existe un cuerpo rígido en la naturaleza, la rigidez es un comportamiento aparente sólo en cierto rango experimental. Si forzamos mucho un cuerpo este se deformará o simplemente se romperá. Alcances similares se pueden hacer para cada uno de los ejemplos recién dados.

Para estudiar la evolución de un sistema formado por muchos componentes nos valemos de las leyes de Newton, las que se adaptan de forma muy sencilla a sistemas complejos. Debemos considerar, provisoriamente, al sistema complejo como un conjunto de sistemas más pequeños, para los cuales las leyes de movimiento se pueden aplicar en forma sencilla. Para esto es necesario definir *el sistema* a estudiar, vale decir, el conjunto de partículas –distinguibiles y enumerables– que uno escoge (ficticiamente) para el estudio de un fenómeno dado. El criterio que comúnmente nos guía para definir los componentes del sistema es la simplicidad que nos brinde para respondernos preguntas específicas. Suponemos que las componentes del sistema pueden interactuar entre sí, y a su vez con el exterior. Es decir, las fuerzas actuando sobre cada constituyente corresponden a la suma de las fuerzas que se ejercen directamente más las fuerzas que las otras partes ejerzan sobre él. La mecánica newtoniana de sistemas compuestos consiste en una aplicación de las tres leyes de Newton, además del *principio de superposición*, postulados para cuerpos puntuales. Estas leyes se resumen como sigue:

I.- Si un cuerpo en reposo no interactúa con el entorno, entonces este permanecerá en reposo indefinidamente.¹

II.- El cambio de momentum $\delta\vec{p}$ de una partícula es proporcional a la fuerza aplicada y a la duración δt de su aplicación.²

III.- La fuerza que un agente externo ejerce sobre el cuerpo es igual en magnitud, pero de sentido opuesto, a la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el agente externo.

¹A la inversa, si un cuerpo cambia de su estado de reposo, entonces es porque interactuó con el entorno.

²Esta relación se expresa $\delta\vec{p} = \vec{F}\delta t \rightarrow \vec{F} = d\vec{p}/dt = m\vec{a}$.

El *principio de superposición* se refiere a que las fuerzas son aditivas en el sentido vectorial.

En un primer acercamiento al estudio de sistemas extendidos nos enfocaremos en los *sólidos indeformables*. Un sólido lo visualizamos como un continuo de materia, como se ilustra en la Fig. 3.2(a) para una barra. Esta barra la trozamos imaginariamente en celdas (Fig. 3.2(b)), para terminar con las celdas independientes indicadas en la Fig. 3.2(c). Entre celdas contiguas se ejercen fuerzas de cohesión. Cada una de estas celdas, si son lo suficientemente pequeñas, puede ser emulada como una partícula (Fig. 3.2(d)). Nuevamente, la interacción dominante ocurre entre partículas vecinas.

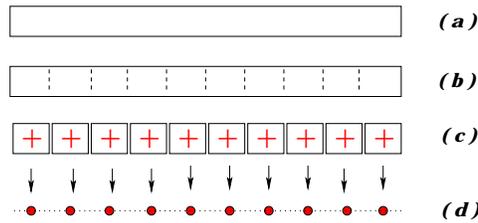


Figura 3.2: Representación de una barra como una colección de partículas.

3.2. Masa y centro de masas

La masa de un sistema de muchos cuerpos es, dentro del rango de validez de las leyes de movimiento de Newton, la suma de las masas de cada uno de ellos. Con este argumento podemos imaginar un cuerpo como la unión de N pedazos materiales, cada uno de ellos con masa determinada. Si el elemento i -ésimo tiene masa m_i , con $i = 1, \dots, N$, entonces la masa del sistema viene dada por

$$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i.$$

Supongamos que el sistema se distribuye espacialmente de modo que la posición de la celda i se representa mediante el vector posición \vec{r}_i referido a un origen O de un sistema de referencia S arbitrario. Este sistema puede ser el laboratorio, el suelo, la Tierra, la Vía Láctea, etc. Se define la posición del *centro de masas* \vec{R} del sistema por

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{r}_i.$$

Tan solo al mirar la definición podemos interpretar geoméricamente el punto \vec{R} como el promedio de las posiciones de las partículas, ponderando cada una relativamente con la contribución que hacen a la masa total. Esta interpretación en términos de promedio, permite utilizar la intuición para identificar el centro de masas de sistemas simples, por ejemplo el centro de masas de un círculo está en su centro. En coordenadas cartesianas, si denotamos

$$\vec{R} = (R_x, R_y, R_z), \quad (3.1)$$

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad (3.2)$$

entonces,

$$R_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad (3.3)$$

$$R_y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad (3.4)$$

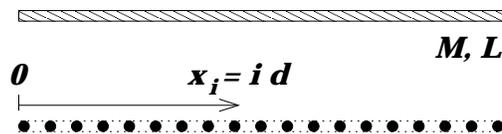
$$R_z = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i. \quad (3.5)$$

Hacemos hincapié en que el centro de masas no es punto material específico del sistema. Es un punto abstracto, conveniente para la descripción de su movimiento. De hecho el centro de masas ni siquiera debe estar contenido dentro del sistema (ver recuadro sobre el centro de masas de la escuadra).

El centro de masas de una barra.

Consideremos una barra de longitud L y masa M distribuida uniformemente. Por simetría el promedio de las posiciones está en el centro de la barra, de este modo concluimos que el centro de masas está precisamente en el centro de la barra. Ahora usaremos la definición matemática del centro de masas. Para ello dividimos la barra en $N + 1$ trozos, los cuales se separan en $d = L/n$. La masa de cada trozo es $M/(N + 1)$ y la coordenada x de la i -ésima es $x_i = id$, con $i = 0, 1, \dots, N$. Entonces, la ubicación del centro de masas (según el eje horizontal x) está dada por

$$R_x = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^N m_i x_i = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^N \frac{M}{N+1} \times \frac{iL}{N} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=0}^N i = \frac{L}{2}$$



Hacemos notar que, dependiendo del caso, puede ser conveniente dividir un objeto en N trozos, numerados de 1 a N , o, como en este caso, en $N + 1$ trozos, numerados de 0 a N .

3.2.1. Energía potencial gravitacional de un cuerpo.

Consideremos un cuerpo de masa M en presencia de la gravedad terrestre. Podemos imaginar este cuerpo constituido por N celdas enumerables. La energía potencial gravitacional del sistema es la suma de la contribución de cada una. Así, si la celda i -ésima es de masa m_i y su coordenada con respecto al nivel cero de energía potencial es y_i , entonces la energía potencial total U_g es

$$U_g = \sum_{i=1}^N m_i g y_i = Mg \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M} = Mg Y_{CM},$$

donde Y_{CM} representa la coordenada Y del centro de masas del sistema.

Se obtiene entonces que la energía potencial de un cuerpo extendido se puede calcular simplemente como la energía potencial del centro de masa, resultado que fue usado implícitamente durante todo el curso anterior. Este resultado muestra que la definición dada de centro de masa es muy útil porque simplifica los cálculos, no haciendo necesario sumar sobre todas las componentes de un cuerpo extendido.

3.2.2. Centro de masas de centros de masas

Como vimos anteriormente, el centro de masas de una barra uniforme se ubica en su punto medio. Nos preguntamos por la ubicación del centro de masas de una “L” formada por dos barras idénticas, unidas perpendicularmente en uno de sus extremos. Este cálculo es bastante simple si se recurre al siguiente teorema:

*Si \vec{R}_A localiza el centro de masas de un sistema A de masa M_A
y \vec{R}_B el de un sistema B de masa M_B ,
entonces el centro de masas del conjunto está dado por*

$$\vec{R} = \frac{M_A \vec{R}_A + M_B \vec{R}_B}{M_A + M_B}.$$

La demostración es bastante simple. Sea M la masa de todo el sistema, con $M = M_A + M_B$. Si \vec{R} denota la posición del centro de masas de todo el sistema, entonces

$$M\vec{R} = \sum_{\text{todos}} m_i \vec{r}_i = \sum_{i \in A} m_i \vec{r}_i + \sum_{i \in B} m_i \vec{r}_i.$$

Pero, $M_A \vec{R}_A = (\sum_{i \in A} m_i \vec{r}_i)$, análogamente para \vec{R}_B . Con ello,

$$M\vec{R} = M_A \vec{R}_A + M_B \vec{R}_B,$$

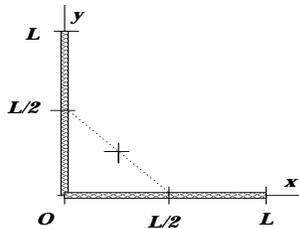
el resultado buscado.

El centro de masas de una escuadra:

Consideremos el sistema formado por dos barras idénticas de longitud L y masa M , unidas perpendicularmente en sus extremos. Ubicamos la escuadra en un sistema cartesiano, eligiendo orientación y origen que aporten la mayor simplificación en los cálculos. Si el subsistema A es la barra horizontal y la B es la vertical, entonces

$$R_x = \frac{M \times (L/2) + M \times 0}{M + M} = \frac{L}{4}; \quad R_y = \frac{M \times 0 + M \times (L/2)}{M + M} = \frac{L}{4}.$$

Este resultado representa el punto medio entre los puntos medios de cada barra, como se ilustra en la figura de más abajo.

**3.2.3. Problema resuelto: El centro de masas de un triángulo:**

La propiedad recién descrita es sumamente importante. Sin ella, el concepto de centro de masas sería bastante irrelevante. Las subpartes de un sistema se comportan como puntos situados en los centros de masas respectivos. Para ilustrar el poder de la afirmación anterior, usaremos poco más que la relación recién descrita para calcular el centro de masas de una placa triangular. Consideremos un triángulo rectángulo hecho de un material homogéneo³. Para determinar la posición del centro de masas del triángulo, procedemos a dividirlo imaginariamente en cuatro triángulos iguales. Como los cuatro triángulos que debemos considerar son semejantes nos centraremos en el estudio de uno solo. Un triángulo rectángulo queda completamente determinado por su hipotenusa y el ángulo que ésta forma con alguno de los catetos. Usando el sistema de referencia de la figura, fijando tanto c como α el triángulo queda completamente determinado. Ahora, la posición del centro de masas (X, Y) , debe también quedar determinado por dichas variables. Tenemos, entonces, que:

$$X = X(c, \alpha) \text{ e } Y = Y(c, \alpha).$$

Usando análisis dimensional obtenemos, simplemente:

$$X = c \times f(\alpha) \text{ y } Y = c \times g(\alpha),$$

donde f y g son funciones adimensionales de α . Si dividimos todos los lados del triángulo por la mitad, el ángulo α no cambia. De modo que la posición del centro de masas corresponde a $(X/2, Y/2)$.

³Homogéneo significa que su composición es idéntica en todas las partes del mismo. En un sentido estricto no existen materiales homogéneos, son una idealización. En un sentido práctico podemos decir que un material es homogéneo cuando las

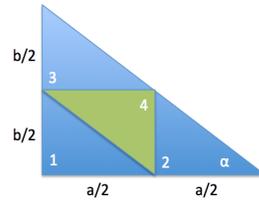


Figura 3.3: El triángulo se divide en 4 partes iguales.

Ahora podemos simplemente evaluar los centros de masa de cada uno de los triángulos que componen el triángulo grande. Para el primero ya lo hemos evaluado:

$$CM_1 = \left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2} \right).$$

El segundo es simplemente el primero desplazado hacia la derecha por $a/2$:

$$CM_2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{X}{2}, \frac{Y}{2} \right),$$

mientras que el tercero es el primero desplazado hacia arriba por $b/2$:

$$CM_3 = \left(\frac{X}{2}, \frac{b}{2} + \frac{Y}{2} \right).$$

Por último, el cuarto está invertido y desplazado hacia $(a/2, b/2)$,

$$CM_4 = \left(\frac{a}{2} - \frac{X}{2}, \frac{b}{2} - \frac{Y}{2} \right).$$

El centro de masas del todo es el centro de masas de las partes. Como cada triángulo tiene un cuarto de la masa tenemos:

$$CM = \frac{\frac{M}{4}CM_1 + \frac{M}{4}CM_2 + \frac{M}{4}CM_3 + \frac{M}{4}CM_4}{M} \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{4}(CM_1 + CM_2 + CM_3 + CM_4) \quad (3.7)$$

usando la parte anterior, tenemos,

$$CM = \frac{1}{4}(a + X, b + Y) \quad (3.8)$$

pero sabemos que el centro de masas es (X, Y) , de modo que:

$$(X, Y) = \frac{1}{4}(a + X, b + Y) \quad (3.9)$$

diferencias de composición entre sus partes son tan pequeñas que son incapaces de ser detectadas en un experimento específico. Es decir: ¡Un mismo objeto puede ser homogéneo o no dependiendo del experimento!

Se tienen dos ecuaciones: $X = a/4 + X/4$ y $Y = b/4 + Y/4$. De éstas se obtiene

$$(X, Y) = \frac{1}{3}(a, b). \quad (3.10)$$

3.3. Momentum de un sistema extendido

Supongamos que un sistema de partículas se encuentra en movimiento. El movimiento puede ser arbitrario. Enumeremos los componentes del sistema, de modo que el pedazo i -ésimo, de masa m_i , tiene una velocidad \vec{v}_i . Es fácil ver que el momentum del i -ésimo pedazo es $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$. El *momentum total del sistema*, o simplemente el *momentum del sistema*, se denota por \vec{P} y se define como la suma de los momenta de sus componentes:

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Una propiedad muy importante es que el momentum \vec{P} de un sistema elemental o compuesto resulta igual al producto de su masa total M por la velocidad de su centro de masas \vec{V} .

En efecto, consideremos la definición de centro de masas y derivemos con respecto al tiempo para obtener su velocidad. Usando propiedades de las derivadas y considerando que las masas m_i no varían en el tiempo:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}_{\vec{P}} = \frac{1}{M} \vec{P}.$$

Entonces

$$\vec{P} = M\vec{V}. \quad (3.11)$$

3.3.1. La segunda ley de Newton para un sistema extendido

Hemos denotado por \vec{V} la velocidad del centro de masas de un sistema. Su tasa de variación por unidad de tiempo corresponde a la aceleración del centro de masas y la denotamos por \vec{a} . En algunos textos se usa la notación \vec{a}_{CM} . Entonces,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

La aplicación de las 2da y 3ra leyes de Newton sobre cada uno de los N componentes del sistema permite encontrar una ecuación para el movimiento del centro de masas del sistema. Esta ecuación resulta independiente de las fuerzas internas que ligan al sistema y del eventual cambio de geometría que éste pueda experimentar.

Consideremos un sistema formado por N partículas interactuando entre ellas. El sistema no necesariamente es un sólido, puede tener cualquier constitución. Al analizar la i -ésima partícula, observamos

que sobre ella puede actuar una fuerza resultante externa que denotamos \vec{F}_i . También, sobre la misma partícula i -ésima interactúan las restantes $N - 1$ partículas. Por simplicidad, supondremos que las fuerzas de interacción actúan entre pares de partículas.

Denotemos $\vec{f}_{j/i}$ la fuerza que ejerce la componente j sobre la i , como se muestra en la Fig. 3.4. Naturalmente $\vec{f}_{i/i} = 0$, entonces la fuerza neta ejercida por todos los componentes sobre el i -ésimo es $\sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}$. La ecuación de movimiento de Newton para la partícula i es:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}. \quad (3.12)$$

La ecuación anterior corresponde a la ecuación de movimiento de la partícula i , y por lo tanto resume un total de N ecuaciones. Si sumamos todas ellas:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\frac{d\vec{P}}{dt}} = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}_{\vec{F}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{j/i}}_{\vec{0}}. \quad (3.13)$$

Aquí observamos que:

- la suma de derivadas es igual a la derivada de la suma, por lo cual $\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$,
- la resultante \vec{F} de las fuerzas externas es igual a la suma de todas ellas; y
- la suma de todos los *pares de fuerzas internas* es nulo, en virtud al principio de acción y reacción ($\vec{f}_{i/j} = -\vec{f}_{j/i}$).

Con lo anterior

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M\vec{V})}{dt} = M\dot{\vec{V}} = M\vec{a}. \quad (3.14)$$

Esta ecuación resume el comportamiento del centro de masas de un sistema cualquiera cuando sobre este actúa una fuerza externa neta \vec{F} . Este es un resultado totalmente general, independiente de si el sistema es sólido, líquido, gaseoso, granular, plástico, amorfo, etc. **El movimiento del centro de masas está**

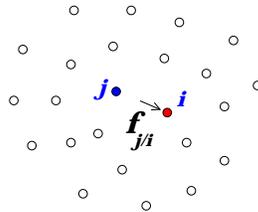


Figura 3.4: Un sistema de N cuerpos donde se muestra la fuerza ejercida por j sobre i .

determinado exclusivamente por las fuerzas externas. Notemos que este resultado es lo que, a priori, nos permitía el uso de las Leyes de Newton para sistemas extendidos. A lo largo de todo el primer semestre cuando hablábamos del movimiento de un cuerpo en respuesta a fuerzas, nos referíamos implícitamente al movimiento del centro de masas del cuerpo.

Hacemos notar que si no se cumpliera el principio de acción y reacción, entonces incluso si no hubiera fuerzas externas la aceleración del centro de masas podría no ser nula. El hecho que experimentalmente se observe que la aceleración del centro de masas es no nula sólo cuando fuerzas externas es una verificación cotidiana del principio de acción y reacción.

3.4. Energía cinética por rotación en torno a ejes fijos

Consideremos un sólido rotando con velocidad angular ω en torno a un eje fijo. Lo que hace simple el cálculo de la energía cinética de este sistema es el hecho de que cada molécula que compone al sólido describe un movimiento circunferencial, como se muestra en la Fig. 3.5.

La energía cinética es una cantidad aditiva, vale decir, si representamos el sistema como un conjunto de N celdas, cada una de masa m_i , con $i = 1, \dots, N$, entonces la energía cinética total del sistema está dado por

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Considerando que la celda i -ésima describe un trayecto de radio ρ_i con velocidad angular ω , entonces su rapidez es $\omega\rho_i$. Sustituyendo en la expresión para la energía cinética obtenemos

$$K = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2 \right]}_I \omega^2.$$

Aquí hemos definido el *momento de inercia* del sólido en torno al eje de rotación, que denotamos por I :

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2,$$

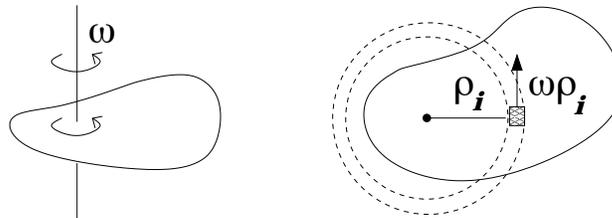


Figura 3.5: Un cuerpo plano rotando en torno a un eje fijo; a la derecha se ilustra una vista desde arriba.

con ρ_i la distancia al eje de la celda i -ésima, de masa m_i . Esta definición se extiende a cualquier sólido distribuido volumétricamente.

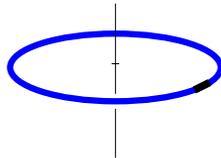
Observaciones:

1. El momento de inercia depende del eje con respecto al cual se evalúa.
2. No hay restricción a la orientación ni dirección de los ejes con respecto al cual se evalúe el momento de inercia.
3. El momento de inercia disminuye cuando la distribución de masas es muy próxima al eje considerado.
4. El momento de inercia expresa el grado de “porfía” de los sólidos frente a variaciones en su movimiento angular.

El momento de inercia de un aro:

Consideremos un aro de masa M y radio R . Calculamos su momento de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano del disco, que pasa por el centro de éste. Si discretizamos el aro en N segmentos, con N muy grande, entonces $\rho_i = R$, para todo i . Con ello

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R^2 = MR^2 .$$



Apéndices

3.5. Ejemplo: sistema de dos partículas

El centro de masas de un sistema, sea este cohesionado, disgregado, amorfo o deformable, es un punto. Lo interesante es que, sea cual sea la naturaleza del sistema y de sus fuerzas internas, el movimiento (aceleración, velocidad y trayectoria) de su centro de masas está determinado sólo por la acción de las **fuerzas externas**. Consideremos el caso de dos partículas idénticas A y B que no interactúan entre sí, cada una de masa m . Ambas se encuentran sobre una superficie horizontal lisa y el centro de masas se ubica en el punto medio entre ambas. Para fijar ideas, alineamos ambas partículas en un eje horizontal x , siendo x_A y x_B las coordenadas de A y B, respectivamente (Fig. 3.6).

Si una fuerza horizontal F_x actúa solamente sobre B, entonces la ecuación para el **sistema binario**, $\sum F_{ext} = M_{tot} a_{CM}$, implica

$$F_x = (m + m)a_{CM} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m}.$$

Por otro lado, al considerar sólo la partícula B, su aceleración es simplemente $a_B = F_x/m$. Con ello notamos que

$$a_{CM} = \frac{1}{2} a_B,$$

vale decir, el centro de masas acelera a una tasa igual a la mitad de lo que ocurre con B.

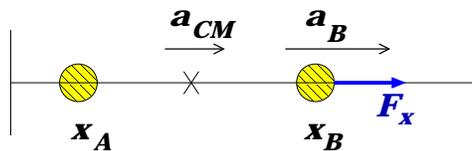


Figura 3.6: Sistema extendido compuesto por dos partículas A y B.

Lo anterior es consistente con el siguiente resultado para la localización del centro de masas:

$$R_x = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$

Si x_A no es alterada por la fuerza externa, entonces

$$\dot{R}_x = \frac{1}{2} \dot{x}_B \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\ddot{R}_x}_{a_{CM}} = \frac{1}{2} \underbrace{\ddot{x}_B}_{a_B}$$

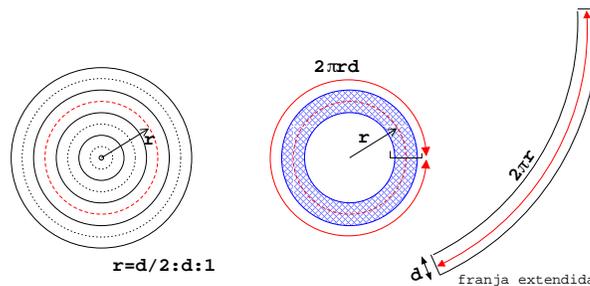
consistente con el resultado de más arriba.

3.6. Área del círculo y volumen de una esfera con MATLAB

Ilustramos el uso de MATLAB para el cálculo del área de un círculo y el volumen de una esfera. Si bien los resultados son conocidos, el procedimiento nos permitirá identificar estrategias para abordar problemas más complejos.

Para calcular el área del círculo de radio R , lo subdividimos en N anillos circulares, cada uno de ancho $d = R/N$. Si N es lo suficientemente grande, el área de un anillo de semiradio r es, en buena aproximación, igual a $2\pi r d$. Esto se ilustra en la figura de más abajo. La construcción $r=d/2:d:R$ define un arreglo de semiradios $d/2; 3d/2; \dots$

El uso de esta misma idea en el cálculo del volumen de una esfera se traduce en subdividirla en cascarones de igual espesor. El volumen de una cascara de semiradio r y grosor d será $4\pi r^2 d$. El volumen total será la suma de estas contribuciones.



El programa en MATLAB es el siguiente

```
% PROGRAMA PARA CALCULAR AREA DE UN CIRCULO Y VOLUMEN DE ESFERA
clear
R=1;
%----- Lazo de convergencia
for N=1:100
ri=0; rf=ri+R;
dr=(rf-ri)/N;
r=ri+dr/2:dr:rf;
%----- AREA=suma 2*Pi*r(i)*dr    VOL=suma 4*Pi*r(i)^2*dr
area=2*pi*sum(r)*dr;
vol=4*pi*sum(r.^2)*dr;
fprintf('área(%i) = %.7f    Vol(%i) = %.7f\n',N,area,N,vol);
end
fprintf('Vol exacto %.7f \n',4*pi/3)
```

3.7. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: Contraste el rol de las fuerzas internas en un sistema con las fuerzas externas sobre este.

Pregunta 2: Defina el momento de inercia de un sólido e indique al menos una de sus propiedades.

Pregunta 3: En no más de cinco líneas, establezca dos diferencias físicas (¡no algebraicas!) entre el momento de inercia de un sólido y su centro de masas.

Pregunta 4: Excluyendo el caso de un objeto puntual, ilustre con un ejemplo un caso de momento de inercia nulo.

Pregunta 5: En no más de cinco líneas, establezca dos diferencias físicas (¡no algebraicas!) entre el momento de inercia de un sólido y su momentum.

Pregunta 6: Considere un lápiz de grafito e indique un eje que lo atraviese con respecto al cual su momento de inercia sea máximo y un eje con respecto a cuál sea mínimo.

Pregunta 7: Considere el sistema conformado por granos de arena apilados sobre una mesa. Identifique las fuerzas actuando internamente en el sistema y las fuerzas externas actuando sobre el sistema.

Pregunta 8: Considere un sistema formado por dos partículas distantes en 1 cm. Indique un eje con respecto al cual su momento de inercia es nulo.

Pregunta 9: En no mas de cinco líneas, describa dos diferencias físicas entre la masa de un sistema y su centro de masas.

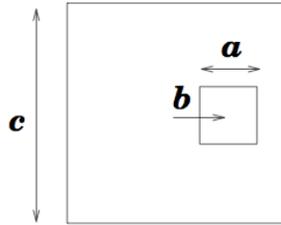
Pregunta 10: En no mas de cinco líneas describa la diferencia entre el momento de inercia de un sólido y su energía cinética.

Pregunta 11: Un canasto con manzanas reposa sobre una mesa. En el contexto del sistema formado por el canasto y las manzanas, indique dos fuerzas externas y dos fuerzas internas.

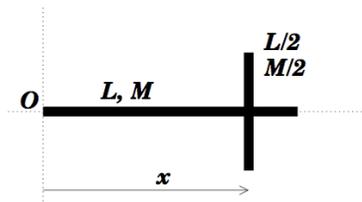
Pregunta 12: Describa dos ejemplos de cuerpos cuyos centros de masa se ubican en el exterior de ellos. Justifique su respuesta.

3.8. Ejercicios

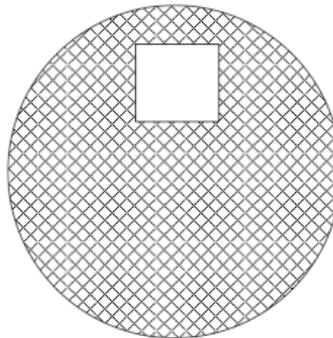
Ejercicio 1: Determine el centro de masas de una placa cuadrada de masa uniforme y ancho c , la cual tiene un orificio cuadrado de ancho a . El centro del orificio dista b del centro de la placa.



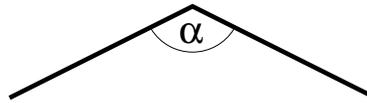
Ejercicio 2: En la figura se ilustra un sólido conformado por dos barras perpendiculares. Una de ellas es de longitud L y masa M , y la transversal es de longitud $L/2$ y masa $M/2$. Ambas barras se unen a una distancia x del extremo O de la barra mayor. Calcule y grafique la posición del centro de masas del sistema como función de x . Rotule adecuadamente su gráfico, indicando los puntos más característicos a resaltar.



Ejercicio 3: En la figura se muestra un círculo uniforme de radio R con una perforación cuadrada como se indica. La longitud de cada lado del cuadrado es b y su centro dista $R/2$ del centro del círculo. Determine la ubicación del centro de masas del círculo perforado.



Ejercicio 4: Se tiene una barra de longitud L homogénea y doblada en "V" como indica la figura. El ángulo de doblado de la barra es α .



1. Determine a qué distancia del vértice (donde se dobla la barra) se encuentra el centro de masa del objeto.
2. Verifique que el resultado tiene sentido si $\alpha = 0, \pi/2$ y π
3. Un fabricante entrega barras de $L = 1$ m con un ángulo α no muy preciso alrededor de $\pi/2$. En el control de calidad se puede medir la posición del centro de masas y de ahí obtener la calidad del ángulo. ¿Con qué precisión se debe medir la posición del centro de masa para poder determinar si ángulo está entre $\pi/2 - 0,01$ y $\pi/2 + 0,01$?
En la respuesta indique simplemente si se debe medir con una precisión de 1 m, 10 cm, 1 cm, 1 mm o 0,1 mm. Justifique.

Unidad 4A: Sólidos rígidos–Estática

4A.1. Introducción

Como vimos en el capítulo anterior, además del movimiento del centro de masas, los objetos pueden moverse de diversas otras formas: se pueden deformar, pueden rotar o fluir (en el caso de un líquido, por ejemplo). Incluso si un cuerpo es rígido, este puede rotar sin modificar la posición de su centro de masas. En este capítulo estudiaremos la leyes de la estática, que nos permitirán evaluar cuándo un cuerpo permanecerá en reposo. Las leyes de la estática son uno de los conocimientos empíricos más antiguos de nuestra civilización. Este conocimiento ha permitido la construcción de monumentos formidables que aún, con todos los recursos tecnológicos disponibles, nos sorprenden. El descubrimiento básico fue que era posible amplificar, mediante formas adecuadas, el efecto de una fuerza. De hecho, se le atribuye a Arquímedes haber dicho “*Dame un punto de apoyo y levantaré el mundo*” (Fig. 4A.1).

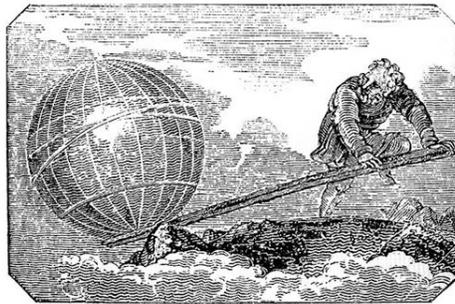


Figura 4A.1: Grabado mostrando a Arquímedes levantando al mundo con una palanca (*Mechanics Magazine*, Londres 1824).

La validez de estas leyes empíricas encuentra su fundamentación en las leyes de Newton, que como hemos visto se aplican a objetos puntuales. Veremos que las leyes de la estática aplicadas a un sólido se resumen en dos restricciones:

- Para que el centro de masas no se mueva se exige que la fuerza neta (suma de las fuerzas externas) sea nula.
- Para que el objeto no rote se exige que el *torque* neto (suma de los torques externos) sea nulo.

4A.2. Torque de una fuerza

El estudiante debe verificar, si no lo ha hecho ya, las siguientes observaciones elementales directamente en cualquier puerta cerca de donde esté leyendo estas notas.

- La fuerza necesaria para cerrar una puerta es menor si se ejerce lejos de las bisagras. Por el contrario mientras la fuerza se ejerza más cerca del borde fijo de la puerta, más costará cerrarla.
- La fuerza se debe ejercer perpendicularmente a la puerta. Si hacemos fuerza en la dirección hacia las bisagras no logramos girar la puerta.

Estas observaciones constituyen la motivación fundamental para el concepto que brinda el título a esta sección: el torque asociado a una fuerza. Si bien aún no hemos definido torque, algo que corregiremos enseguida, podemos describirlo como “fuerza de palanca” asociada a una fuerza. La idea es simple: consideremos un balancín equilibrado como el de la figura 4A.2. Para simplificar la discusión supongamos que la barra horizontal no tiene masa (masa despreciable). Los bloques en los extremos forman parte de lo que denominaremos “sistema”, de modo que el contacto de ellos con la tabla constituye una fuerza interna. Las fuerzas externas al sistema son: 1) el peso del bloque izquierdo, 2) el peso del bloque derecho y 3) la fuerza (normal) donde se apoya la tabla. La primera exigencia para que el balancín se encuentre en equilibrio estático es que la suma vectorial de todas ellas sea nula.

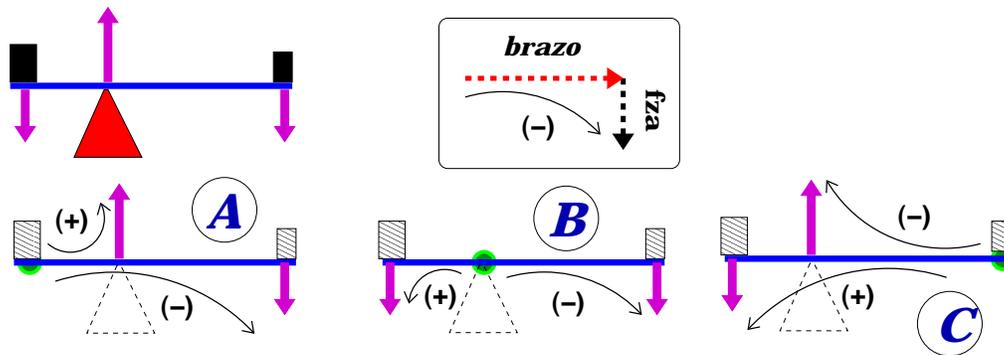


Figura 4A.2: Los torques producidos por las distintas fuerzas ejercidas sobre el balancín tienden a producir rotación en diferentes sentidos. (A) Si consideramos como punto de referencia el extremo izquierdo del balancín, entonces la normal ejercida por el pivote tiende a hacer rotar el balancín en sentido antihorario (+) y el peso de la masa de la derecha tiende a hacer rotar el balancín en sentido horario (-). (B) Considerando como punto de referencia el lugar de apoyo del balancín, el peso de la izquierda produce rotación en sentido (+) y el de la derecha en sentido (-). (C) Finalmente, tomamos como referencia el extremo derecho del balancín. Ahora la normal tiende a producir rotación en sentido (-) y el peso de la izquierda produce rotación en sentido (+).

Para que el sistema no gire debe existir una compensación entre las palancas –con respecto a un punto arbitrario– que hagan girar el sólido en un sentido contra las que lo harían girar en el sentido opuesto. Ello se ilustra en los esquemas A, B y C de la figura 4A.2, en los cuales se indica la “tendencia a giro” debido al par *brazo-fuerza*. Hemos convenido en este caso que los giros en el sentido anti-horario tienen

signo (+), mientras que los que giran en el sentido de los punteros del reloj tienen sentido de giro (-). Nótese que con respecto a los tres puntos considerados (denotados con los círculos verdes), los pares de fuerzas producen tendencia a girar en sentidos opuestos. La cuantificación de estos equilibrios requiere de la introducción de la noción de *producto cruz*.

4A.2.1. Producto cruz y torques

Como vimos anteriormente, el uso de palancas para levantar cuerpos es un hecho empírico en el cual, mediante una combinación de fuerza, puntos de apoyo y lugares donde se aplica la fuerza, podemos levantar cuerpos cuyo levantamiento directo sería imposible. Este hecho se explica mediante las ecuaciones de Newton, para lo cual requeriremos de una nueva construcción vectorial que llamaremos *producto cruz* o *producto vectorial* (Fig. 4A.3).

Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores, entonces el elemento

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B},$$

es un vector cuya

- dirección es perpendicular a ambos, \vec{A} y \vec{B} ;
- magnitud es $AB \sin(\theta_{AB})$, con θ_{AB} el ángulo entre los vectores \vec{A} y \vec{B} ; y
- sentido se define según la *regla de la mano derecha*⁴.

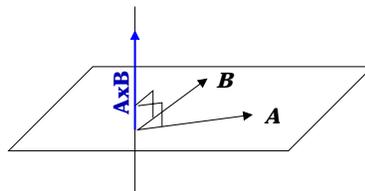


Figura 4A.3: Definición del producto cruz.

Con esta definición surgen las siguientes propiedades:

1. $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, para todo \vec{A} ;
2. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$;
3. $\vec{A} \times (\lambda \vec{B}) = \lambda (\vec{A} \times \vec{B})$; con λ un escalar;
4. $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$; $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$; y $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$;

⁴En ella, ambos vectores se disponen con sus colas coincidentes. Luego, el dedo anular de la mano derecha toma la dirección y sentido de \vec{A} , con la palma orientada hacia \vec{B} . El sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$ coincide con el del dedo pulgar.

5. $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta = A_{\perp} B = AB_{\perp}$, donde A_{\perp} es la magnitud de la componente de \vec{A} perpendicular a \vec{B} .
6. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$;
7. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{C} \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{B} \vec{C}$

Regla nemotécnica para evaluar el producto cruz:

Consideremos el producto cruz entre dos vectores $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. El producto cruz $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es un vector. Sus componentes son complicadas, como vemos a continuación:

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x). \quad (4A.1)$$

Para recordarlas es conveniente escribir el vector \vec{C} en forma de un determinante:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (4A.2)$$

cuya expansión nos entrega directamente la Ec. (4A.1).

4A.2.2. El torque de una fuerza

Se define el torque $\vec{\tau}_P$ ejercido por una fuerza \vec{F} aplicada en un punto P como

$$\vec{\tau}_P = \vec{r} \times \vec{F},$$

donde \vec{r} es el vector que une el origen O con el punto P (Fig. 4A.4). Físicamente, este producto representa la habilidad de la fuerza \vec{F} de inducir un giro del cuerpo en torno al origen O . Este origen es totalmente arbitrario; sin embargo, una vez es escogido, ha de mantenerse durante el desarrollo de las ecuaciones en cuestión.

4A.2.3. El torque debido a la gravedad terrestre

Un caso de interés particular es el torque sobre un sólido debido a la gravedad. Definiendo el torque total como la suma de todos los torques, el torque debido a la gravedad lo calculamos representando el sólido como una superposición de N celdas muy pequeñas, cada una de ellas afectada por el peso $\vec{w}_i = m_i \vec{g}$ (Fig. 4A.5).

El torque con respecto a un origen O resulta

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right)}_{M \vec{R}_{CM}} \times \vec{g} = \vec{R}_{CM} \times (M \vec{g}),$$

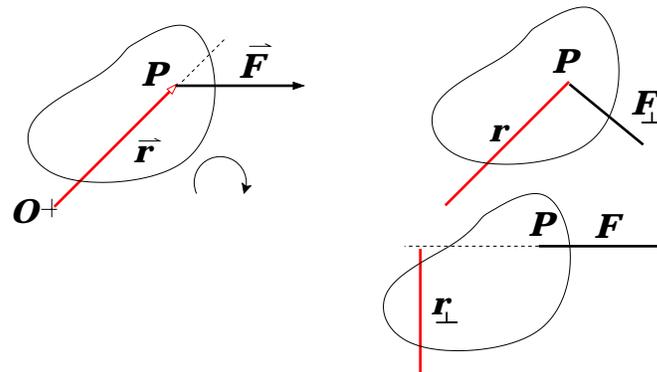


Figura 4A.4: Torque ejercido por una fuerza \vec{F} en un punto P . \vec{r} está medido desde el origen O .

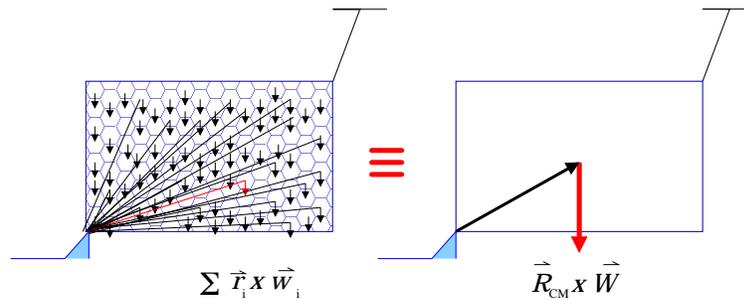


Figura 4A.5: El torque del peso de un sólido corresponde a la suma de los torques asociados al peso de cada celda y es igual al torque ejercido por el peso del sólido como si este actuara en el centro de masas.

donde hemos identificado \vec{R}_{CM} , el vector centro de masas del sólido con respecto a O . Este resultado nos permitirá una notable simplicidad en el estudio de sólidos.

4A.3. Las leyes de la estática

En una primera etapa nos limitaremos a la aplicación de las leyes de la estática. Su demostración la dejaremos para más adelante.

Consideremos un sólido sobre el cual actúan N fuerzas externas: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ como el de la figura 4A.6.

Para que el sistema esté en equilibrio estático es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- I.- $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \vec{0}$;
- II.- $\vec{\tau}_P(\vec{F}_1) + \vec{\tau}_P(\vec{F}_2) + \dots + \vec{\tau}_P(\vec{F}_N) = \vec{0}$;
- III.- $\vec{v} = \vec{0}$;

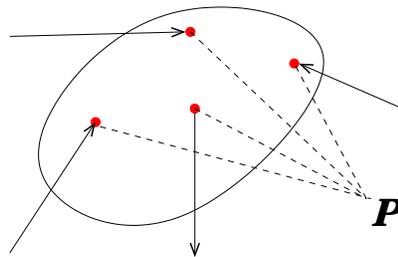


Figura 4A.6: Sobre el sólido actúan N fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$. P representa el origen del sistema de coordenadas.

IV.- $\vec{\omega} = \vec{0}$,

donde hemos indicado explícitamente el punto P con respecto al cual se determinan los torques.

Observaciones:

1. La suma de fuerzas es vectorial, de modo que muchas veces resulta conveniente expresarla en términos de componentes ortogonales, usualmente según ejes x, y, z escogidos adecuadamente.
2. Los torques se calculan con respecto a un punto P arbitrario. Recomendamos tomar torque con respecto a un punto donde se simplifique de mejor forma el cálculo.
3. En este curso nos centraremos en problemas en los cuales todas las fuerzas están contenidas en un plano. Si el punto P está en el mismo plano, entonces los torques serán perpendiculares a este. Con ello, basta con especificar si el torque
 - sale del plano o
 - entra al plano.

Uno puede convenir el signo (+) del torque para cualquiera de estos casos, quedando los torques en sentido opuesto con signo (-).

4A.4. Ejemplo.

En la figura 4A.7 se muestra una carga de masa m reposa sobre un tablón de longitud L y masa M distribuida uniformemente. El tablón está sostenido en sus extremos por dos cuerdas ideales que forman ángulos θ_A y θ_B con respecto la vertical. La carga se ubica en una posición tal que permite que el tablón se mantenga en forma horizontal.

- (a) Determine la ubicación de la carga con respecto al extremo A del tablón.
- (b) Verifique e interprete concisamente su respuesta para el caso $\theta_A = \theta_B$.

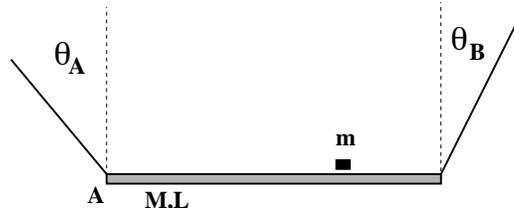


Figura 4A.7: Ejemplo: El tablón se encuentra en equilibrio estático. ¿Dónde se ubica la masa m ?

Solución:

- Las fuerzas sobre (tablón+carga): tensiones \vec{T}_A y \vec{T}_B , peso carga $m\vec{g}$ y peso tablón $M\vec{g}$ (Fig. 4A.8).

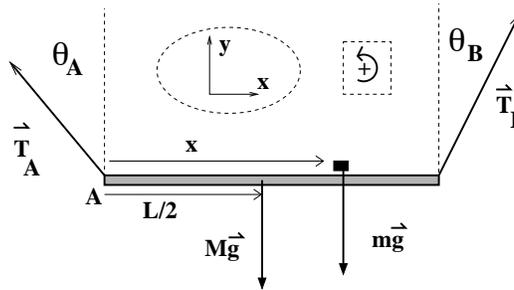


Figura 4A.8: Diagrama de cuerpo libre sobre el tablón. Se define además el sistema de coordenadas cartesiano (x, y) y la dirección positiva para el torque (saliendo de la hoja).

- Estática bajo traslación del centro de masas y proyecciones según \hat{x} e \hat{y} :

$$\vec{T}_A + \vec{T}_B + m\vec{g} + M\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4A.3)$$

$$-T_A \sin \theta_A + T_B \sin \theta_B + 0 + 0 = 0 \quad (\text{según } \hat{x}), \quad (4A.4)$$

$$T_A \cos \theta_A + T_B \cos \theta_B - mg - Mg = 0 \quad (\text{según } \hat{y}). \quad (4A.5)$$

- De lo anterior tenemos:

$$T_A \sin \theta_A = T_B \sin \theta_B, \quad (4A.6)$$

$$T_A \cos \theta_A + T_B \cos \theta_B = (m + M)g. \quad (4A.7)$$

- Estática bajo rotación (torques) con respecto a A y (torques positivos en sentido antihorario):

$$\vec{\tau}_A(\vec{T}_A) + \vec{\tau}_A(\vec{T}_B) + \vec{\tau}_A(m\vec{g}) + \vec{\tau}_A(M\vec{g}) = 0 \Rightarrow \quad (4A.8)$$

$$0 + LT_B \cos \theta_B - xmg - (L/2)Mg = 0 \Rightarrow \quad xmg = LT_B \cos \theta_B - MgL/2. \quad (4A.9)$$

- Buscamos x : reemplazar T_A de (4A.4) en (4A.5) y se obtiene

$$T_B(\cos \theta_A \sin \theta_B + \cos \theta_B \sin \theta_A) = (m + M)g \sin \theta_A \rightarrow T_B \sin(\theta_A + \theta_B) = (m + M)g \sin \theta_A.$$

- Combinar con Ec. (4A.7) para x y despejar:

$$x = \frac{L}{m} \left(\frac{(m + M) \sin \theta_A \cos \theta_B}{\sin(\theta_A + \theta_B)} - \frac{M}{2} \right)$$

- Caso límite $\theta_a = \theta_B$ (usar $\sin(2\beta) = 2 \sin \beta \cos \beta$):

$$x \rightarrow \frac{L}{m} \left(\frac{(m + M) \sin \theta_A \cos \theta_A}{2 \sin \theta_A \cos \theta_B} - \frac{M}{2} \right) \Rightarrow x \rightarrow \frac{L}{2},$$

vale decir, si los ángulos son iguales, la carga debe ubicarse simétricamente en el tablón.

4A.5. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: Una viga de largo L y masa M está firmemente empotrada a una pared vertical sobre la superficie de la Tierra. Dibujar la viga, un sistema de referencia y listar los componentes de la reacción de la pared sobre la viga en dicho sistema.

Pregunta 2: Explique si es posible que una escalera de largo L y masa M descansa en equilibrio estático sobre una superficie horizontal sin roce y una superficie vertical con roce.

Pregunta 3: Una viga de densidad uniforme tiene masa M y largo L . Si la viga se apoya en un punto fijo al piso a una distancia $L/4$ de un extremo, ¿Qué fuerza es necesario aplicar y dónde para que la viga esté horizontal en equilibrio estático?

Pregunta 4: Dado los vectores:

$$\vec{A} = 3\hat{x} + 4\hat{y} + \hat{z} \text{ kg}$$

$$\vec{B} = -\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z} \text{ m}$$

Encontrar $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ e indicar sus unidades.

Pregunta 5: Una lámina sólida de densidad constante se encuentra en reposo sobre una mesa. Si la forma de la lámina es la indicada en la figura 4A.9:

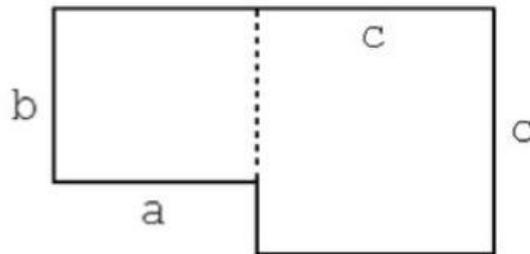


Figura 4A.9: La lámina se encuentra en reposo sobre una mesa

- Encuentre la posición de su centro de masa
- Encuentre el torque neto sobre la lámina

Pregunta 6: ¿Cuáles son las condiciones para que un cuerpo esté en equilibrio?

4A.6. Ejercicios

Ejercicio 1: Sobre una superficie inclinada rugosa se posa un bloque cuyo centro de masa está indicado por un punto en la figura. ¿En cuáles de las siguientes configuraciones puede estar el bloque en equilibrio estático?

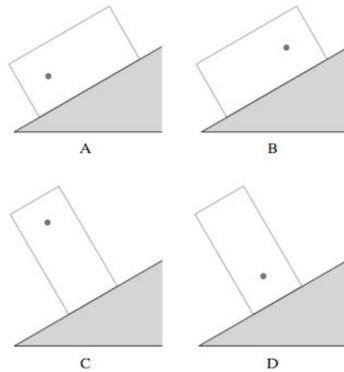


Figura 4A.10: Ejercicio 1. El punto representa el centro de masas del bloque.

Ejercicio 2: Una barra de masa M y largo L puede girar libremente en torno a su punto de apoyo O en una mesa horizontal en un laboratorio terrestre. La masa se mantiene en equilibrio estático con una masa m y una cuerda como indica la figura. Encuentre el ángulo α de equilibrio si $m/M = 0,5$.

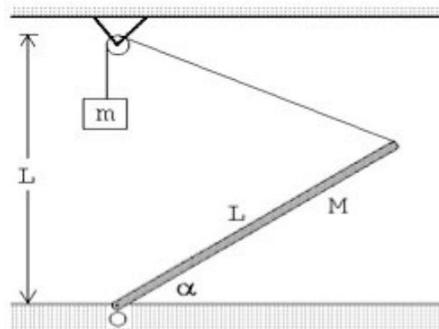


Figura 4A.11: Ejercicio 2

Ejercicio 3: Se quiere soltar una tuerca (*nut*) muy apretada y para ello dispone de una llave inglesa (o punta-corona, *wrench*) y una barra (*rod*). Ordene las siguientes configuraciones desde la más eficiente a la menos eficiente para soltar la tuerca (menor a mayor fuerza necesaria)

Ejercicio 4: Una barra de largo total 3 m y masa 10 kg se dobla en un ángulo $\pi/4$ rad a un metro de uno de sus extremos y se cuelga de una cuerda como muestra la figura 4A.13. Encuentre el valor de la tensión T y la masa M si el sistema se encuentra en equilibrio estático.

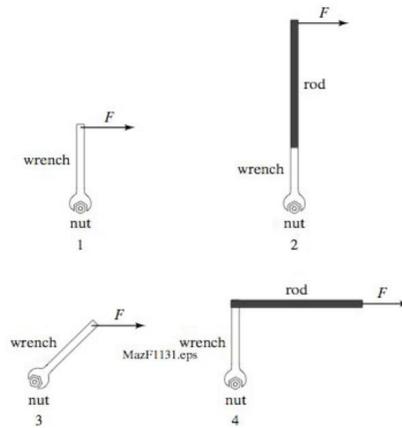


Figura 4A.12: Ejercicio 3

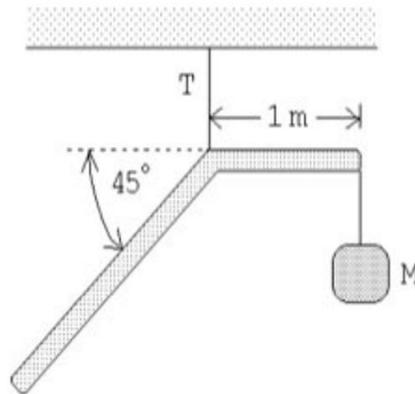


Figura 4A.13: Ejercicio 4

Ejercicio 5: Dos masas idénticas están unidas por una barra rígida sin masa. Si se aplica una fuerza F durante un pequeño intervalo de tiempo Δt en dos posiciones distintas como se indica en la figura 4A.14. ¿En cuál caso el centro de masa del sistema adquiere una mayor rapidez?

- en caso (a);
- en caso (b);
- es igual;
- depende del momento de inercia.

Ejercicio 6: Un vaso cilíndrico homogéneo (abierto por arriba) de radio basal a y altura b está posado sobre un plano inclinado en un ángulo β con respecto a la horizontal y no resbala debido a un pequeño tope (de altura despreciable) fijo sobre el plano (fig 4A.15). Suponga que el vaso se

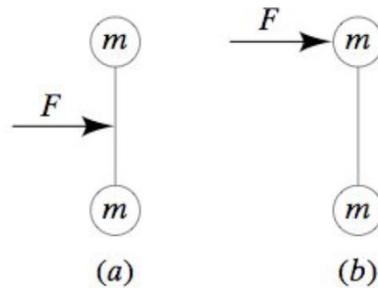


Figura 4A.14: Ejercicio 5

puede modelar como compuesto de una lámina sin espesor y de densidad superficial (masa por unidad de superficie) constante.

- Determine la posición del centro de masa del cilindro.
- Determine el ángulo de inclinación máximo de modo que el vaso no vuelque.

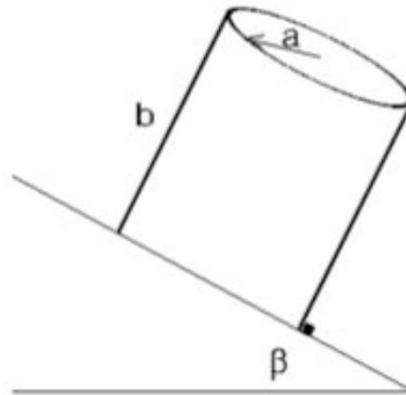


Figura 4A.15: Ejercicio 6

Ejercicio 7: Una masa de 1 kg se ata (con una cuerda ideal sin masa) al extremo de una barra de 1 m de longitud. ¿Cuál es la masa de la barra si el sistema se encuentra en equilibrio al aplicar una fuerza de soporte en la marca de 0,25 m como indica la figura 4A.16?

Ejercicio 8: Una esfera homogénea de radio R y masa M se corta en dos mitades. El sistema se dispone con las mitades cara a cara y la superficie de corte vertical. A fin de evitar que las semi-esferas se separen, se dispone una cuerda ideal con dos cuerpos idénticos de masa m cada uno como indica la figura 4A.17. No hay roce entre la cuerda y las semi-esferas. Determinar las masas mínimas a atar en los extremos de la cuerda de modo que las semi-esferas no se separen.



Figura 4A.16: Ejercicio 7

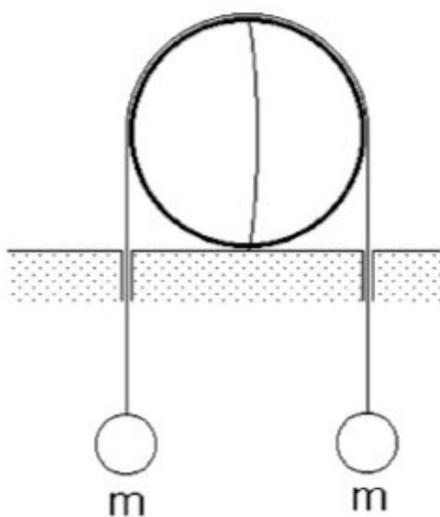


Figura 4A.17: Ejercicio 8

Unidad 4B: Sólidos rígidos–Energía cinética de rotación

4B.1. Conservación de la energía para una partícula

En el contexto de la mecánica newtoniana el principio de conservación de energía para una partícula se deriva directamente de la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$), de donde se obtiene el teorema del trabajo-energía: el trabajo neto realizado por las fuerzas externas actuando sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la propia partícula:

$$W_{neto} = K_f - K_i, \quad (4B.1)$$

donde $K = mv^2/2$ es la energía cinética de la partícula y el trabajo de una fuerza \vec{F} cuando la partícula se desplaza una pequeña distancia $d\vec{x}$ se evalúa como $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$ (se emplea el producto punto). Los subíndices i y f se refieren a la condición inicial y final, respectivamente. El trabajo neto corresponde a la suma de los trabajos individuales realizados por cada fuerza.

La evaluación del trabajo neto requiere integrar los valores dW entre una posición inicial y otra final a lo largo de la trayectoria de la partícula. Sin embargo, existen fuerzas en que el trabajo neto no depende del camino recorrido, sino que exclusivamente de la posición inicial y final de la partícula. Estas fuerzas se denominan conservativas e incluyen al peso y la fuerza elástica. En contraste, la fuerza de roce entre una partícula y una superficie (usualmente escrita como $-\mu_c N$) no es conservativa.

Como para una fuerza conservativa, \vec{F}_c , el trabajo efectuado es solo función de las coordenadas, se puede definir una función de energía potencial, U , tal que el trabajo realizado es igual a la disminución en la energía potencial:

$$W_c = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = -\Delta U = U_i - U_f. \quad (4B.2)$$

Consideremos que sobre una partícula solo actúa una fuerza conservativa \vec{F}_c . Entonces, combinando (4B.1) y (4B.2) obtenemos que $\Delta K = W_c = -\Delta U$, de donde:

$$\Delta(K + U) = 0, \quad (4B.3)$$

que es una forma de escribir la ley de la conservación de la energía mecánica. Podemos además definir la energía mecánica total del sistema como $E \equiv K + U$.

Como E permanece constante a medida que la partícula se desplaza, cualquier cambio de la energía cinética ocurre a expensas de un cambio igual (pero de signo opuesto) en la energía potencial. Si sobre el sistema actúa más de una fuerza conservativa y otras fuerzas no-conservativas (\vec{F}_{nc} , como el roce), obtenemos una ecuación más general:

$$\sum W(\vec{F}_{nc}) = \Delta(K + \sum U). \quad (4B.4)$$

La ecuación (4B.4) puede ser aplicada en la resolución de numerosos problemas de dinámica, en especial cuando $\sum W(\vec{F}_{nc}) \sim 0$. En estos casos debe conocerse completamente el estado de la partícula (posición y velocidad) en un instante y se desconoce una de las variables de estado en un instante posterior.

Como mencionábamos anteriormente, tanto el peso como la fuerza elástica son fuerzas conservativas, y sus energías potenciales son $U_g = mgy$ y $U_e = k\delta^2/2$, respectivamente. Aquí y corresponde a la altura sobre un nivel de referencia (arbitrario pero fijo). Si la partícula está sobre (bajo) ese nivel $y \geq 0$ ($y \leq 0$). Además, δ representa la deformación (compresión o deformación) de un resorte adherido a la partícula, g es la magnitud de la aceleración de gravedad y k la constante elástica del resorte.

Ejemplo: Un objeto se suelta desde una altura h . ¿A qué velocidad impacta contra el suelo?

Solución: Despreciando el roce con el aire, podemos aplicar la conservación de energía mecánica entre el instante inicial (objeto se suelta desde el reposo) y final (objeto impacta el suelo):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg0$$

de donde obtenemos directamente

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

4B.2. Conservación de la energía para un cuerpo rígido

Veamos ahora cómo se aplica el principio de conservación de energía a un cuerpo rígido. Recordemos aquí que el cuerpo rígido puede trasladarse y rotar pero no sufre deformaciones de su forma (por eso es rígido). En consecuencia, la posición relativa entre las partículas que lo forman no cambia en el tiempo.

Cada partícula está sometida a fuerzas externas (por ejemplo, el peso) y fuerzas internas (por ejemplo, las fuerzas que ejercen las partículas vecinas). Se puede demostrar (se verá con detalle en el curso *Mecánica*) que las fuerzas internas en un sólido rígido **no realizan trabajo neto**. Es decir, las fuerzas internas pueden transferir energía de una partícula a otra, pero lo que una gana lo pierde exactamente la otra.

Consideremos el caso simple en que la única fuerza externa es el peso. Entonces, para la partícula n -ésima (n de un total de N) se puede escribir la ecuación (4B.4)

$$\sum_k W_{nk}(\vec{F}_{nc}) = \Delta(K_n + U_{gn}), \quad (4B.5)$$

donde $W_{nk}(\vec{F}_{nc})$ es el trabajo que le realiza la partícula k a la partícula n (de la fuerza interna), K_n es la energía cinética de la partícula n y U_{gn} es la energía potencial gravitatoria de la partícula n . Esta expresión se ve compleja, pero si se suma para todos los valores de n , se obtiene que se cancelan los trabajos de las fuerzas internas, obteniéndose

$$\Delta \left(\sum_n K_n + \sum_n U_{gn} \right), \quad (4B.6)$$

que corresponde a la conservación de energía de un sólido. En las siguientes secciones se verá que esta expresión se simplifica aún más.

4B.2.1. Energía cinética de rotación

Si el cuerpo está rotando con respecto a un eje fijo, todas las partículas tienen igual velocidad angular, ω , y la velocidad (lineal) de la partícula n -ésima es $\rho_n \omega$, donde ρ_n es el radio de la órbita que describe la partícula en torno al eje de rotación. Entonces, la energía cinética del sistema resulta ser:

$$K = \sum K_n = \sum \left(\frac{1}{2} m_n v_n^2 \right) = \frac{1}{2} \sum (m_n \rho_n^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (4B.7)$$

La cantidad I se denomina momento de inercia, y es una propiedad del cuerpo que juega un papel de gran importancia en la dinámica de las rotaciones. Consideremos su definición $I = \sum (m_n \rho_n^2)$. Es claro que I crece con la masa total del cuerpo, pero depende críticamente de su forma y del eje de rotación. A igual masa, dos cuerpos pueden tener muy diferentes momentos de inercia en virtud de cuán cercana o lejana esté la masa del eje de rotación.

4B.2.2. Energía potencial gravitatoria

La energía potencial gravitatoria de cada partícula del sólido es $U_{gn} = g m_n y_n$. En la expresión (4B.6) aparece la suma de estas energías que, de acuerdo a la definición del centro de masa, es

$$\sum_n U_{gn} = \sum_n g m_n y_n = M Y_{cm} g, \quad (4B.8)$$

donde Y_{cm} es la altura del centro de masa. Luego, la energía potencial gravitatoria de un sólido es igual a la de una partícula puntual de masa igual a la del sólido y ubicada a la altura del centro de masa del mismo.

En resumen, la conservación de energía para un sólido rígido es

$$\Delta(K + U_g) = 0, \quad (4B.9)$$

con $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ y $U_g = M Y_{cm} g$.

4B.3. El momento de inercia

En general podemos expresar $I = \gamma ML^2$, donde M es la masa total del cuerpo, L es una dimensión característica (radio de un disco, largo de una barra) y γ un valor numérico que depende de cada caso. El valor de I es dependiente del eje en torno al cual ocurre la rotación del cuerpo. Para un cuerpo cuya forma sea relativamente simple, el valor de I se obtiene empleando cálculo integral. Para cuerpos aun más simples, I puede obtenerse aplicando la sumatoria anterior.

Por ejemplo, el momento de inercia de un anillo de material uniforme, masa M y radio R en torno a un eje que pasa por su centro (Fig. 4B.1 izquierda) es: $I = \sum(m_i r_i^2) = \sum(m_i R^2) = MR^2$

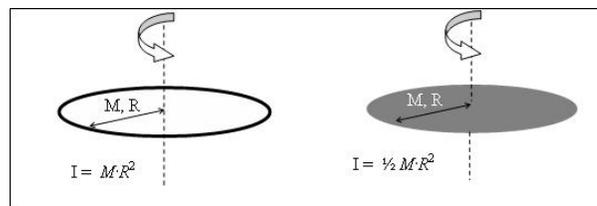


Figura 4B.1: Momento de inercia de un aro y un disco

¿Qué pasa si la misma masa M se distribuye ahora en un disco de radio R (Fig. 4B.1 derecha)? Muchas partículas que antes estaban en la periferia se mueven ahora hacia el centro del disco, haciendo disminuir el momento de inercia. De hecho, en este caso $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Propuesto: ¿Cuál es el valor de I si se trata de un cascarón cilíndrico o un cilindro sólido de radio R y masa M , que rota en torno a su eje de simetría?

Consideremos ahora el momento de inercia de una barra delgada de masa M y largo L que puede rotar en torno a uno de sus extremos. En este caso, el método de la sumatoria $I = \sum(m_i r_i^2)$ también funciona. Para eso la barra se divide en n trozos, cada uno de largo $d = L/n$ y masa $\Delta m = M/n$. Al final de la sumatoria, se debe tomar el límite de $N \rightarrow \infty$ (con lo cual tanto d como $\Delta m \rightarrow 0$). En el libro *Introducción a la Mecánica* (Nelson Zamorano) se hacen estas sumatorias en forma explícita (págs. 298-299), de donde $I_o = \frac{1}{3}ML^2$

El valor anterior es el momento de inercia de una barra respecto a su extremo. ¿Qué pasa si queremos calcular I de una barra respecto a su punto central? Aquí podemos explotar el hecho de que I es una propiedad aditiva, así que este nuevo momento de inercia se calcula como la suma de dos momentos de inercia: uno de la barra al lado derecho del centro y la otra al izquierdo, ambas de masa $M/2$ y largo $L/2$.

$$I_c = I_{izq} + I_{der} = 2I_o = 2 \left(\frac{1}{3} \frac{M}{2} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{12}ML^2.$$

Propuesto: Calcule el momento de inercia I de una barra de masa M y largo L en torno a un punto ubicado a $L/4$ de uno de sus extremos.

En la figura 4B.2 se muestran los momentos de inercia de algunos cuerpos rígidos.

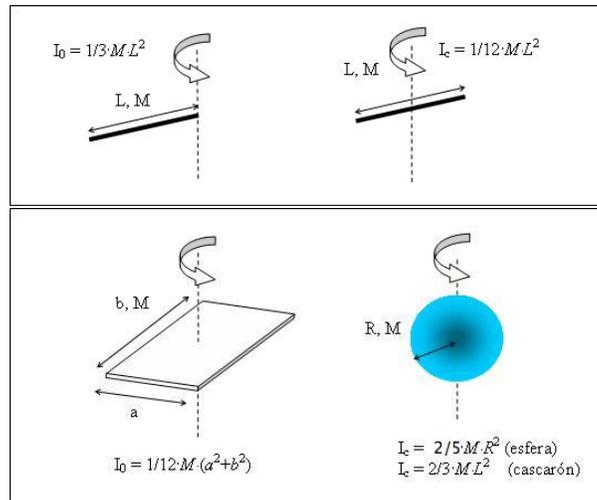


Figura 4B.2: Momento de inercia de una barra delgada con respecto a uno de sus extremos (arriba, izquierda) y a su centro (arriba, derecha), de una lámina (abajo, izquierda), de una esfera llena y un cascarón esférico (abajo, derecha)

4B.3.1. El centro de masa de un cuerpo rígido

Previamente definimos la posición del centro de masa de un sistema extendido como:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i. \quad (4B.10)$$

También es conveniente recordar que al considerar un sistema compuesto por varios cuerpos, podemos calcular primero la posición del centro de masas de cada cuerpo, y luego sumarlos para encontrar el centro de masas del sistema. En otras palabras, cada cuerpo es tratado como una partícula con la masa concentrada en su propio centro de masas y luego empleamos la ecuación (4B.10).

Ejemplo: Considere un sistema formado por una barra de largo L y masa M distribuida en uniformemente, unida a una esfera pequeña de masa $2M$ en uno de sus extremos. En un cierto instante la barra está dispuesta en forma horizontal, pero luego rotará en torno a uno de sus extremos hasta quedar en posición vertical (ver figura 4B.3). Pongamos nuestro sistema de referencia en el punto de rotación.

Cuando la barra está horizontal, la posición del centro de masas es:

$$\vec{R} = \frac{2M\vec{R}_{esfera} + M\vec{R}_{barra}}{3M} = -\frac{2ML + ML/2}{3M} \hat{i} = -\frac{5}{6}L\hat{i}.$$

Notar que hemos empleado el hecho de que el centro de masa de una barra homogénea está en su centro (Unidad 3). El signo $-$ y el vector unitario \hat{i} en la posición del centro de masas aparecen por la posición específica del sistema en este instante. Más importante, sabemos que el centro de masas se ubica a $5L/6$ del largo desde el extremo donde no está la esfera.

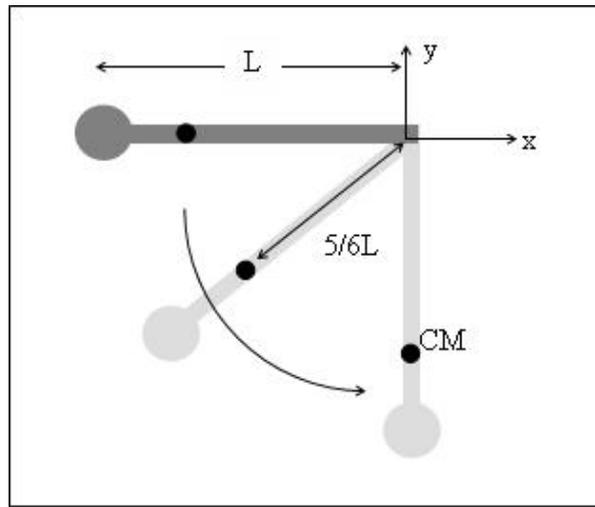


Figura 4B.3: Centro de masa de una barra + esfera

¿Cuál es la posición del centro de masas cuando el sistema está vertical? No necesitamos calcular la posición del centro de masas nuevamente. Por simple inspección podemos escribir: $\vec{R}_f = -5/6L\hat{j}$.

4B.3.2. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

Cuando un cuerpo tiene algún tipo de simetría, es relativamente sencillo conocer el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa. El teorema de Steiner nos permite encontrar fácilmente el momento de inercia con respecto a cualquier eje paralelo al anterior, desplazado una distancia R . En su demostración empleamos la geometría y notación de la figura 4B.4:

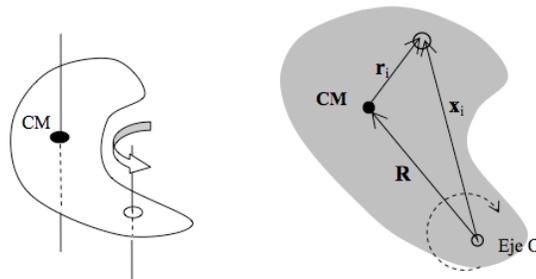


Figura 4B.4: Geometría para el teorema de ejes paralelos.

Por definición $I_O = \sum m_i x_i^2$, e $I_{CM} = \sum m_i r_i^2$. Expresamos el vector $\vec{x}_i = \vec{R} + \vec{r}_i$, luego

$$\vec{x}_i^2 = (\vec{R} + \vec{r}_i)^2 = \vec{R}^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2,$$

$$I_O = \sum m_i [\vec{R}^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2],$$

pero por definición del centro de masa (ver Unidad 3).

$$\sum m_i \vec{r}_i = 0,$$

luego

$$I_O = \sum m_i [\vec{R}^2 + \vec{r}_i^2] = MR^2 + I_{CM}.$$

Ejemplo: Consideremos una barra delgada en forma de “L” como se muestra en la figura 4B.5, con dos partes iguales cada una de masa M y largo L . Calculemos el momento de inercia respecto su extremo B. Recuerde que el momento de inercia de una barra de largo L y masa M con respecto a su centro de masas es $ML^2/12$.

Aunque se trata de un cuerpo sólido, haremos el cálculo descomponiendo la L en sus dos partes (vertical y horizontal): $I_B = I_V + I_H$. En cada caso aplicamos Steiner:

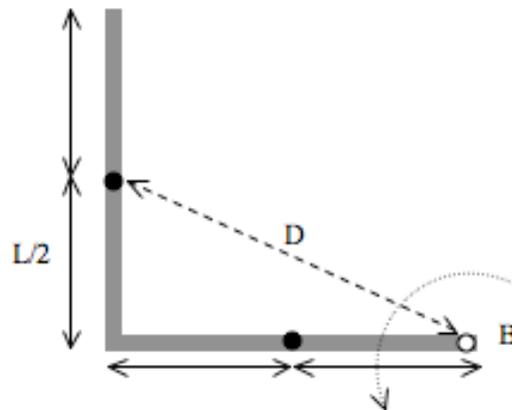


Figura 4B.5: Barra en “L”.

$$I_H = I_{CM} + M(L/2)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2,$$

$$I_V = I_{CM} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{5}{4}ML^2 = \frac{4}{3}ML^2,$$

luego

$$I_B = \frac{5}{3}ML^2.$$

Problema propuesto: Se tiene un disco homogéneo de radio R y masa M al cual se adhiere radialmente una barra de largo L y masa m . Calcule el momento de inercia del sistema con respecto al centro del disco y a un extremo de la barra. Estudie los casos límites $L \ll R$, $m \ll M$, $m \gg M$.

4B.4. Energía de rotación de una barra en torno a un eje fijo.

Consideremos el siguiente ejemplo. Una barra uniforme de largo L y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por uno de sus extremos (figura 4B.6). La barra se suelta de la posición horizontal. ¿Cuál es la velocidad angular de la barra cuando ésta pasa por la vertical? ¿Cuál es la velocidad del centro de masas en ese instante?

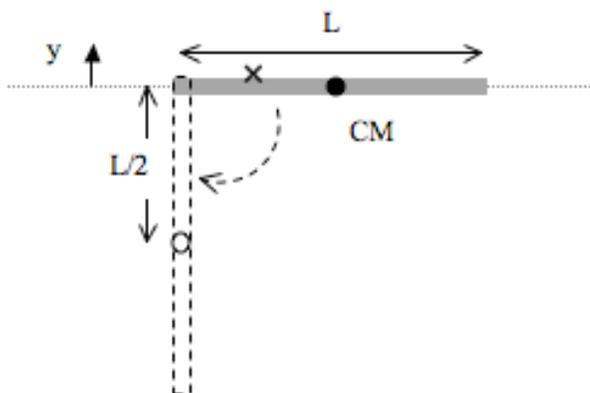


Figura 4B.6: La barra gira con respecto a su extremo. ¿Qué velocidad de rotación tiene cuando su extremo pasa por el nivel más bajo?

Podemos resolver este problema fácilmente considerando la energía mecánica del sistema $E = K + U_g$. Para U_g tomemos como referencia el nivel donde la barra está horizontal. Como la rotación ocurre en torno a un extremo, $I_0 = ML^2/3$. Suponiendo que la barra es uniforme, su centro de masas está en su centro geométrico. Si la barra parte del reposo se tiene $E_i = K_i + U_{gi} = 0 + 0$ y a energía final es

$$E_f = \frac{1}{2}I_0\omega_f^2 + Mgy_f = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\omega_f^2 + Mg\left(-\frac{1}{2}L\right) = 0,$$

expresión de la que se obtiene la velocidad angular final y la velocidad final del centro de masa

$$\begin{aligned}\omega_f &= \sqrt{3g/L}, \\ v_{CMf} &= \frac{1}{2}L\omega_f = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}.\end{aligned}$$

¿Qué pasa si la barra rota en torno al punto marcado por una x ?

Consideremos un cuerpo rígido sobre el cual solo actúa el peso y que puede rotar en torno a un eje. Si el cuerpo se suelta desde el reposo, podemos evaluar la velocidad angular en cualquier otro instante (por ejemplo, cuando su centro de masas pasa por su punto más bajo) empleando la conservación de la energía mecánica:

$$\omega_f = \left(\frac{2Mg\Delta y}{I}\right)^{1/2},$$

donde Δy es el cambio en la posición del centro de masa. Como I es proporcional a M , el resultado anterior es independiente de la masa del cuerpo. De esta forma, la velocidad angular final crece con

el desplazamiento del centro de masa (se está transformando energía potencial gravitacional en energía cinética) pero disminuye con I . Si realizamos el mismo experimento pero cambiamos su geometría, no es simple determinar si aumenta o disminuye ω_f , pues cambian tanto I como Δy . Por ejemplo, si hacemos que la masa quede más cercana al eje de rotación, disminuyen I y Δy (ver figura 4B.7).

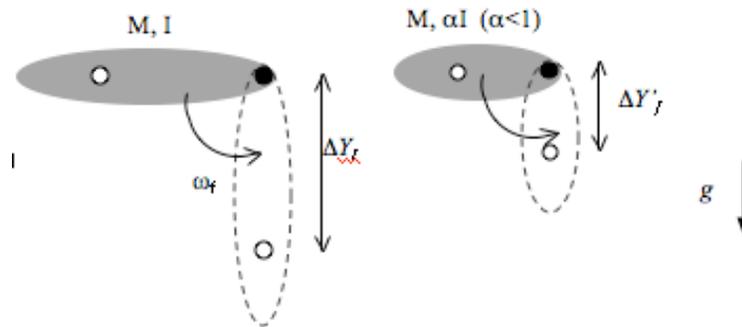


Figura 4B.7: Dos cuerpos de igual masa pero distinta forma, ¿cuál cae más rápido?

4B.5. Teorema de los ejes perpendiculares

Para el cálculo de momentos de inercia de cuerpos planos resulta muy útil el uso del *teorema de los ejes perpendiculares*. Este teorema establece que si se conoce el momento de inercia de un cuerpo a lo largo de dos ejes mutuamente perpendiculares, que llamaremos xx' e yy' , entonces el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a los anteriores, I_{\perp} , está dado por la suma de ellos. Simbólicamente,

$$I_{\perp} = I_{xx'} + I_{yy'}$$

donde los ejes están definidos en la figura 4B.8.

Antes de demostrar este teorema examinemos sus ventajas. Consideremos primero un aro de masa M y radio R (figura 4B.8(A)). Sabemos que el momento de inercia con respecto a un eje que pasa axialmente por su centro es

$$I_{\perp} = MR^2$$

Si consideramos dos ejes perpendiculares, en el plano del aro, que se cruzan mutuamente en el centro, entonces los momentos de inercia con respecto a cada uno de estos ejes será el mismo (por simetría). Llamemos a cada uno de ellos I_o . Aplicando el teorema anterior tenemos

$$MR^2 = I_{\perp} = I_o + I_o \quad \Rightarrow \quad I_o = \frac{MR^2}{2}$$

Otro ejemplo interesante es el momento de inercia de una placa uniforme de masa M , ancho a y longitud b . Sabemos que el momento de inercia de una barra de longitud L con respecto a un eje que pasa por uno de sus extremos, perpendicular a la barra, vale $ML^2/3$. No es difícil convencerse de que

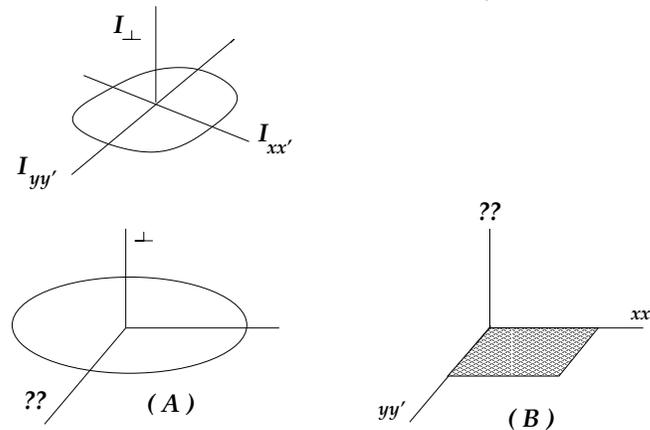


Figura 4B.8: Sistema de ejes para el teorema de ejes perpendiculares. (A): aro, (B): placa rectangular.

este momento de inercia es el mismo al de una placa de longitud L con respecto a un eje que pasa por su base, sin importar la dimensión lateral de la placa. En términos concretos la placa puede representar una puerta que pivota sobre las bisagras. (ver figura 4B.9).

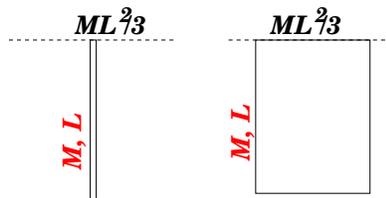


Figura 4B.9: Teorema de ejes perpendiculares para una placa rectangular

Usando el teorema de los ejes perpendiculares podemos calcular el momento de inercia de la placa rectangular con respecto a un eje perpendicular a su plano, que pasa por una de sus esquinas. Escribimos (ver recuadro (B) de la figura 4B.8),

$$I_{\perp} = I_{xx'} + I_{yy'} = \frac{Ma^2}{3} + \frac{Mb^2}{3} \rightarrow I_{\perp} = \frac{M}{3}(a^2 + b^2).$$

La demostración del teorema de los ejes perpendiculares es bastante simple. Consideremos un cuerpo plano, coplanar con los ejes cartesianos x, y (figura 4B.10). El momento de inercia con respecto al eje z , perpendicular a los anteriores, está dado por

$$I_z \equiv I_{\perp} = \sum_i m_i \rho_i^2,$$

donde m_i es la masa de la i -ésima celda, distante en ρ_i al eje z .

Sin embargo, podemos escribir

$$\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2,$$

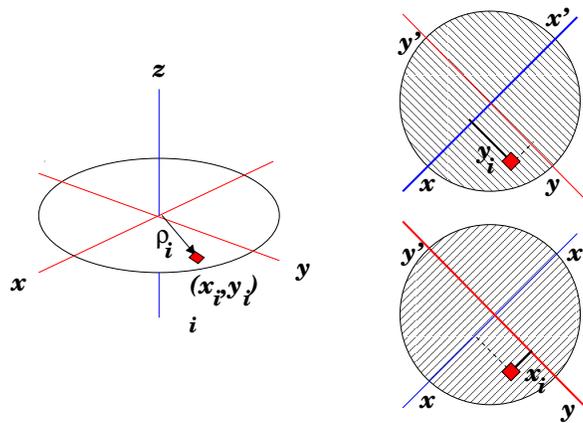


Figura 4B.10: Teorema de los ejes perpendiculares para un cuerpo plano.

lo que nos permite reescribir la sumatoria, separándola en dos sumandos

$$I_{\perp} = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_{yy'} + I_{xx'}$$

demostrándose la propiedad. Nótese que hemos denotado $I_{xx'} = \sum_i m_i y_i^2$. Es un buen ejercicio convencerse de esta relación.

Abordemos un ejemplo simple. Una placa cuadrada de lados de longitud a está pivotada en una de sus esquinas mediante un eje perpendicular a su plano. Inicialmente la placa se suelta del reposo como se indica en la figura 4B.11. Queremos saber su velocidad angular una vez que ha girado en 90 grados.

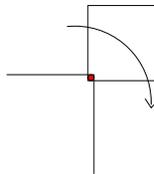


Figura 4B.11: La placa se suelta del reposo. ¿Cuál es su velocidad angular cuando ha girado 90 grados?

La conservación de energía implica $(K + U_g)_A = (K + U_g)_B$, donde A indica configuración inicial y B la final. Así,

- En el estado A , $K = 0$ y $U_g = Mga/2$.
- En el estado B : $K = (1/2)I\omega^2$ y $U_g = -Mg/2$.
- El momento de inercia en este caso resulta $I = 2Ma^2/3$, con lo cual,

$$\omega^2 = 3g/a.$$

4B.6. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: Enuncie el teorema de Steiner e ilústrelo con un ejemplo simple de su elección.

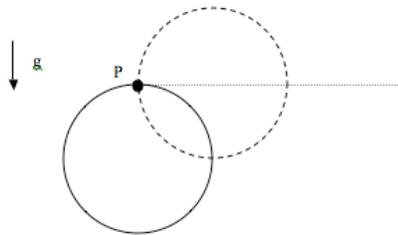
Pregunta 2: En relación a la sesión práctica de esta semana, ¿qué rol desempeña el momento de inercia en las ecuaciones utilizadas para el estudio de la “T”?

Pregunta 3: Empleando el principio de conservación de energía, determine la altura H a la cual llega una partícula de masa m si se lanza hacia arriba con velocidad inicial v_0 en presencia del campo gravitacional terrestre.

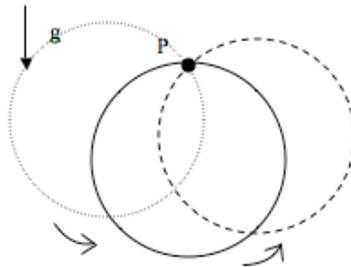
Pregunta 4: Empleando el principio de conservación de energía, determine la velocidad que adquiere una partícula de masa m cuando se suelta desde una altura H en presencia del campo gravitacional terrestre.

4B.7. Ejercicios

Ejercicio 1: Un disco uniforme de masa M y radio R puede girar libremente en torno a un eje sin fricción que pasa por un punto en su borde (P). Inicialmente el disco está con su centro de masa en su posición más baja y se le golpea de manera que su centro adquiere instantáneamente una rapidez v_o . Determine el valor de v_o para el centro del disco alcance el nivel horizontal en línea con el eje de rotación. Recuerde que el momento de inercia de un disco respecto a un eje que pasa por su centro de masa es $I_{CM} = 1/2MR^2$.



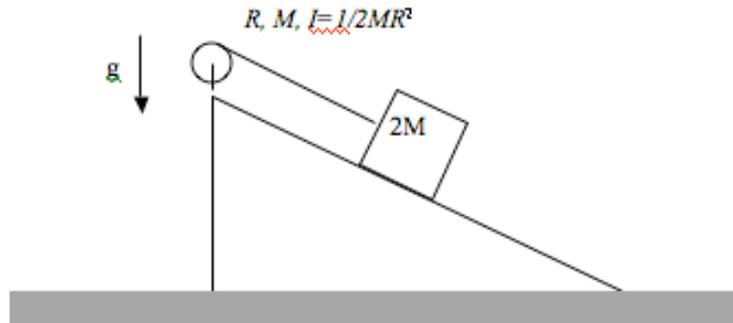
Ejercicio 2: Un aro uniforme de masa M y radio R puede girar libremente en torno a un eje sin fricción que pasa por un punto en su borde (P). Inicialmente el aro está con su centro de masa en su posición más baja y se le golpea de manera que su centro adquiere instantáneamente una rapidez v_o hacia la derecha. Determine el mínimo valor de v_o para el aro vuelva a pasar por su posición más baja desde la izquierda. Recuerde que el momento de inercia de un aro respecto a un eje que pasa por un centro de masa es $I_{CM} = MR^2$.



Ejercicio 3: Una masa $2M$ se ata a una cuerda que está enrollada en el borde de un disco de radio R y masa M . El disco puede girar sin roce respecto a un eje que pasa por su centro. La masa posa sobre un plano inclinado y no hay roce entre ambos.

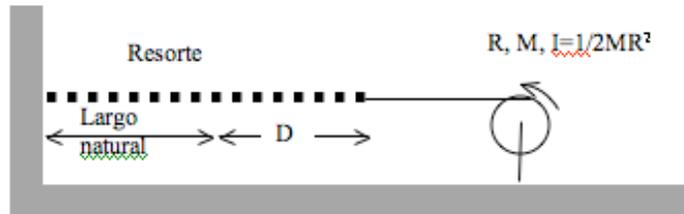
La masa se suelta del reposo y comienza a bajar sobre el plano inclinado por acción de la gravedad. La cuerda se va desenrollando del disco, haciéndolo girar de manera que en todo momento $v_{masa} = R\omega$, donde v_{masa} es la rapidez con que desciende la masa y ω la velocidad angular del disco.

Determine la velocidad de la masa cuando esta ha descendido una altura H desde su posición inicial.



Ejercicio 4: Un resorte de constante elástica k se une a un disco de masa M y radio R mediante una cuerda ideal. El otro extremo del resorte está unido a una pared fija. La cuerda se enrolla en el borde del disco. En su condición inicial el resorte está elongado una distancia D y el sistema se suelta del reposo. A medida que el resorte se recupera hacia su largo natural, la cuerda se va desenrollando y en consecuencia el disco va girando.

Determine la velocidad angular del disco cuando el resorte alcanza su largo natural.



Unidad 4C: Sólidos rígidos–Torque y momento angular

4C.1. Torque y momento angular para una partícula

Se sabe que la dinámica de una partícula está descrita por la ecuación de Newton

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (4C.1)$$

A partir de la ecuación de Newton se puede encontrar otra ecuación de movimiento, que a veces es más simple de estudiar pero que es más limitada en su aplicación. Para hacerlo consideremos la definición de *momento angular* \vec{L}

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}, \quad (4C.2)$$

donde \times es el producto cruz que se definió en la Unidad 3.

Se procede a calcular la derivada de \vec{L} . Para eso se recuerda que el producto cruz es una multiplicación de manera que se aplica la regla de la derivada del producto ($d(\vec{A} \times \vec{B})/dt = (d\vec{A}/dt) \times \vec{B} + \vec{A} \times (d\vec{B}/dt)$). Suponiendo que la masa es constante,

$$\dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}},$$

pero $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ de lo que resulta que el primer término es $m\vec{v} \times \vec{v}$, que es nulo por las propiedades del producto cruz. Además, el segundo término puede ser escrito como $\vec{r} \times m\dot{\vec{a}}$ que, usando la ley de Newton (4C.1) queda

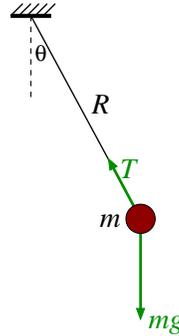
$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Esta última es precisamente la definición de torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, obteniéndose la llamada *ecuación de torque* para una partícula.

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}. \quad (4C.3)$$

4C.1.1. Ejemplo

Para ilustrar cómo se usa esta ecuación consideremos un péndulo simple de masa m que cuelga de una cuerda ideal de largo R como el de la figura 4C.1.

Figura 4C.1: Péndulo puntual de masa m y largo R .

El momento angular se obtiene de la definición (4C.2) $L = m\vec{r} \times \vec{v}$.

La partícula está a una distancia R del origen y el módulo de la velocidad es $v = R\dot{\theta}$ por ser un movimiento circular. Además, como la velocidad es perpendicular al vector posición se tiene $|\vec{L}| = mR^2\dot{\theta}$. Por último la dirección de \vec{L} es perpendicular a la posición y velocidad, es decir, sale del plano del papel hacia afuera. Si definimos el vector \hat{k} como el que es perpendicular al plano se tiene

$$\vec{L} = mR^2\dot{\theta}\hat{k}.$$

Para calcular la derivada de \vec{L} notamos que todas las magnitudes son constantes salvo la velocidad angular $\dot{\theta}$. Luego

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= mR^2\ddot{\theta}\hat{k} \\ &= mR^2\alpha\hat{k},\end{aligned}$$

donde se ha definido la *aceleración angular* $\alpha = \ddot{\theta}$.

Para calcular el torque notamos que sobre la masa actúa su peso $m\vec{g}$ y la tensión de la cuerda \vec{T} . El torque es

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} + \vec{r} \times \vec{T}.$$

Como \vec{T} es paralelo al vector posición su torque se anula y sólo queda el torque asociado al peso. Se debe notar que ésta es una de las comodidades del método de torque, pues se pueden eliminar algunas fuerzas del análisis (la tensión en este caso). El torque del peso se obtiene de la definición: la magnitud de \vec{r} es R y el ángulo que forman el peso con el vector posición es θ . Al aplicar la regla de la mano derecha se obtiene que el torque apunta perpendicularmente al plano, pero hacia adentro. Es decir

$$\vec{\tau} = Rmg \sin \theta (-\hat{k}).$$

Reemplazando todo en (4C.3) se tiene

$$mR^2\ddot{\theta} = -mRg \sin \theta,$$

que al simplificar queda

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta,$$

que es la ecuación de movimiento de un péndulo y que habíamos visto en la Unidad 1.

Propuesto: Considere que el mismo péndulo experimenta además una fuerza de roce viscoso $\vec{F}_v = -\gamma\vec{v}$. Determine la ecuación de movimiento usando el método del torque.

4C.2. Momento angular de un sólido rígido

Si se tiene un sistema de partículas, de masas m_i , posiciones \vec{r}_i y velocidades \vec{v}_i , se define el momento angular del sistema como la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{L}_i \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i\end{aligned}\quad (4C.4)$$

En lo que sigue vamos a considerar que el sólido es estrictamente *bidimensional* y que tiene un *movimiento plano*. Es decir, tanto el sólido como su velocidad están en un plano (movimiento bidimensional) y la rotación ocurre con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento. Algunos ejemplos de movimientos planos se muestran en la figura 4C.2. Además, en esta unidad consideraremos sólo el movimiento de rotación en torno a un punto fijo. En la próxima unidad se verá el caso general.

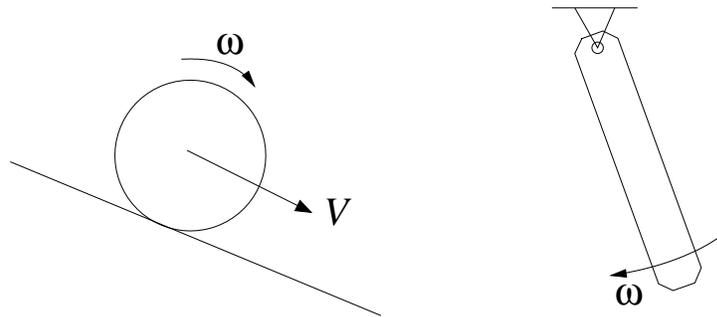


Figura 4C.2: Ejemplos de movimientos planos. En el ejemplo de la izquierda el sólido se traslada y el eje de rotación es perpendicular a la traslación. En el ejemplo de la derecha el movimiento es solo de rotación en torno al punto fijo.

En el caso de tener un sólido rígido que gira en torno a un punto fijo O (tal como los descritos en la Unidad 3 y Unidad 4B), se puede descomponer el sólido en N partículas individuales y luego se toma el límite $N \rightarrow \infty$. Como es un sólido rígido, la distancia de cada una de estas partículas al punto fijo es constante ρ_i , describiendo un movimiento circular de ese radio en torno al punto fijo. Es importante hacer notar que este procedimiento es estrictamente válido en dos dimensiones (o sea para sólidos rígidos bidimensionales), pero los resultados son generales y válidos para sólidos rígidos tridimensionales.

Si la velocidad angular del sólido en torno a O es ω , entonces la rapidez de cada punto es $v_i = \rho_i \omega$, perpendicular al vector posición. Luego, se tiene

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \rho_i \rho_i \omega \hat{k} = \rho_i^2 \omega \hat{k}.$$

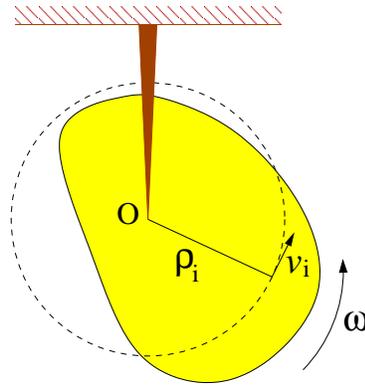


Figura 4C.3: Ejemplo de un sólido rígido girando con velocidad angular ω con respecto a un eje fijo, posicionado en O .

De esta forma, el momento angular total del sólido que rota en torno a un punto fijo es

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i \rho_i^2 \omega \hat{k} \\ &= \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega \hat{k},\end{aligned}$$

es decir,

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}, \quad (4C.5)$$

donde se ha puesto el subíndice “ O ” para indicar explícitamente que se mide el momento angular respecto al punto fijo. Al pasar de la tercera a la cuarta línea se identificó el *momento de inercia* respecto al punto fijo O . Además, se definió la velocidad angular vectorial $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ como el vector que tiene la magnitud $\omega = \dot{\theta}$ y cuya dirección está dada por el eje de giro y sentido por la regla de la mano derecha.

Se obtiene entonces que el momento angular total de un sólido es proporcional a su momento de inercia, que es una propiedad intrínseca del cuerpo una vez el eje de rotación ha sido definido, y a la velocidad angular que mide el estado de rotación en cada instante. Esta relación es análoga a la del momentum lineal $\vec{p} = m\vec{v}$, donde m es una propiedad intrínseca del cuerpo y \vec{v} mide el estado de traslación en cada instante.

4C.3. Ecuación de torque para un sólido rígido

Se puede calcular la derivada del momento angular usando las expresiones (4C.4) y (4C.5). De acuerdo a la primera expresión se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \sum_i \dot{\vec{L}}_i \\ &= \sum_i \vec{\tau}_i \\ &= \vec{\tau}_{\text{total}},\end{aligned}$$

donde $\vec{\tau}_i$ es el torque sobre cada partícula y $\vec{\tau}_{\text{total}}$ es la suma de los torques.

Por otro lado usando la segunda expresión se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt}(I_O \vec{\omega}) \\ &= I_O \dot{\vec{\omega}} \\ &= I_O \ddot{\theta} \hat{k},\end{aligned}$$

donde se ha usado que el momento de inercia es una propiedad del sólido y si éste es rígido, entonces es constante en el tiempo.

Igualando las dos expresiones se tiene

$$\begin{aligned}I_O \dot{\vec{\omega}} &= \vec{\tau}_{\text{total}}, \\ I_O \ddot{\theta} \hat{k} &= \vec{\tau}_{\text{total}}.\end{aligned}\tag{4C.6}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación de Newton $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{total}}$ donde I_O juega el rol de la masa asociada al movimiento de rotación. La aceleración angular (cambio en la velocidad angular) es producida por los torques sobre el cuerpo. Dado un torque fijo, un cuerpo de mayor momento de inercia tendrá una menor aceleración angular. Es decir, el momento de inercia indica la dificultad para cambiar (acelerar o frenar) el estado de rotación de un cuerpo.

Propuestos: Se tienen dos discos de masa M y radio R , uno de ellos con la masa distribuida uniformemente y el otro con la masa sólo en la circunferencia exterior. Si se aplica el mismo torque τ sobre ambos discos, ¿cuál acelerará más?

Para los mismos discos anteriores, si ambos están girando con velocidad angular ω . ¿A cuál se le debe aplicar un mayor torque para que ambos se frenen en el mismo tiempo?

4C.4. Torque sobre un sólido rígido

Para resolver la ecuación de movimiento recién encontrada se debe calcular el torque total sobre el cuerpo, el cual es la suma de los torques sobre cada una de las partículas $\vec{\tau}_i$. Vamos a ver que en general no es difícil de calcular.

Sea un sólido que está descrito como sistema de N partículas de masas m_i y posiciones \vec{r}_i . En general sobre cada una de las partículas se ejercerán fuerzas provenientes de las otras partículas del sólido (por ejemplo, las fuerzas moleculares que lo mantienen rígido) y fuerzas que son ejercidas por otros cuerpos. A las primeras se les llamará *fuerzas internas* y se denotará por \vec{f}_{ik} la fuerza que la partícula k ejerce sobre la partícula i . Al segundo tipo de fuerzas se les llama *fuerzas externas* y se les denotará por \vec{F}_i^{ext} . Así la fuerza total sobre la partícula i es

$$\vec{F}_i = \sum_k \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i^{\text{ext}}.$$

El torque sobre la partícula i es entonces

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_i &= \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \sum_k \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \right). \end{aligned}$$

El torque total tiene una componente interna y otra externa. Calculemos primero la componente interna:

$$\vec{\tau}_{\text{total}}^{\text{int}} = \sum_i \sum_k \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik}. \quad (4C.7)$$

Como los índices son mudos, también se puede escribir

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{\text{total}}^{\text{int}} &= \sum_i \sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_{ki} \\ &= - \sum_i \sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_{ik}, \end{aligned} \quad (4C.8)$$

donde para pasar de la primera a la segunda línea se usó el principio de acción y reacción, $\vec{f}_{ki} = -\vec{f}_{ik}$. Como (4C.7) y (4C.8) son válidas, el torque interno se puede escribir también como el promedio de las dos expresiones

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{\text{total}}^{\text{int}} &= \frac{1}{2} \left(\sum_i \sum_k \vec{r}_i \times \vec{f}_{ik} - \sum_i \sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_{ik} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_k (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{f}_{ik}. \end{aligned} \quad (4C.9)$$

El vector $\vec{r}_{ik} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_k$ es paralelo a la línea que une los centros de las partículas. Por otro lado, se sabe que las fuerzas fundamentales de la naturaleza (electromagnetismo, gravitación, fuerzas atómicas, fuerzas nucleares, ...) cumplen con la propiedad que la dirección de la fuerza es paralela a la línea que une los centros de las partículas (por ejemplo, la fuerza de gravitación universal es $F_{ik} = -Gm_1m_2\hat{r}_{ik}/r_{ik}^2$). Debido a esa propiedad, los productos cruz en (4C.9) son todos nulos.

En consecuencia, el torque total de las fuerzas internas es nulo. Esta propiedad es muy importante porque implica (de acuerdo a la ecuación (4C.6)) que las fuerzas internas no provocan aceleración angular. Dicho de otra forma, un cuerpo no se pone a girar de manera espontánea.

Volviendo al torque total, sólo queda la componente externa

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{\text{total}} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \\ \vec{\tau}_{\text{total}} &= \vec{\tau}_O^{\text{ext}}\end{aligned}\quad (4C.10)$$

donde se deja explícita la indicación que el brazo de los torques se mide respecto al punto fijo O .

4C.5. Resumen

En resumen, considerando las ecuaciones (4C.6) y (4C.10), la ecuación de torque para un sólido rígido respecto a un punto fijo O se escribe de las siguientes maneras (análogas)

$$\begin{aligned}I_O \dot{\vec{\omega}} &= \vec{\tau}_O^{\text{ext}} \\ I_O \ddot{\theta} \hat{k} &= \vec{\tau}_O^{\text{ext}},\end{aligned}$$

donde I_O es el momento de inercia del cuerpo respecto a su punto fijo y

$$\vec{\tau}_O^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}.$$

4C.6. Ejemplos

4C.6.1. Movimiento del péndulo físico

Se llama péndulo físico al caso de un sólido rígido de forma arbitraria que puede girar libremente respecto a un punto fijo bajo la acción de la gravedad.

En la figura 4C.4 se representa el péndulo físico que está sujeto del punto fijo O . El centro de masa del cuerpo está indicado por una G . Las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo son su peso $m\vec{g}$ y la fuerza de sujeción en el punto fijo \vec{R} . Esta fuerza, también llamada de reacción es la que impide que el cuerpo caiga (por eso tiene una componente vertical), como también impide que el punto O se mueva hacia los lados (por eso también tiene una componente horizontal). De esta forma, la fuerza de reacción tiene una magnitud y dirección en principio desconocidas que se deben determinar de las ecuaciones de movimiento.

La fuerza de reacción actúa en el punto O . Luego, su torque con respecto a O es nulo pues el brazo es nulo. Aquí nuevamente se ve la utilidad del método de torques porque permite describir el movimiento eliminando algunas fuerzas desconocidas.

El torque de las fuerzas externas se reduce entonces al torque del peso que, como se vio en la Unidad 4A, actúa sobre el centro de masa del cuerpo.

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_O^{\text{ext}} &= \vec{\tau}_O^{mg} \\ &= -mgR_G \text{sen } \theta \hat{k},\end{aligned}$$

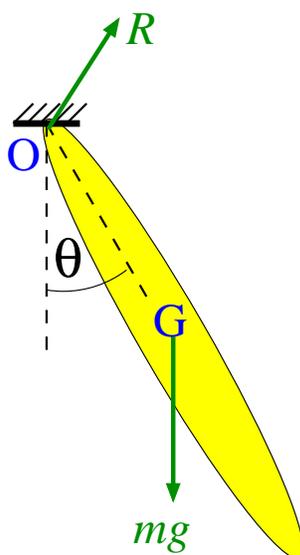


Figura 4C.4: Péndulo físico

donde R_G es la distancia del centro de masa al punto fijo y el signo se obtuvo de la regla de la mano derecha.

La ecuación de movimiento es entonces

$$I_O \ddot{\theta} = -mgR_G \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{mgR_G}{I_O}\right) \sin \theta$$

ecuación que es muy parecida a la del péndulo simple, pero ahora depende de la forma del cuerpo a través del momento de inercia.

Propuesto: Encuentre la ecuación de movimiento de un péndulo físico formado por una barra de largo L y masa M , que cuelga de un extremo. ¿La aceleración angular es mayor o menor que la un péndulo simple? ¿Por qué?

4C.6.2. Polea con masa

Considere una polea de masa M , radio R y momento de inercia I que está sujeta por su centro en O como la de la figura 4C.5. De la polea cuelga una cuerda ideal en cuyo extremo está sujeta una partícula de masa m . Se busca saber cómo gira la polea.

Sobre la polea actúan tres fuerzas externas: su peso $M\vec{g}$, la reacción del soporte en O \vec{R} y la tensión de la cuerda \vec{T} . Las dos primeras fuerzas no ejercen torque respecto al punto fijo O pues su brazo es nulo. La tensión se aplica en el extremo del círculo, a una distancia R del centro. Como el vector que va del

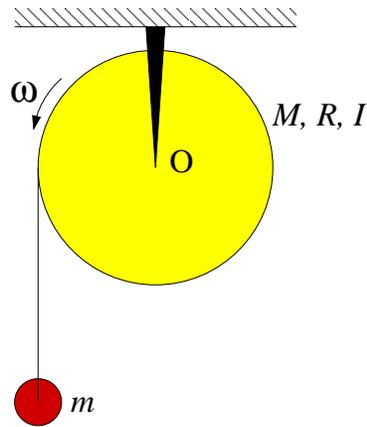


Figura 4C.5: Polea con una masa colgando

punto O al punto de aplicación es perpendicular a la tensión, el brazo es simplemente R . Por último el sentido del torque es, de acuerdo a la regla de la mano derecha, un vector que sale del plano hacia afuera (según \hat{k}). Luego

$$\vec{\tau}_O^{\text{ext}} = RT\hat{k}.$$

Se debe notar que si la cuerda hubiera estado sujeta en el borde derecho del círculo, el torque habría sido $-RT\hat{k}$.

Luego, la ecuación de movimiento de la polea es

$$I_O\alpha = RT, \quad (4C.11)$$

con $\alpha = \ddot{\theta}$.

El movimiento de la partícula de masa m se determina de la ecuación de Newton. Tomando el eje y vertical hacia arriba se tiene

$$ma = T - mg. \quad (4C.12)$$

Se tiene, además, la relación cinemática que relaciona lo que baja la partícula con lo que gira la polea

$$a = -R\alpha, \quad (4C.13)$$

donde el signo “-” aparece porque cuando la polea gira en su sentido positivo, la partícula baja (es decir, se mueve en sentido negativo). ¿Cómo se escribiría la relación cinemática si la masa colgara del lado derecho?

Reemplazando (4C.13) en (4C.12) se obtiene

$$T = mg - mR\alpha,$$

que al reemplazar en (4C.11) da

$$\alpha = \frac{mgR}{I_O + mR^2}, \quad (4C.14)$$

que muestra que la polea acelera debido al torque debido a la partícula que cuelga. Un mayor momento de inercia provoca que la polea acelere más lentamente debido a que cuesta más hacer girar a la polea.

La aceleración de la partícula m es

$$\begin{aligned} a &= -R\alpha \\ &= -\frac{g}{1 + I_0/MR^2} \end{aligned}$$

lo que indica que acelera más lento que g . Nuevamente, esto es producto de la inercia de la polea.

Propuesto: Determine la aceleración angular de una polea que tiene dos radios donde se enrollan las cuerdas y de la que cuelgan dos partículas, como la que se muestra en la figura 4C.6. Indique la condición crítica para que la polea gire en uno u otro sentido.

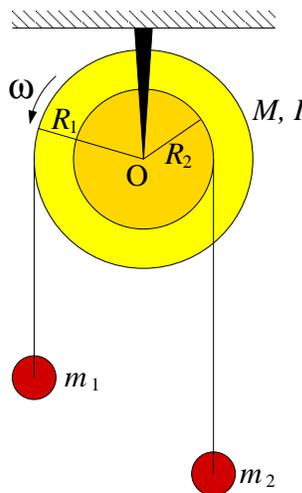


Figura 4C.6: Ejercicio propuesto: polea con dos radios y dos partículas

4C.7. Comentarios adicionales

La discusión sobre el momento angular parece sugerir que este y la velocidad angular son vectores paralelos, lo que no ocurre en general. Considerar el momento angular de un sistema de partículas dado por la ecuación (4C.4). Si se expresa la velocidad en términos del vector posición con respecto a un punto dado \vec{r}_i y la velocidad angular $\vec{\omega}$, es decir $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, se escribe:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\
&= \sum_i m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i], \tag{4C.15}
\end{aligned}$$

donde se usó la propiedad indicada en la sección 4A: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$. Si además se usa $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = r_i^2$, se puede reescribir:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i \\
&= \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \vec{\omega} - \sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i \tag{4C.16}
\end{aligned}$$

Nótese que el término entre paréntesis ($\sum_i m_i r_i^2$) es un escalar, que se parece a la definición del momento de inercia (la diferencia es que r_i se mide con respecto a un punto, no a un eje). Luego, el primer término de la ecuación (4C.16) es un vector *paralelo* a $\vec{\omega}$. El segundo término, en cambio, *mezcla* las componentes de $\vec{\omega}$ y de los \vec{r}_i originando una componente que en general no tiene por qué ser paralela a $\vec{\omega}$. La conclusión es que en el caso general el momento angular \vec{L} y la velocidad angular $\vec{\omega}$ *no son paralelos*.

4C.7.1. Movimiento en el plano

Considerar ahora un cuerpo plano que se mueve en su mismo plano rotando a un eje cualquiera que también se encuentra en el plano, intersectando a este en un punto P. En este caso:

1. Los \vec{r}_i se encuentran todos en el plano mientras que $\vec{\omega}$ es perpendicular al plano, por lo que $\vec{r}_i \cdot \vec{\omega} = 0$ en todos los casos y desaparece la segunda suma en la ec. 4C.16.
2. La suma $I_P = \sum_i m_i r_i^2$ corresponde con el momento de inercia, porque ahora los \vec{r}_i están medidos con respecto al eje de rotación.

Se concluye que en el caso particular en que el cuerpo es plano y rota en torno a un eje perpendicular a su propio plano el momento angular \vec{L} y la velocidad angular $\vec{\omega}$ son paralelos. Esto no es cierto en general para un cuerpo tridimensional, excepto el caso particular en que el cuerpo está rotando en torno a un eje de simetría (si es que lo tiene). Un eje de simetría es una línea imaginaria tal que a cada punto de un cuerpo le corresponde (es decir, existe) otra simétrica con respecto al eje.

4C.8. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: Indique las características que se deben cumplir para que un sólido rígido tenga un movimiento plano.

Pregunta 2: Cuando un sólido rígido realiza un movimiento de rotación en torno a un punto fijo, ¿Qué tipo de movimiento realiza cada punto o partícula del sólido?

Pregunta 3: Para el movimiento de un sólido rígido con punto fijo, indique cuál es la relación análoga a $F = ma$

Pregunta 4: La velocidad angular se puede definir como un vector. ¿Qué miden la magnitud y dirección de este vector?

4C.9. Ejercicios

Ejercicio 1: Un bloque de masa M está apoyado sobre una superficie horizontal sin roce. El bloque está sujeto por una cuerda, la cual pasa por una polea de radio R y momento de inercia I , cuyo otro extremo sujeta un cuerpo de masa m que cuelga bajo la acción de la gravedad. El sistema se muestra en la figura 4C.7.

Determine la aceleración de la masa que cuelga.

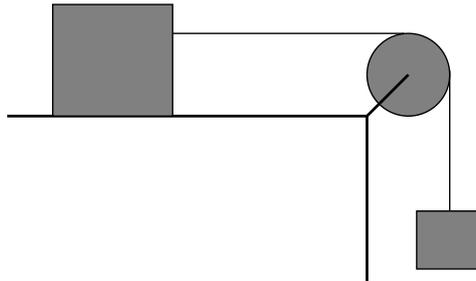


Figura 4C.7: Ejercicio 1

Ejercicio 2: Una esfera de radio R , masa M y momento de inercia $I = 2MR^2/5$ está apoyada sobre una cuña recta rugosa, caracterizada por un coeficiente de roce dinámico μ_d . En el instante inicial, a la esfera se le da una velocidad angular ω_0 en la dirección que indica la figura 4C.8.

1. Determine la magnitud de todas las fuerzas externas que actúan sobre la esfera.
2. Calcule cuánto tiempo tarda en detenerse la esfera debido al roce.

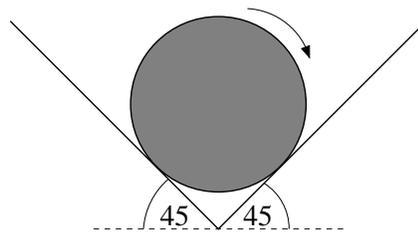


Figura 4C.8: Ejercicio 2

Ejercicio 3: Una rueda de masa M , radio R y momento de inercia I está en contacto con una superficie horizontal rugosa, caracterizada por un coeficiente de roce estático μ_e y dinámico μ_d . El centro de la rueda está unido a una cuerda ideal cuyo otro extremo está unido a una pared fija a la misma altura del centro de la rueda, tal como se ve en la figura 4C.9.

Inicialmente el sistema está en reposo y súbitamente la superficie horizontal empieza a moverse con velocidad constante V hacia la derecha.

1. Encuentre y resuelva la ecuación de movimiento para la velocidad angular de la rueda.
2. ¿Qué pasa cuando $\omega = V/R$? ¿Qué pasa luego de ese instante?

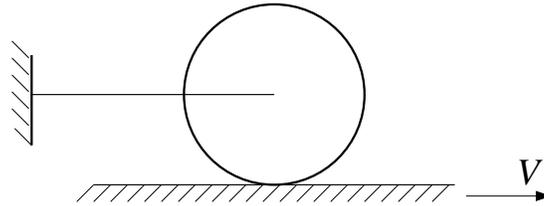


Figura 4C.9: Ejercicio 3

Ejercicio 4: Considere el sistema de la figura, compuesto por dos masas unidas por una barra rígida de largo $2L$ y masa M . La barra puede girar libremente en torno al punto medio de ella en O . En el extremo P de la barra se encuentra un cuerpo de masa m y en el extremo Q otro de masa $2m$. Todo el sistema se mueve bajo la acción de la gravedad (ver figura 4C.10).

1. Encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ .
2. ¿Qué sucede con la aceleración angular si $M \gg m$? ¿Y si $M \ll m$? ¿Por qué son tan diferentes estos dos límites?

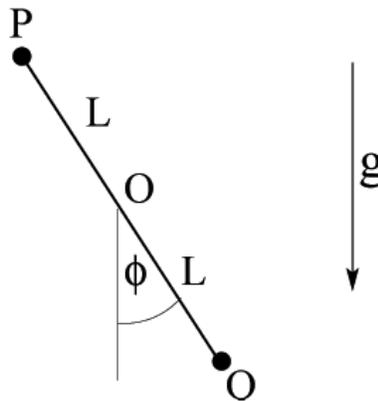


Figura 4C.10: Ejercicio 4

Ejercicio 5: Se tienen dos poleas de igual radio R y masa M . La polea A tiene la masa distribuida uniformemente en su interior mientras que la polea B tiene la masa distribuida sólo en el perímetro. Las poleas se muestran en la figura 4C.11. Si se enrolla un hilo de la polea, del cual cuelga un cuerpo de masa m , determine el cociente α_B/α_A entre las aceleraciones angulares de ambas poleas. Comente.

Ejercicio 6: Considere una "T" como la de la figura 4C.12, que puede rotar en torno a un eje que pasa a distancia d del vértice.

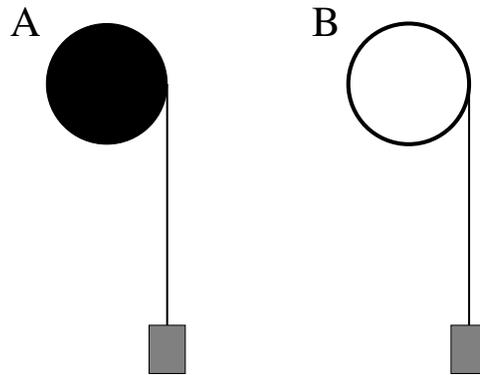


Figura 4C.11: Ejercicio 5

1. Si la barra se suelta horizontalmente, determine la velocidad angular que alcanza cuando llega a la vertical. Considere que el eje no ejerce roce.
2. Suponga ahora que el eje tiene un roce viscoso, de manera que al girar la barra ejerce sobre ésta un torque $\tau_{\text{roce}} = -\gamma\omega$. Escriba la ecuación de movimiento de la barra, es decir una ecuación del tipo

$$\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta})$$

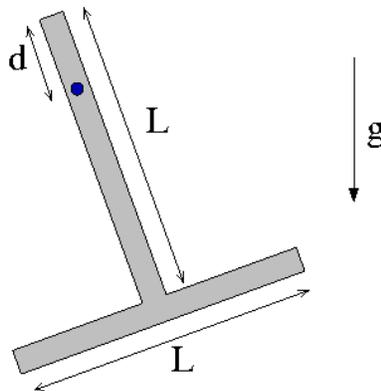


Figura 4C.12: Ejercicio 6

Unidad 4D: Sólidos rígidos–Rodadura

4D.1. Introducción

En una primera caracterización del movimiento de cuerpos sólidos, en relación a sus contactos con elementos externos, podemos identificar dos casos de interés particular:

- aquellos movimientos de *rotación pura* en torno a un eje fijo; y
- aquellos movimientos de rodadura sin deslizamiento.

Ciertamente estos no son los únicos casos concebibles. Podemos agregar movimientos compuestos de rotación y traslación (como un *boomerang* en el aire), y de rotación con deslizamiento (como el neumático de un vehículo que “patina”).

Pensemos específicamente en una rueda. En la figura 4D.1 ilustramos una rueda dentada que gira, sin deslizar, sobre una superficie igualmente dentada. Cuando los dientes P y Q entran en contacto no hay deslizamiento mutuo, de modo que la velocidad *instantánea* relativa entre ellos es nula. Puesto que el engranaje inferior está en reposo, entonces Q necesariamente está en reposo instantáneo. Esta idea se extiende a la rueda que no resbala de la derecha, donde observamos que el punto Q de la rueda en contacto con el plano está en reposo instantáneo.

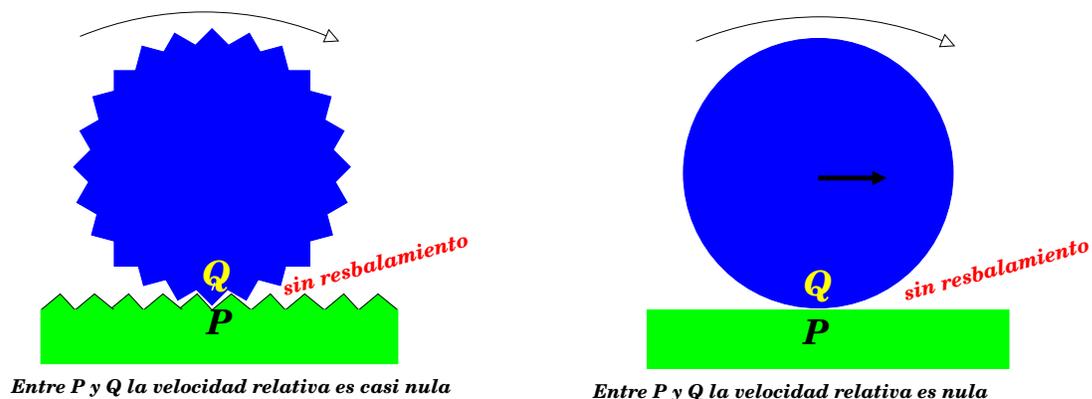


Figura 4D.1: Ejemplo de movimiento de rodadura perfecta.

4D.1.1. Rotaciones en torno a eje fijo

En la unidad anterior abordamos el estudio de la *máquina de Atwood*, consistente en un disco de dos cantos que gira en torno a un eje fijo debido a cargas dispuestas asimétricamente. Si I_o es el momento de inercia del disco con respecto a su eje de rotación O , entonces el torque externo con respecto a ese eje ($\vec{\tau}_o$) induce una aceleración angular $\vec{\alpha}$, determinada por

$$\vec{\tau}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} = I_o \vec{\alpha} . \quad (4D.1)$$

Recuerden que esta es una relación *vectorial*. Sin embargo, para cuerpos planos (y si O se elige en el plano del papel), entonces los torques resultantes son perpendiculares a este plano. Si \hat{k} es un vector unitario saliendo del (o entrando al) papel, entonces podemos expresar

$$\vec{\tau}_o = \tau_o \hat{k}; \quad \vec{\alpha} = \alpha \hat{k} ,$$

con lo cual obtenemos la relación para las *magnitudes*

$$\tau_o = I_o \alpha .$$

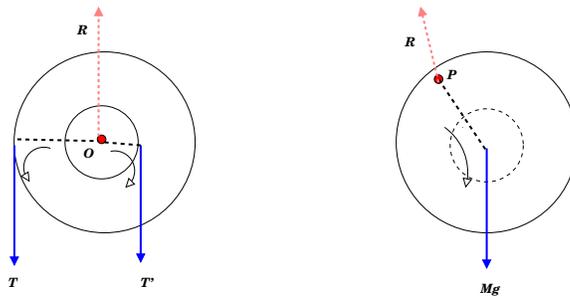


Figura 4D.2: Máquina de Atwood

En la figura 4D.2 se ilustran dos casos de rotación en torno a un eje fijo: el de la máquina de Atwood (izquierda) y el de una rueda que puede girar (a modo de péndulo) en torno al eje P. Ambas se rigen por la misma ecuación del movimiento $\tau_{fijo} = I_{fijo} \alpha$, donde el eje fijo se ubica en O y P, respectivamente.

De forma muy general, la ecuación de torque (4D.1) es válida cuando este se evalúa con respecto a un eje instantáneamente en reposo (*eje instantáneo de rotación*), debiendo evaluarse el momento de inercia con respecto a ese eje. Por lo tanto, podemos aplicarla a una rueda que rota sin resbalar, donde el punto de contacto P está instantáneamente en reposo. Así:

$$\vec{\tau}_P = \frac{d\vec{L}_P}{dt} = I_P \vec{\alpha} . \quad (4D.2)$$

4D.1.2. Rueda sobre plano inclinado

Estudiemos el caso de una rueda de masa M y radio R rodando sobre un plano inclinado con roce como se muestra en la figura 4D.3. No hay deslizamiento (gracias al roce), de modo que el punto de la

rueda en contacto con el piso está instantáneamente en reposo. Denotamos ese punto por P . Las fuerzas externas actuando sobre la rueda son:

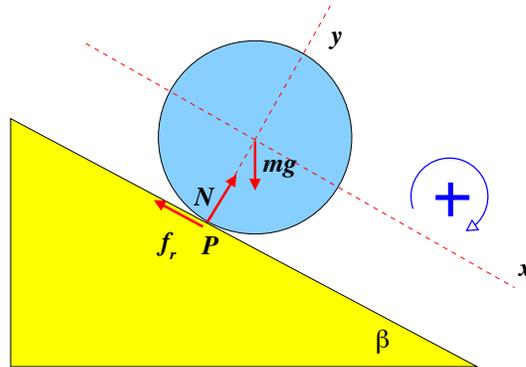


Figura 4D.3: Rueda que cae por un plano inclinado, rodando sin resbalar

1. Peso (magnitud Mg hacia abajo)
2. Fuerza de contacto, que descomponemos en normal (componente $N \perp$ al plano inclinado) y fuerza de roce (componente f_r a lo largo del plano).

Podemos escribir la ecuación para el movimiento de traslación del centro de masas, $\vec{F} = M\vec{a}$, donde \vec{a} representa la aceleración del centro de masas de la rueda. Para este ejemplo específico,

$$M\vec{g} + \vec{f}_r + \vec{N} = M\vec{a},$$

que proyectadas según los ejes \hat{x} e \hat{y} conducen a

$$Mg \sin \beta - f_r = Ma_x \quad (4D.3)$$

$$-Mg \cos \beta + N = 0 \quad \rightarrow \quad N = Mg \cos \beta, \quad (4D.4)$$

quedándonos dos incógnitas (f_r y a_x), pero sólo una ecuación.

ADVERTENCIA: la igualdad $f_r = \mu N$ es válida sólo en el límite del deslizamiento (roce cinético). Cuando ello no se especifica, entonces se está en el régimen $f_r < \mu N$. Se trata de una desigualdad, por lo que f_r y N se deben manejar como variables independientes.

Ahora, si aplicamos la ecuación de torques con respecto al punto de contacto P , es fácil verificar

$$\tau_P(M\vec{g}) + \tau_P(\vec{f}_r) + \tau_P(\vec{N}) = I_P\alpha \quad \rightarrow \quad MgR \sin \beta = I_P\alpha,$$

pues los torques de la fuerza normal y de la fuerza de roce se anulan (sus brazos son nulos).

Notemos que la ecuación de torques sobre la rueda nos aporta una nueva ecuación para resolver el problema, pero también introduce una nueva incógnita, α . Tenemos entonces tres incógnitas y solo dos ecuaciones. La ecuación faltante la debemos buscar en la relación entre la aceleración del centro de masas de la rueda, a_x , y su aceleración angular α .

4D.1.3. Consideraciones geométricas

En el caso de una rueda que rota sin resbalar sobre una superficie, el desplazamiento de su centro se relaciona de forma muy simple con la rotación angular que experimenta. Para fijar ideas, en la figura 4D.4 se ilustra una rueda de radio R en contacto con una superficie rectilínea. Al desplazar el centro de la rueda en δx , esta rota un ángulo en $\delta\theta$. La huella impresa sobre la superficie coincide con el arco $R\delta\theta$. Así,

$$\delta x = R\delta\theta.$$

Si estas variaciones transcurren en un lapso δt , entonces

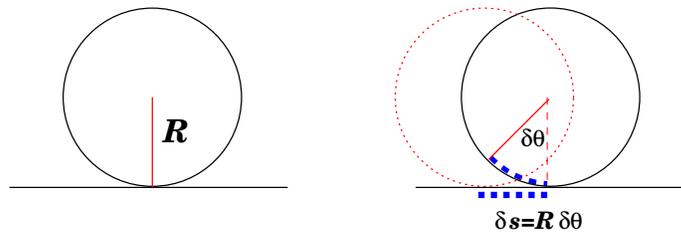


Figura 4D.4: Movimiento de una rueda que rota sin resbalar

$$\frac{\delta x}{\delta t} = R \frac{\delta\theta}{\delta t},$$

de modo que al tomar el límite $\delta t \rightarrow 0$,

$$v = R\omega.$$

La velocidad v (instantánea) corresponde a la de traslación de su centro. Derivando ambos términos de la igualdad obtenemos

$$a = R\dot{\omega} = R\alpha$$

Esta relación nos permite resolver el problema de la rueda que rueda sin resbalar sobre un plano inclinado en un ángulo β con respecto a la horizontal. Hemos encontrado tres relaciones que determinan completamente su movimiento:

$$Mg \sen \beta - f_r = Ma_x \quad \text{movimiento según } x \quad (4D.5)$$

$$MgR \sen \beta = I_P \alpha \quad \text{movimiento de rotación} \quad (4D.6)$$

$$a_x = R\alpha \quad \text{restricción de no deslizamiento} \quad (4D.7)$$

Estas ecuaciones nos permiten encontrar a_x . De la Ec. (4D.6) se tiene que $\alpha = MgR \sen \beta / I_P$, que sustituida en la Ec. (4D.7) nos da

$$a_x = g \frac{MR^2}{I_P} \sen \beta.$$

Recordar que I_P es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el *punto de contacto* P . Si denotamos por I_{CM} al momento de inercia que pasa por el centro de masas de la rueda, entonces el

teorema de Steiner nos permite afirmar que $I_P = MR^2 + I_{CM}$. Con lo anterior,

$$a_x = \frac{g \operatorname{sen} \beta}{1 + I_{CM}/MR^2} .$$

Un par de alcances destacables sobre este resultado:

- Notar que la aceleración del centro de masas es constante, de modo que su velocidad asociada se relaciona con el desplazamiento mediante

$$v^2 - v_o^2 = 2a_x \Delta x .$$

- Nótese que si $I_{CM} = 0$, se obtiene el resultado conocido para un cuerpo resbalando sin roce: $a_x = g \operatorname{sen} \beta$. ¿Es esto razonable?
- La ecuación (4D.5) para el roce f_r sugiere una aceleración límite (¿máxima o mínima?) que garantice el no deslizamiento. Se deja propuesto determinar el ángulo β máximo que garantice que la rueda no resbala.
- Una esfera maciza tiene un momento de inercia $2MR^2/5$ con respecto a un eje que pasa por su centro. Verifique que en tal caso

$$a_x = (5/7)g \operatorname{sen} \beta \approx 0,71g \operatorname{sen} \beta .$$

Se deja propuesto comparar este resultado con un disco y un aro.

- La caída de un “yo-yo” es una extensión natural del problema de la rueda: hacer $\beta \rightarrow \pi/2$, sustituir $f_r \rightarrow T$, la tensión del cordel del yo-yo. En este caso se propone calcular la tensión del cordel.

4D.1.4. Energía en rodadura perfecta

Consideremos una rueda que evoluciona desde una configuración A a otra B, como se muestra en la figura 4D.5. Por teorema de conservación de energía mecánica, la diferencia de energía cinética entre los dos estados es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas en la evolución.

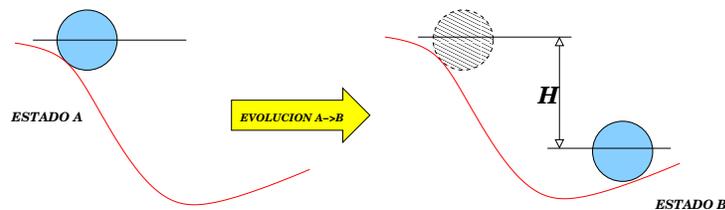


Figura 4D.5: Evolución de un objeto que rueda sin resbalar desde una configuración A a una configuración B

Considerando la energía mecánica E como la suma de la cinética K y potencial gravitacional U_g , entonces

$$(K + U_g)_B = (K + U_g)_A + W_{A \rightarrow B}(\text{resto de las fuerzas})$$

donde $W_{A \rightarrow B}(\text{resto de las fuerzas})$ corresponde al trabajo en la evolución $A \rightarrow B$ de todas las fuerzas que no sean gravitatorias. En el caso particular de la rueda sobre el plano inclinado hay tres fuerzas a considerar:

- El peso: ya incluido en el término de energía potencial;
- La normal: no trabaja, es decir $W_{A \rightarrow B}(\text{normal}) = 0$;
- El roce: no trabaja puesto que no hay deslizamiento mutuo entre la rueda y el piso, con lo cual $W_{A \rightarrow B}(\text{roce}) = 0$.

Con lo anterior podemos escribir

$$K_B = K_A + MgH \quad (4D.8)$$

La energía cinética en cada caso se puede obtener considerando el movimiento de la rueda como de *rotación pura* en torno al punto de contacto P , es decir

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 .$$

Y ya vimos que $I_P = MR^2 + I_{CM}$ por el teorema de Steiner, con lo cual

$$\omega_B^2 = \omega_A^2 + \frac{2MgH}{MR^2 + I_{CM}} .$$

Nuevamente imponemos la condición de rodadura sin deslizamiento, $v_B = \omega_B R$, $v_A = \omega_A R$, con lo cual

$$v_B^2 = v_A^2 + \frac{2MgH}{MR^2 + I_{CM}} = v_A^2 + 2 \left(\frac{g \sen \beta}{1 + I_{CM}/MR^2} \right) \Delta x .$$

En esta última hemos usado $H = \Delta x \sen \beta$ (ver figura 4D.6).

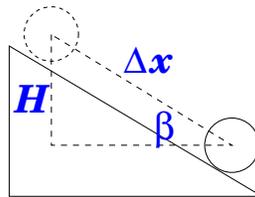


Figura 4D.6: Relación entre Δx y H

De esta última relación inferimos por simple inspección que la aceleración lineal del centro de la rueda es

$$a_x = \frac{g \sen \beta}{1 + I_{CM}/MR^2} ,$$

coincidente con la obtenida mediante la aplicación directa de las leyes de Newton. Era un resultado exigible, dado que la relación energía-trabajo se obtiene de las mismas leyes.

4D.1.5. Comentarios sobre la relación $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

Hasta ahora hemos aplicado la relación $\vec{\tau}_P = I_P\vec{\alpha}$ a todo punto P instantáneamente en reposo. Sin embargo, como veremos a continuación, esta relación también se puede aplicar cuando P coincide con el centro de masas del sólido. Por lo tanto,

$$\vec{\tau}_{CM} = I_{CM}\vec{\alpha}.$$

En la figura 4D.7 se esquematiza un sólido con eje instantáneo de rotación en P . Las N fuerzas externas se representan por los vectores de color verde y se rotulan mediante subíndices i , con $i = 1, \dots, N$.

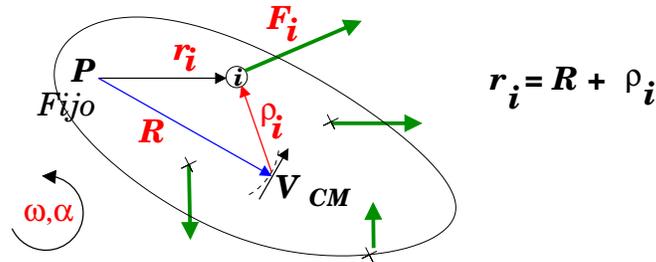


Figura 4D.7: Sólido rotando alrededor de un eje P instantáneamente fijo.

Denotamos por \vec{R} la ubicación del centro de masas con respecto a P . Después de un intervalo de tiempo infinitesimal δt , el centro de masas describe un arco infinitesimal de circunferencia en torno a P . Su velocidad \vec{V} es perpendicular a \vec{R} . Se comprueba que $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$. Su aceleración tendrá dos componentes: una radial (según $-\hat{R}$) proporcional a V^2/R , y otra tangencial (perpendicular a \hat{R} y a ω) de valor αR . Entonces,

$$\vec{a} = -\frac{V^2}{R}\hat{R} + \vec{\alpha} \times \vec{R}. \quad (4D.9)$$

Si rotulamos con $\{1, \dots, N\}$ los puntos de aplicación de las N fuerzas externas sobre el sólido, y por \vec{R} al vector que une P con el centro de masas, entonces

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i.$$

Aquí \vec{r}_i localiza i con respecto a P y $\vec{\rho}_i$ al mismo punto con respecto al centro de masas.

La ecuación de torques con respecto a P se escribe

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots = I_P\vec{\alpha}. \quad (4D.10)$$

Sustituyendo $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i$, y reagrupando términos,

$$\vec{\rho}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{\rho}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{R} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = I_P\vec{\alpha}.$$

Claramente $\vec{\rho}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{\rho}_2 \times \vec{F}_2 + \dots = \vec{\tau}_{CM}$ es el torque neto con respecto al centro de masas. Además de lo anterior, reconocemos $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = M\vec{a}$, con \vec{a} la aceleración del centro de masas. Sustituyendo en (4D.10) obtenemos

$$\vec{\tau}_{CM} + \vec{R} \times (M\vec{a}) = I_P\vec{\alpha}.$$

Al reemplazar \vec{a} de la Ec. (4D.9), usando que $\vec{R} \times \hat{R} = 0$, se tiene

$$\vec{\tau}_{CM} + \vec{R} \times (M\vec{\alpha} \times \vec{R}) = I_P \vec{\alpha} .$$

Pero $\vec{R} \times (M\vec{\alpha} \times \vec{R}) = MR^2 \vec{\alpha}$, (¡verifíquelo!) con lo cual

$$\vec{\tau}_{CM} = \underbrace{(I_P - MR^2)}_{I_{CM}} \vec{\alpha} ,$$

vale decir,

$$\vec{\tau}_{CM} = I_{CM} \vec{\alpha} .$$

4D.1.6. Apéndice

Una aplicación MatLab interesante es dibujar la trayectoria de los puntos de una rueda cuando ésta rueda sin resbalar, como se muestra en la figura 4D.8.

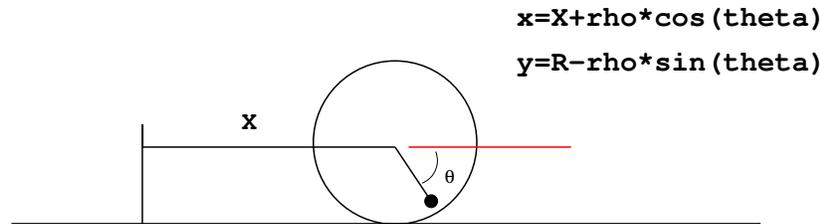


Figura 4D.8: Coordenadas de un punto Q sobre una rueda que rota sin resbalar

Si tomamos el eje x en la dirección del movimiento del centro de la rueda y el ángulo θ creciente en el sentido horario, entonces podemos decir que las coordenadas (X, Y) del centro del disco quedan descritas mediante

$$X = R\theta , \quad Y = R .$$

Esta construcción garantiza que para $\theta = 0$, el centro de la rueda se ubica en $(0, R)$. Las coordenadas (x, y) de un punto Q en la rueda están dadas simplemente por

$$x = X + \rho \cos \theta \tag{4D.11}$$

$$y = R - \rho \sin \theta . \tag{4D.12}$$

Si dividimos ambas igualdades por R y denotamos $h \equiv \rho/R$, entonces

$$x_R \equiv x/R = \theta + h \cos \theta \tag{4D.13}$$

$$y_r \equiv y/R = 1 - h \sin \theta , \tag{4D.14}$$

con $0 \leq h \leq 1$. Juegue con la siguiente rutina MatLab, modificándola a gusto, para visualizar lo que resulta. Al hacer $h = 0$ se está identificando el centro de la rueda, cuya trayectoria debiera ser recta. Al hacer $h = 1$ se identifica un punto en la periferia de la rueda. Cualquier valor intermedio identificará puntos al interior de la rueda.

```
theta_a=0; theta_b=6*pi; dtheta=pi/30;
theta=theta_a:dtheta:theta_b;
h=1;
xr=theta+h*cos(theta);
yr=1-h*sin(theta);
plot(xr,yr)
axis([0,theta_b,0,3]);
```

4D.2. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: En un caso de rodadura perfecta de una esfera sobre una superficie, indique qué tipo de roce existe en el punto de contacto y si esta fuerza realiza trabajo o no.

Pregunta 2: En un caso de rodadura perfecta de un disco (radio R) sobre una superficie, indique la relación entre el desplazamiento del centro de masa (Δs) y el desplazamiento angular medido en relación al centro de masa ($\Delta \theta$)

Pregunta 3: Dibuje el DCL y exprese las ecuaciones dinámicas para el disco (radio R y masa M) que se muestra en la figura 4D.9.

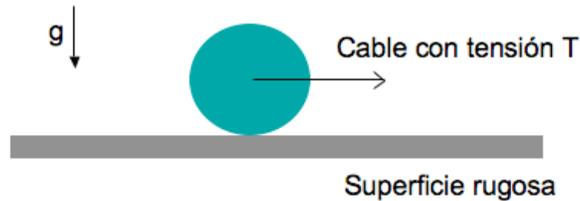


Figura 4D.9: Disco que rota sin resbalar.

Pregunta 4: Un cilindro de radio R rueda sin resbalar sobre un plano inclinado en un ángulo β con respecto a la horizontal, tirado desde un eje por una cuerda con tensión T , tal como se muestra en la figura 4D.10. El cilindro, de masa M , tiene un momento de inercia I con respecto a un eje que pasa por su centro. Haga un diagrama de cuerpo libre para el cilindro y plantee las ecuaciones que permitan obtener su aceleración sobre el plano.

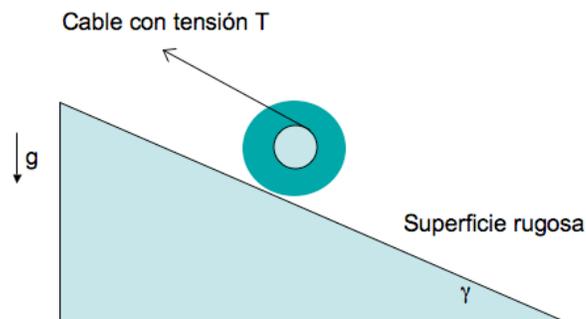


Figura 4D.10: Cilindro sobre un plano inclinado y tirado por una cuerda con tensión T . El cilindro rota sin resbalar.

Pregunta 5: Explique con detalle el significado de la condición *rueda sin resbalar*

4D.3. Ejercicios

Ejercicio 1: Un disco de masa M y radio R rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal rugosa, tirado por una cuerda que se engancha en su centro (ver figura 4D.11). La tensión en la cuerda es F_0 (constante). Determine la aceleración del centro de masa del disco.

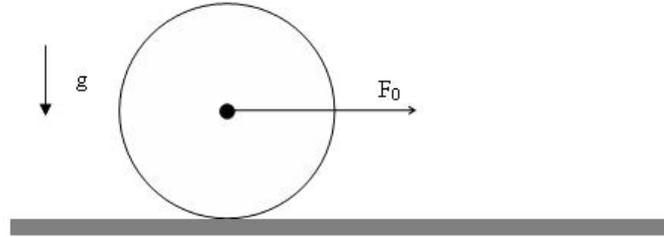


Figura 4D.11: Ejercicio 1

Ejercicio 2: Un disco de radio R y masa M rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal rugosa, tirada hacia la derecha por una cuerda ideal que se mantiene paralela al plano. La tensión de la cuerda es T (constante). La cuerda se va desenrollando sin resbalar de un carrete de radio r concéntrico al disco (ver figura 4D.12). Haga un gráfico de la fuerza de roce (incluyendo signos y magnitud) como función del radio r .

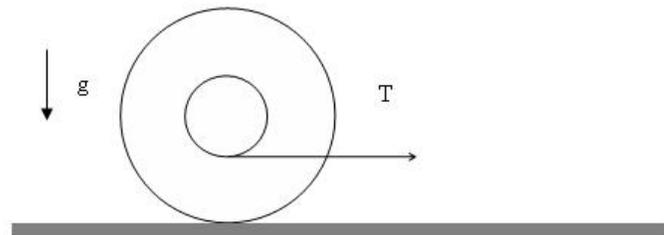


Figura 4D.12: Ejercicio 2

Ejercicio 3: El disco de la figura 4D.13 tiene radio R y masa M y puede rodar sin resbalar sobre una superficie horizontal rugosa. El centro del disco está enganchado a un resorte de constante elástica k . Inicialmente, el resorte se encuentra en su largo natural y súbitamente el centro de masas del disco adquiere una velocidad v_0 tal que el resorte se comienza a comprimir.

Calcule la compresión máxima del resorte y compare con el valor que obtendría si en vez del disco se tratara de una partícula de masa M sin roce con la superficie. Indicación: Resuelva este problema mediante trabajo/energía.

Ejercicio 4: La figura 4D.14 muestra dos cilindros de radio R y masa M que pueden rodar sin resbalar por un plano inclinado en un ángulo α . Los cilindros están unidos por su centro mediante una

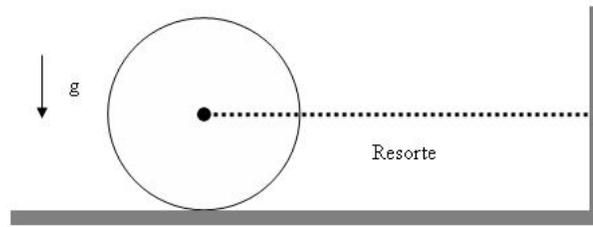


Figura 4D.13: Ejercicio 3

cuerda ideal que se mantiene tensa. El cilindro que está delante tiene su masa distribuida uniformemente en su volumen, mientras que el cilindro que está detrás tiene su masa concentrada en el perímetro de radio R .

- Determine la tensión de la cuerda.
- Determine la aceleración del sistema.

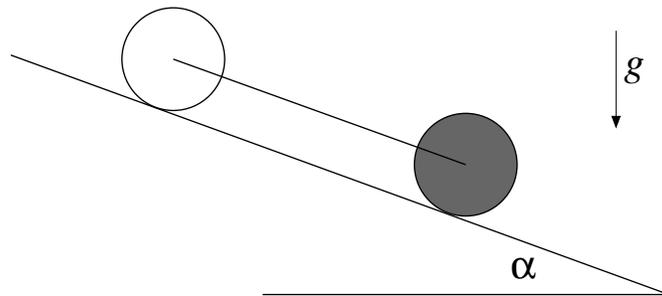
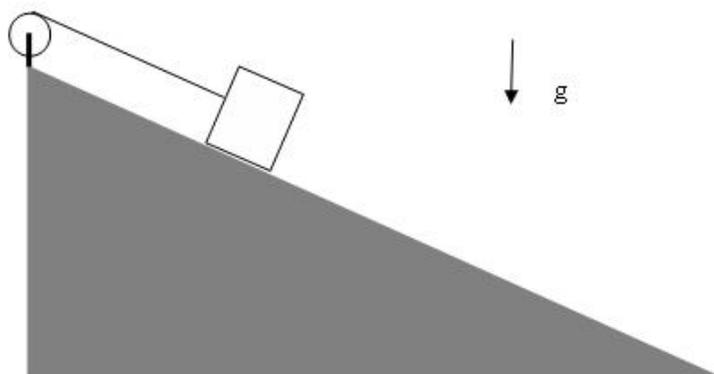


Figura 4D.14: Ejercicio 4.

Ejercicio 5: Una partícula de masa m puede deslizarse sin roce sobre un plano inclinado (ángulo α con respecto a la horizontal). La partícula está unida al extremo de una cuerda ideal que se mantiene paralela al plano inclinado. El otro extremo de la cuerda se enrolla en el borde de un disco de masa M y radio R . La cuerda se va desenrollando sin resbalar del borde del disco.

Si la partícula se suelta del reposo, determine su velocidad una vez que ha descendido una distancia D medida a lo largo del disco.

Indicación: Resuelva este problema mediante trabajo/energía



Unidad 5A: Oscilaciones–Introducción

5A.1. Introducción: movimiento circular uniforme

Antes de iniciar el estudio de pequeñas oscilaciones, o de movimiento periódico en general, es ilustrativo recordar el movimiento circular uniforme. El movimiento circular de un móvil se caracteriza por tener un radio R constante. Debido a esto es muy cómodo describir el movimiento utilizando como parámetro el ángulo entre el vector posición y el eje de las abscisas (\hat{x}). La posición queda entonces completamente definida por el ángulo ϕ a través de (ver figura 5A.1):

$$\vec{r} = R \cos \phi \hat{x} + R \sin \phi \hat{y}$$

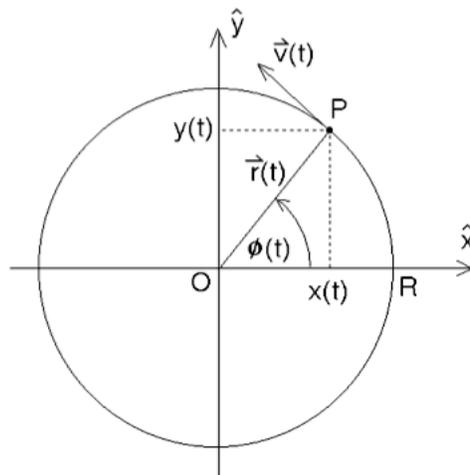


Figura 5A.1: Vector posición en un movimiento circular uniforme.

Si la posición del cuerpo cambia en el tiempo, entonces podemos expresar un pequeño cambio en la posición como

$$d\vec{\phi} = \frac{ds}{R} \hat{z}$$

donde hemos utilizado la regla de la mano derecha para expresar el ángulo de forma vectorial; ds es la longitud del arco de circunferencia entre ambas posiciones, considerado positivo si el ángulo aumenta.

Naturalmente $d\phi$ es adimensional (cociente entre cantidades con las mismas unidades). Si el movimiento circular es uniforme, entonces por definición la tasa de cambio del ángulo ϕ en el tiempo es constante y se denomina velocidad angular:

$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} = \text{constante, luego } \phi(t) = \phi_o + \omega t$$

La expresión anterior se aplica a la rotación en torno a un eje fijo, que es lo que se tratará en este curso (en el caso general se debe considerar un eje instantáneo de rotación).

Notamos que las coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ del vector posición oscilan entre $\pm R$ y las podemos escribir como

$$x(t) = R \cos(\phi_o + \omega t) ; y(t) = R \text{sen}(\phi_o + \omega t).$$

R representa entonces la *amplitud* del movimiento en x o en y . Al ángulo $\phi(t)$ lo llamamos *fase*, y al ángulo inicial ϕ_o lo llamamos *constante de fase*. El movimiento es periódico, repitiéndose cuando la fase cambia en 2π . El período T del movimiento lo obtenemos de imponer $\omega T = 2\pi$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

En el caso de movimiento circular, ω representa la velocidad angular, que podemos relacionar con la velocidad tangencial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Sin embargo, es muy común poder expresar movimientos periódicos a través de funciones trigonométricas. En estos casos el ángulo ϕ puede no representar la posición de un cuerpo en una circunferencia, pero siempre representa la fase del movimiento, como veremos a continuación.

5A.2. Movimiento armónico simple

Un resorte ideal sin masa representa una muy buena aproximación a una gran cantidad de fenómenos físicos, no sólo relacionados con la elasticidad de sólidos. Ya en el siglo XVII se caracterizó estos fenómenos a través de la conocida *Ley de Hooke*: la fuerza que ejerce un resorte es proporcional al módulo del desplazamiento y en sentido opuesto.

$$\vec{F}_e = -k\Delta\vec{x} = -k(\vec{x} - \vec{x}_o)$$

donde \vec{x}_o es la posición de equilibrio, que corresponde al largo natural del resorte en el caso de no haber otras fuerzas presentes, y k es una constante de proporcionalidad positiva con unidades N/m.

Eligiendo el origen del sistema de coordenadas en el largo natural del resorte y orientando el eje x a lo largo del resorte podemos escribir la segunda ley de Newton como

$$F = -kx = ma$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{5A.1}$$

donde los puntos sobre la x representan derivadas con respecto al tiempo. Para encontrar las soluciones a esta ecuación, suponemos soluciones del tipo exponencial, es decir $x = ae^{bt}$. Al reemplazar en la ecuación anterior obtenemos una ecuación algebraica para la constante b :

$$b^2 + \frac{k}{m} = 0$$

cuyas soluciones son imaginarias. Para simplificar la notación, definimos la constante $\omega_o = \sqrt{k/m}$ de modo que podemos expresar

$$b_{\pm} = \pm i\omega_o$$

Vemos que efectivamente las funciones exponenciales son soluciones de la ecuación (5A.1). Sin embargo, estas son exponenciales de exponente imaginario:

$$x_+ = a_+ e^{i\omega_o t} = a_+ [\cos(\omega_o t) + i \operatorname{sen}(\omega_o t)] \quad y \quad x_- = a_- e^{-i\omega_o t} = a_- [\cos(\omega_o t) - i \operatorname{sen}(\omega_o t)], \quad (5A.2)$$

donde a_{\pm} son constantes complejas y en la última igualdad hemos utilizado la expresión para la función exponencial compleja. La solución general de la ecuación (5A.1) es una combinación lineal de las dos soluciones x_{\pm} . Esta solución incluye dos constantes a_{\pm} (llamadas constantes de integración en el curso de Ecuaciones Diferenciales) que dependen de las condiciones iniciales del problema. La solución general se puede expresar de una variedad de formas, siempre con dos constantes de integración. Dejamos al lector verificar las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_+ e^{+i\omega_o t} + a_- e^{-i\omega_o t} \\ &= a_c \cos(\omega_o t) + a_s \operatorname{sen}(\omega_o t) \\ &= B \operatorname{sen}(\omega_o t + \varphi_s) \\ &= A \cos(\omega_o t + \varphi_o) \end{aligned} \quad (5A.3)$$

Donde la última expresión es la que utilizaremos frecuentemente. En este caso las constantes de integración son la *amplitud* A y la *constante de fase* φ_o . La cantidad $\omega_o = 2\pi/T$ la llamamos *frecuencia angular*; T es el período del movimiento. Las unidades de la frecuencia angular son rad/s. Puesto que el radián es un número puro, carece de unidades, por lo que la unidad SI de la frecuencia angular es $1/s$ o s^{-1} . Notamos que ω_o tiene unidades de frecuencia, pero NO corresponde a una velocidad angular como en el caso de movimiento circunferencial uniforme, ya que no hay ningún ángulo en la definición del problema.

En resumen, el movimiento armónico simple se puede caracterizar a través de

- variable $x(t) = A \cos(\omega_o t + \varphi_o)$ que representa posición en el caso de un resorte ideal, pero puede representar cualquier cantidad física que oscile de forma periódica: ejemplos ángulo para el movimiento de un péndulo, corriente eléctrica en un circuito de corriente alterna.
- Amplitud del movimiento A con las mismas unidades que x .
- Frecuencia angular $\omega_o = 2\pi/T$ donde T es el período.

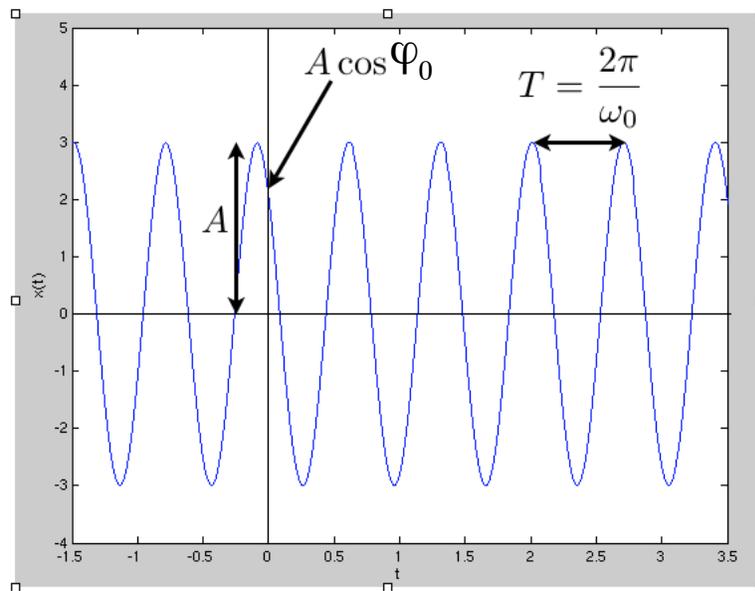


Figura 5A.2: Gráfico de la función (5A.3) donde se representan los parámetros A , φ_0 y T

- Fase $\varphi(t) = \omega_o t + \varphi_o$ varía entre 0 y 2π .
- Constante de fase φ_o .

La ecuación del movimiento armónico simple es fundamental para describir el movimiento de muchos sistemas físicos. Les recomendamos graficar la función (5A.3) jugando con los parámetros para explorar el efecto que tienen las variaciones de cada parámetro en la función $x(t)$, como se muestra en la figura 5A.2.

5A.2.1. Resorte ideal

Para un resorte ideal (que satisface la ley de Hooke) la frecuencia angular $\omega_o = \sqrt{k/m}$ sólo depende de la constante del resorte k y la masa m del cuerpo adherido al resorte; ω_o es independiente de las condiciones iniciales del problema. A menudo se agrega el subíndice ω_o a la frecuencia angular para hacer notar que es constante y para distinguirla de la velocidad angular en caso de que se preste a confusión.

Dada la solución para la posición en función del tiempo $x(t) = A \cos(\omega_o t + \varphi_o)$ podemos encontrar la velocidad derivando con respecto al tiempo:

$$v(t) = -A\omega_o \text{sen}(\omega_o t + \varphi_o).$$

La rapidez es máxima cuando $\omega_o t + \varphi_o = \pm\pi/2$ lo que sucede cuando el cuerpo está en el origen $x = 0$ (largo natural del resorte). En los extremos del movimiento $x = \pm A$ se tiene que $\omega_o t + \varphi_o = 0, \pm\pi$ y la rapidez instantánea es nula.

Si las condiciones iniciales del movimiento son $v = v_o$ y $x = x_o$ en $t = 0$ entonces las constantes de integración A y φ_o vienen dadas por

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_o &= \frac{-v_o}{x_o \omega_o} \\ A^2 &= x_o^2 + (v_o / \omega_o)^2 \end{aligned}$$

Por último es importante encontrar expresiones para la energía de un movimiento armónico simple:

$$\begin{aligned} E &= U_e + K = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 \\ &= \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi_o) + \frac{1}{2} m\omega_o^2 A^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi_o) \\ &= \frac{1}{2} kA^2 \end{aligned}$$

La energía mecánica es constante (en la última expresión reemplazamos $m\omega_o^2 = k$).

5A.3. Péndulo simple

Un péndulo simple consiste en un cuerpo puntual de masa m colgando de un hilo ideal inextensible y sin masa fijo al cielo sobre la superficie terrestre (ver figura 5A.3). Las cantidades R , m y g son constantes; la única cantidad variable en el tiempo es el ángulo θ entre el hilo y la vertical del lugar.

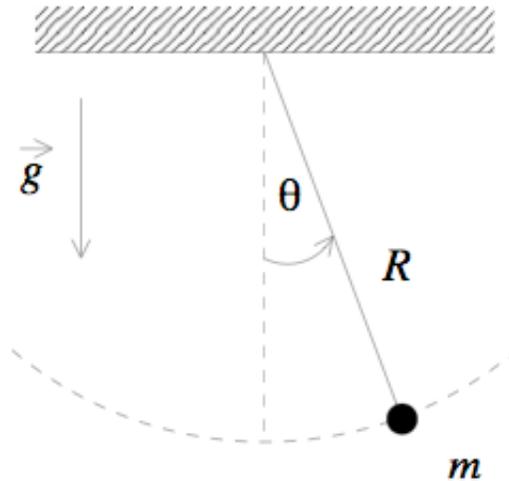


Figura 5A.3: Péndulo.

Para encontrar una solución para la posición definida por el ángulo $\theta(t)$ lo más sencillo es utilizar la ecuación de torque con respecto al punto de apoyo del hilo ya que la tensión no realiza torque con respecto a ese punto (tensión es paralela al brazo). La velocidad angular es $\omega = \dot{\theta}$ y la velocidad tangencial

$v = R\omega$. El momento angular de la partícula con respecto al punto de apoyo del hilo es $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ cuyo módulo es $l = mR^2\dot{\theta}$ y su derivada temporal

$$\frac{dl}{dt} = mR^2\ddot{\theta}$$

El torque del peso con respecto al punto de apoyo del hilo es

$$\tau_g = -Rmg \sin \theta = \frac{dl}{dt},$$

luego la ecuación que describe el movimiento del péndulo se puede expresar como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

Esta ecuación es aparentemente muy similar a la ec. (5A.1) sin embargo el que aparezca la función $\sin \theta$ en vez del ángulo θ puede introducir diferencias sustanciales en sus soluciones. La solución general para la amplitud del movimiento de un péndulo no representa un movimiento armónico simple que se reproduce bien por la solución (5A.3). Sin embargo el movimiento *sí es periódico* y tiene período y frecuencia angular bien definidos. Su solución general, sin embargo es matemáticamente mucho más compleja.

Afortunadamente para el caso en que el péndulo oscila con ángulos pequeños podemos aproximar la función $\sin \theta \approx \theta$ si $\theta \ll 1$ rad. Notamos también que las constantes g y R son positivas, luego podemos definir la constante

$$\omega_o^2 = \frac{g}{R}$$

obteniendo la siguiente ecuación para describir el movimiento del péndulo

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0$$

donde es evidente ahora la similitud con la ecuación (5A.1) que describe el movimiento de una masa pegada a un resorte ideal. Podemos adivinar inmediatamente la solución de esta ecuación:

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega_o t + \varphi_o)$$

donde la amplitud $A = \theta_{\max}$ es un ángulo. Es muy importante distinguir en este caso la constante $\omega_o = \sqrt{g/R}$ que representa la frecuencia angular del movimiento de la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$ que para empezar no es constante y tiene un significado físico distinto. El período del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (5A.4)$$

5A.3.1. Péndulo físico

Un péndulo físico es cualquier péndulo real que no pueda ser bien aproximado por una masa puntual atada a un hilo ideal. Es decir, cualquier caso en que el momento de inercia del sistema con respecto al

punto de apoyo difiera de mR^2 con m la masa puntual y R la distancia entre el punto de apoyo y la masa puntual. Para distinguirlo del péndulo simple, utilizaremos M para la masa, d para la posición del centro de masa con respecto al punto de apoyo e I para el momento de inercia del sistema con respecto al punto de apoyo. El torque del peso con respecto al punto de apoyo es ahora

$$\tau_g = -dMg \sin \theta = I\alpha = I\ddot{\theta}$$

donde α es la aceleración angular y la derivada del momento angular con respecto al tiempo es

$$\frac{dL}{dt} = I\alpha$$

dado que I es constante. Para pequeñas oscilaciones podemos reemplazar de nuevo $\sin \theta \sim \theta$ y obtenemos la ecuación

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\theta = 0$$

que describe un movimiento armónico simple con frecuencia angular

$$\omega_o^2 = \frac{Mgd}{I} > 0$$

Ejemplo: barra homogénea de longitud L y masa M oscilando en torno a un extremo. En este caso la posición del centro de masa es $d = L/2$ y el momento de inercia con respecto a su extremo es $I = 1/3ML^2$ con lo cual obtenemos el período del movimiento como

$$T_{\text{físico}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Si consideramos el mismo sistema como un péndulo simple de masa M concentrada en su centro de masa y utilizamos el período de la expresión (5A.4) obtenemos

$$T_{\text{simple}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

En general notamos que el período de un péndulo físico es mayor que el período de un péndulo simple con la misma masa concentrada en su centro de masa y menor que el período de un péndulo simple de la misma longitud.

5A.4. Problemas resueltos:

5A.4.1. Problema: Hamster en apuros

Un hamster se coloca en una rueda circular que puede girar libremente (sin roce) en torno a un pivote que pasa por su centro P. Para comodidad del hamster se coloca una plataforma horizontal (bajo el pivote). El sistema se libera con el hamster inicialmente en reposo en uno de los extremos de la plataforma. El pobre animal, ante la inminencia de su caída comienza a correr hacia el centro de la plataforma. Tras un poco de práctica el ingenioso roedor descubre una forma de movimiento que mantiene la plataforma (y la rueda que la sostiene) estacionaria y horizontal. **Determine dicha forma de movimiento.**

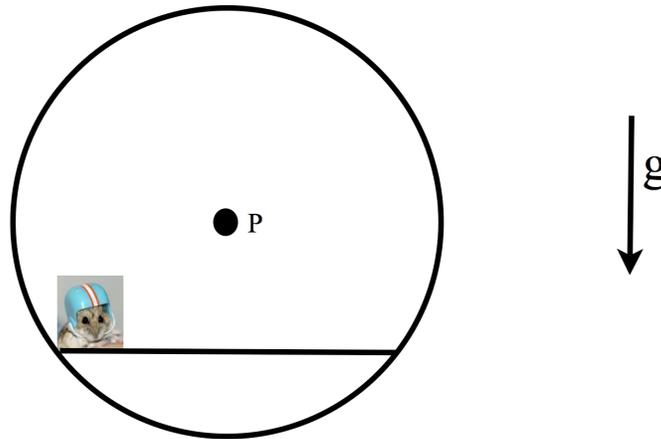


Figura 5A.4: ¿Como debe correr el roedor para no mover la rueda?

Solución

Dado que el hamster debe comenzar a moverse desde el reposo, necesariamente la plataforma ejerce una fuerza que le permita acelerar. A su vez, el hamster ejerce la misma fuerza sobre la plataforma. Dicha fuerza es naturalmente $-ma$, donde m es la masa del hamster y a su aceleración. La posición del hamster, tomando como origen el centro de la rueda es (x, δ) , donde δ es la distancia entre el pivote y el centro de la plataforma horizontal. La fuerza neta en dicho punto es $(-ma, mg)$, de modo que el torque neto es: $\vec{r} \times \vec{F} = m(xg + \delta a)\hat{z}$. Igualando a cero el torque obtenemos $a = -\frac{g}{\delta}x$, i.e. la ecuación de un oscilador armónico. La solución debe cumplir las condiciones iniciales $x(0) = -L/2$ (donde L es el largo de la plataforma horizontal) y $v(0) = 0$. De este modo obtenemos:

$$x(t) = -\frac{L}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\right). \quad (5A.5)$$

5A.4.2. Esferita oscilando al interior de un cilindro hueco:

Una esferita de radio r (r muy pequeño pero no despreciable) rueda sin resbalar en un casquete cilíndrico de radio R ($R \gg r$) como se indica en la figura. Determine el período del movimiento de la esfera para pequeñas oscilaciones en torno a la base del casquete (punto más bajo). Suponga que las oscilaciones ocurren en un plano perpendicular al eje principal del cilindro.

Solución

La figura 5A.6 ilustra el DCL de la esferita de radio r . Las únicas dos fuerzas sobre la esferita son el peso y la normal. Si calculamos el torque neto con respecto al punto de contacto p entre la esferita r y el cilindro R obtenemos

$$rmg \sin(\pi - \theta) = I_p \alpha$$

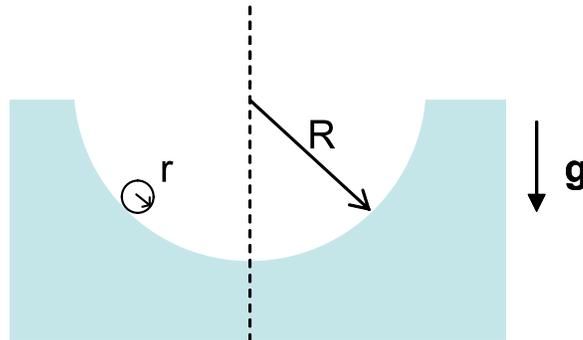


Figura 5A.5: Sistema bolita/cilindro.

donde el torque apunta hacia afuera del papel si la esferita está al lado derecho del punto más bajo del cilindro (como en la figura 5A.6) y hacia adentro del papel si la esferita está al lado izquierdo.

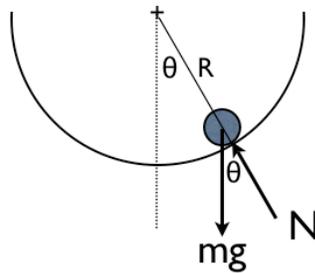


Figura 5A.6: Diagrama de cuerpo libre sobre la bolita.

El momento de inercia de la esferita con respecto a su centro de masa es $I_{cm} = 2/5mr^2$ de donde obtenemos $I_p = 7/5mr^2$ con respecto a un punto sobre la superficie. La aceleración del centro de masa de la esferita es $a_{cm} = r\alpha$, donde α es la aceleración angular de la esferita en torno a su centro. Reemplazando I_p , a_{cm} , y $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ en la ecuación anterior obtenemos la ecuación del movimiento:

$$g \sin \theta = \frac{7}{5} a_{cm}$$

Ahora usamos el hecho que el centro de masa de la esferita se mueve en movimiento circular por el interior del cilindro (a una distancia $R - r$ del centro). Luego $a_{cm} (= r\alpha)$ representa también la aceleración tangencial: $a_{cm} = -(R - r)\ddot{\theta}$ donde los puntos representan derivadas con respecto al tiempo. Esta es la relación entre la rotación en torno al centro de la esfera y la rotación en torno al eje del cilindro que es necesario imponer para resolver el problema. Notar el signo negativo: si la esferita baja desde la posición de la figura entonces $\alpha > 0$ y $\ddot{\theta} < 0$; si la esferita está al lado izquierdo de la vertical entonces $\alpha < 0$ y $\ddot{\theta} > 0$.

Para pequeñas oscilaciones podemos usar $\sin \theta \sim \theta$, llegando a la ecuación

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}\theta = 0 ,$$

que representa un movimiento armónico simple de frecuencia natural

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}} = \frac{2\pi}{T},$$

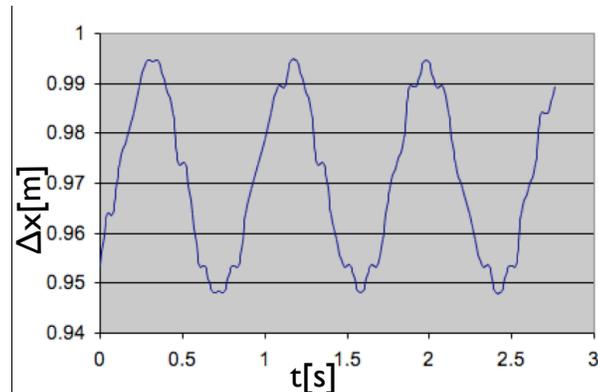
de donde obtenemos finalmente el período del movimiento como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}.$$

5A.5. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: La figura representa oscilaciones de un resorte en torno a su largo natural: posición vs tiempo.

Estimar el largo natural del resorte, la amplitud, frecuencia angular, período y constante de fase del movimiento.



Pregunta 2: Determinar el largo que debe tener un péndulo simple sobre la superficie terrestre, de modo que su período para pequeñas oscilaciones en torno a la posición vertical sea de 60 s.

Pregunta 3: Una masa de $m = 0,3$ kg se ata a un resorte de constante natural $k = 60$ N/m. Desde la posición de equilibrio se estira el resorte en 0,2 m y se suelta:

1. ¿Qué fuerza ejerce el resorte en $t = 0$?
2. ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones?
3. ¿Cuál es el período de las oscilaciones?
4. ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones?

Pregunta 4: Una persona sentada en un columpio oscila en su frecuencia angular natural ω . Si la persona se para sobre el mismo columpio, la nueva frecuencia natural del sistema columpio-persona será:

1. Igual,
2. Mayor,
3. Menor.

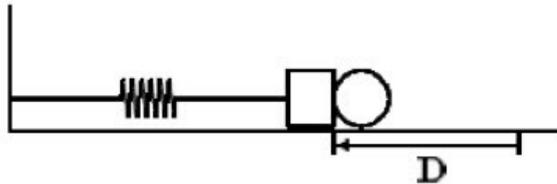
5A.6. Ejercicios

Ejercicio 1: Un objeto descansa en equilibrio estático desde un resorte colgado del techo del laboratorio. Al bajar el objeto una pequeña distancia, la suma de su energía potencial elástica y gravitacional:

1. Permanece constante,
2. Aumenta,
3. Disminuye.

Ejercicio 2: Un resorte fijo en un extremo lleva en su otro extremo un pequeño bloque de masa m . El resorte está dispuesto horizontalmente sobre una superficie horizontal sin roce. El resorte es comprimido una distancia D con una bolita de igual masa m y el sistema se suelta eyectando la bolita.

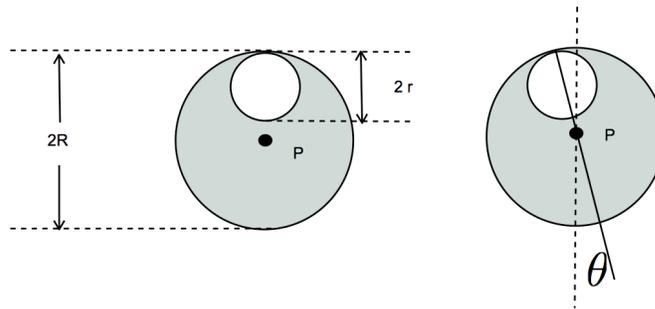
1. Escriba la solución a las ecuaciones de movimiento para los intervalos $0 < t < t_1$ y $t > t_1$, donde t_1 es el instante en que se eyecta la bolita. Indique el valor de las constantes de integración.
2. Determine el tiempo t_1 en que permanecen ambas masas en contacto.
3. Calcule la amplitud de las oscilaciones del resorte una vez que la bolita ha sido eyectada.
4. Calcule la distancia entre los cuerpos en el instante en que el resorte se comprime completamente por segunda vez.



Ejercicio 3: Un cuerpo de masa de 2 kg se sujeta a un resorte de constante de fuerza $k = 10 \text{ N/m}$ que descansa en reposo sobre una superficie horizontal lisa. Otro cuerpo de 1 kg se desliza a lo largo la misma superficie con una rapidez de 6 m/s en dirección al primer cuerpo.

1. Encuentre la amplitud y período de la oscilación si los cuerpos chocan plásticamente quedando unidos entre sí y al resorte.
2. Encontrar la amplitud y período de oscilación si el choque es completamente elástico.
3. Expresar la posición $x(t)$ del cuerpo sujeto al resorte en cada caso suponiendo que el choque ocurre en $t = 0$.

Ejercicio 4: Consideremos un disco uniforme de masa M y radio R . Del disco se retira el material contenido en el interior de una circunferencia de radio r ($r < R$) ubicada en la periferia. El sistema resultante se ilustra en la figura. El objeto pivota en torno al punto P , correspondiente al centro geométrico del disco original.



1. Determine la ecuación de movimiento para las desviaciones del sistema desde su posición de equilibrio vertical.
2. Encuentre el periodo de pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio.
3. Estudie cuidadosamente el sentido físico de su resultado en los límites $r/R \gg 1$ y $|1 - r/R| \ll 1$.

Unidad 5B: Oscilaciones amortiguadas

5B.1. Fuerzas de roce viscoso

El desplazamiento de un globo en un medio fluido, como lo es el aire, es un fenómeno fascinante y a su vez sumamente intrigante. Aun a estas alturas de nuestra civilización, con toda la tecnología disponible, conocimiento e incontables aciertos en la física, este simple fenómeno esconde innumerables misterios que no han podido ser explicados. Tales limitaciones no impiden, sin embargo, intentar un acercamiento fenomenológico del comportamiento de un globo cuando jugamos con él. Este conocimiento nos permitirá comprender algo sobre la caída de un paracaídas, lo costoso que es andar rápido en la carretera, las ideas detrás del vuelo de un helicóptero, la caída de una pluma en el aire, el arrastre de las aguas, el despegue del transbordador espacial o el hundimiento de una piedra en una laguna. Es una característica de estos sistemas la atenuación del movimiento relativo entre el fluido y el objeto.

Consideremos el movimiento del globo en el aire. Los efectos del aire se manifestarán en la forma de una resistencia del aire sobre el globo, oponiéndose al desplazamiento. Estas fuerzas corresponden a las del tipo *roce viscoso*.

Esta fuerza que actúa sobre el globo corresponde a una manifestación macroscópica de su interacción con el gran número de átomos que conforman el volumen de aire que rodea al globo. El movimiento del globo implica su colisión con dichos átomos y el consiguiente intercambio de energía y momentum. Dicha complejidad se nos presenta como un problema insoluble, que deja atrás a las más sofisticadas herramientas de cálculo. A pesar de esto, y en realidad gracias a esto, el efecto neto se puede expresar en forma bastante sencilla. La idea es que la dinámica de todos los átomos es tan compleja que la única información coherente que se deriva de ella es su efecto promedio, dejando la información asociada a cada átomo individual como algo indetectable y, en definitiva, irrelevante. Esta idea, a pesar de su sencillez, puede parecer extremadamente increíble, casi una *trampa*. En realidad constituye uno de los principios fundamentales de la física y en un modo muy preciso constituye una de las ideas más importantes de la física contemporánea.

El efecto neto del movimiento del globo será poner en movimiento un gran número de átomos, ellos se llevarán energía y el globo a los ojos del observador macroscópico parecerá perder energía. En la medida en que nos interese sólo por el movimiento macroscópico podemos hablar de una fuerza neta que hace el aire sobre el globo. En general podemos representar la fuerza del aire sobre el globo de la forma

$$\vec{F} = -f(|\vec{v}|)\hat{v},$$

con $-\hat{v}$ representando un vector unitario en sentido opuesto al desplazamiento, $|\vec{v}| = v$ la rapidez del globo con respecto al aire y f una función. Con esta expresión se supone muy poco sobre los mecanismos que determinan f . La forma general de $f(v)$ depende del régimen de velocidades, densidad del aire, propiedades termodinámicas, geometría del cuerpo, entre muchas otras. En la práctica el verdadero sentido de la ecuación anterior se completa al medir f mediante experimentos. Esta forma de teoría se conoce como fenomenológica. Es importante notar que si $f > 0$ la energía mecánica del sistema es siempre decreciente. Es decir, esta forma de roce es disipativa.

En general el comportamiento de la fuerza de roce viscoso debe ser determinada en un experimento. Aunque es un comportamiento complicado y no universal, se reconocen, sin embargo, dos regímenes de velocidades donde $f(v)$ toma formas particularmente simples:

$$f(v) \rightarrow f_s(v) \propto v,$$

para movimientos “lentos” donde priman las fuerzas viscosas y

$$f(v) \rightarrow f_r(v) \propto v^2,$$

para movimientos rápidos, que típicamente involucran la generación de turbulencia.

5B.2. El frenado de una esfera (sin gravedad)

Un sistema simple consiste en una esfera de masa m rodeada de aire y en ausencia de gravedad. El movimiento es unidimensional (según un eje “x”), donde suponemos una fuerza del tipo

$$F_x = -bv_x,$$

denotando por b al *coeficiente de roce viscoso*. En esta notación es evidente que el coeficiente de roce viscoso tiene unidades de $F/v \sim \text{kg/s}$. Además, supondremos que la masa parte en $t = 0$ con rapidez v_0 (figura 5B.1).

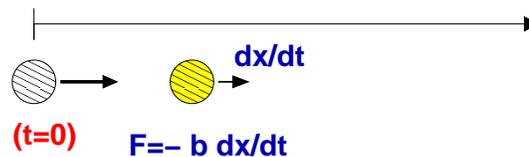


Figura 5B.1: Cuerpo en presencia de roce viscoso.

Al aplicar la segunda ley de Newton ($F_x = m dv_x/dt$) tenemos

$$m \frac{dv_x}{dt} = -bv_x, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_x,$$

con $\tau = m/b$. Notemos que τ tiene dimensiones de tiempo. En esta ecuación uno se plantea la siguiente pregunta: ¿Cuál es aquella función $v_x(t)$, que al derivarla es proporcional a ella misma? La respuesta la encontramos en la función exponencial, particularmente

$$v_x(t) = A e^{-t/\tau}.$$

Aquí, A representa una constante que está restringida por la *condición inicial*, vale decir, información sobre la velocidad en $t = 0$. Recordamos que en $t = 0$, $v_x = v_o$, entonces $A = v_o$. De esta forma,

$$v_x(t) = v_o e^{-t/\tau}.$$

Notar que la velocidad se atenúa *exponencialmente*, lo que se ilustra en la tabla siguiente:

t	v_x
0	1.000 v_o
τ	0.368 v_o
2τ	0.135 v_o
3τ	0.050 v_o
4τ	0.020 v_o
5τ	0.007 v_o

El resultado anterior para $v_x(t)$ puede ser utilizado para obtener $x(t)$. Escribimos esta vez

$$v_x(t) = v_o e^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_o e^{-t/\tau}.$$

Esta vez nos preguntamos por aquella función que al derivar resulta una exponencial en t . La respuesta nuevamente es una exponencial. Planteamos

$$x(t) = -v_o \tau e^{-t/\tau} + C,$$

con C una constante que ha de ser determinada por la condición inicial. Si exigimos que en $t = 0$ la posición del globo coincide con el origen ($x = 0$), entonces $C = v_o \tau$, con lo cual

$$x(t) = v_o \tau (1 - e^{-t/\tau}).$$

Un gráfico de esta función se ilustra en la figura 5B.2 y se observa que para un tiempo muy grande, $x \rightarrow v_o \tau$. El globo no sobrepasará esa distancia. Cuán lejos queda tal punto dependerá de $\tau = m/b$; mientras más chico sea b (la fricción), más lejos llegará el globo. Lo mismo ocurre si es más masivo.

5B.3. Caída vertical con roce

La caída vertical por gravedad cuando actúa el roce viscoso se puede representar mediante la ecuación $\ddot{y} = g - (1/\tau)\dot{y}$. Si el objeto parte del reposo en $y = 0$, entonces $y(t)$ queda dado por

$$y(t) = g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} + e^{-t/\tau} - 1 \right).$$

La *velocidad terminal* V_t es aquella que adquiere el cuerpo cuando deja de acelerar. En este caso es cuando el peso (mg) equipara la fuerza por roce (bV_t). Así,

$$V_t = \frac{mg}{b} = g\tau.$$

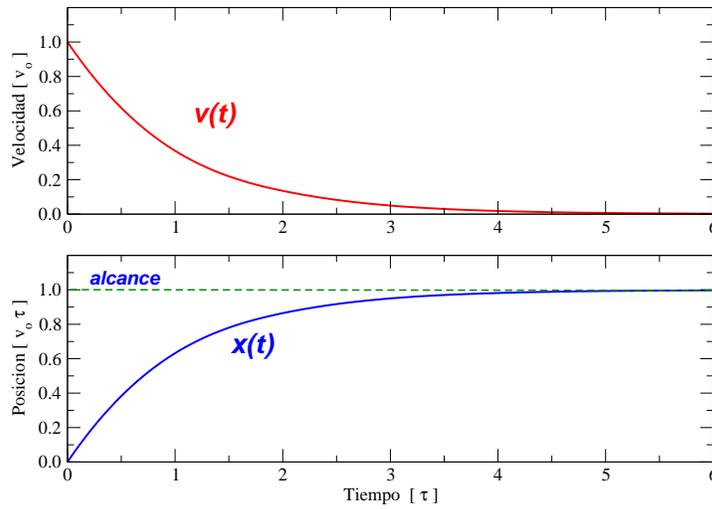


Figura 5B.2: Velocidad (arriba) y posición (abajo) del cuerpo en función del tiempo.

Cuando un objeto cae verticalmente por gravedad en presencia de una fuerza de roce cuadrática en la velocidad, su movimiento queda descrito por

$$m\ddot{y} = mg - cv_y^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \frac{dv_y}{dt} = g - \beta^2 v_y^2,$$

donde hemos definido $\beta^2 = c/m$, con c el coeficiente de roce turbulento. Para una partícula que cae inicialmente desde el reposo, $v_y(0) = 0$, se obtiene para la velocidad

$$v_y(t) = \frac{\sqrt{g}}{\beta} \operatorname{tgh} \sqrt{g}\beta t.$$

Notando que la velocidad terminal la podemos escribir como $V_t = \sqrt{g}/\beta$ y reemplazando tgh por su expresión exponencial obtenemos finalmente

$$v_y(t) = V_t \frac{1 - e^{-2gt/V_t}}{1 + e^{-2gt/V_t}}.$$

5B.4. Oscilaciones amortiguadas

En la unidad anterior se estudiaron oscilaciones armónicas mecánicas. Así, por ejemplo, si $x(t)$ representa la posición de un objeto que realiza un movimiento armónico simple, entonces su movimiento está descrito por la ecuación

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0,$$

donde ω_o representa la *frecuencia natural* del sistema. La solución $x(t)$ a esta ecuación es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_o).$$

En ella, las constantes A (amplitud) y φ_o (constante de fase) dependen de las condiciones iniciales del sistema. En contraste, ω_o depende exclusivamente de sus propiedades físicas.

Consideremos esta vez el sistema formado por un bloque de masa m unido a un resorte de constante elástica k de la figura 5B.3. Como es sabido, en este caso

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m}.$$

Además, supongamos la acción de una fuerza de roce viscoso $-b\dot{x}$ actuando sobre el bloque.

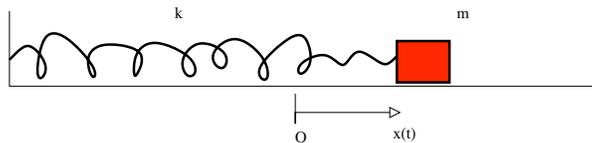


Figura 5B.3: Movimiento de un objeto de masa m adherido a un resorte de constante elástica k en presencia de roce viscoso $-b\dot{x}$.

De acuerdo a la segunda ley de Newton, $m\ddot{x} = F_x$, tenemos

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

o de forma equivalente:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

donde τ representa un *tiempo de atenuación*. En la asignatura de *Mecánica*, se estudiará en algún detalle sistemas que resultan descritos por este tipo de ecuaciones. La solución $x(t)$ en este caso es

$$x(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \varphi_o),$$

con

$$\Omega^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2.$$

Nótese que en ausencia de roce ($b = 0$), el tiempo de atenuación τ es infinito, con lo cual $\Omega \rightarrow \omega_o$. Se recupera el movimiento es armónico simple, sin amortiguamiento.

En la figura 5B.4 se ilustra la posición de un cuerpo oscilando amortiguadamente. Se puede observar la ciclicidad y atenuación del movimiento. En este caso se utilizó $\tau = 2$ s, y $\Omega = 1$ s⁻¹. Si el cuerpo en cuestión tiene una masa de diez gramos, ¿cuál sería la constante elástica del resorte y el coeficiente de roce b ?

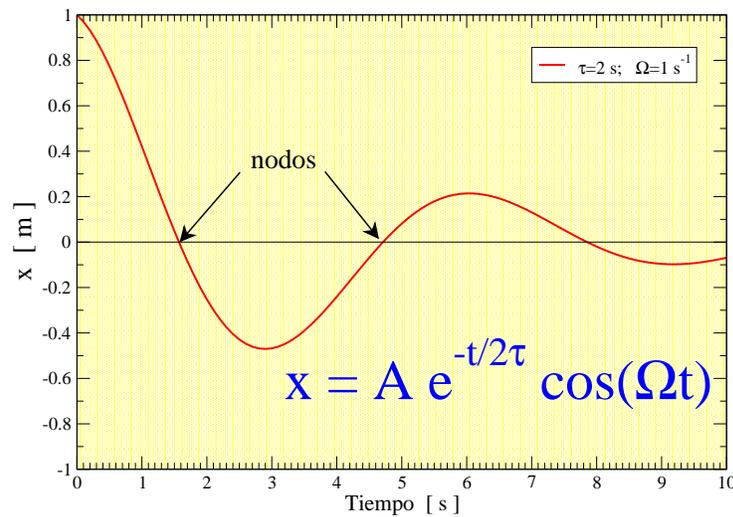


Figura 5B.4: Posición en función del tiempo del cuerpo de la figura 5B.3.

Apéndices

5B.5. La fuerza de Stokes

Consideremos una esfera inmersa en un fluido muy viscoso y supongamos que el líquido fluye suavemente, como se ilustra en la figura 5B.5. La fuerza de roce viscoso que el fluido ejerce sobre la esfera toma una forma bastante simple. La expresión para tal fuerza fue deducida por Sir George Gabriel Stokes, en el año 1840. Si la esfera tiene un radio R y la viscosidad del fluido es η (medida en kg/ms), entonces la fuerza de arrastre está dada por

$$F_{\text{Stokes}} = 6\pi R\eta v$$

donde v es la rapidez del fluido. Nótese que la fuerza es proporcional al radio de la esfera.

5B.6. La fuerza de arrastre de Rayleigh

Para el caso de la fuerza de roce turbulento, Lord Rayleigh obtiene una expresión para la fuerza de arrastre de un fluido sobre un cuerpo. En este caso la expresión viene dada por

$$F_a = \frac{1}{2}\rho v^2 C_d A$$

con ρ la densidad del fluido, A el área transversal del objeto y C_d un coeficiente de arrastre. El valor de C_d depende en gran medida de la forma del cuerpo, variando típicamente entre 0,25 y 0,45 para un vehículo.



Figura 5B.5: Esfera moviéndose en un fluido viscoso. Las flechas representan el movimiento del fluido alrededor de la esfera.

A modo de estimación, considerando la densidad del aire igual a $1,3 \text{ kg/m}^3$, un objeto de sección transversal de 1 m^2 moviéndose a una velocidad de 10 m/s (36 km/h) y $C_d \sim 1$. Entonces la fuerza de arrastre resulta del orden de

$$F_a \sim 0,5 \times 1,3 \times 10^2 \times 1 = 65 \text{ N} .$$

La fuerza se cuadruplica si la velocidad aumenta al doble.

5B.7. Péndulo formado por un globo

Consideremos el caso de un péndulo formado por un globo atado a un cordel. La distancia entre el centro del globo y el soporte fijo es L . Son tres las fuerzas que actúan sobre el globo: el peso debido a la gravedad ($m\vec{g}$), la tensión de la cuerda (\vec{T}) y el roce que ejerce el aire sobre el globo ($-f(v)\hat{v}$). Supongamos que el roce es de tipo viscoso, entonces $f(v) = bv$. La ecuación del movimiento queda

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} - b\vec{v} .$$

La descomposición vectorial conveniente es, en este caso, mediante las coordenadas polares ($r\hat{\phi}$) definidas en la figura 5B.6. Para un movimiento circunferencial de radio L , la velocidad y aceleración quedan expresadas por

$$\vec{v} = L\dot{\phi}\hat{\phi} \quad \vec{a} = L\ddot{\phi}\hat{\phi} - L\dot{\phi}^2\hat{r} .$$

Proyectando la ecuación del movimiento exclusivamente según la componente angular $\hat{\phi}$, obtenemos

$$mL\ddot{\phi} = -mg \sin \phi - bL\dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} + \omega_o^2 \sin \phi + \frac{1}{\tau}\dot{\phi} = 0 .$$

El movimiento resultante es amortiguado pero no armónico. En el límite de pequeñas oscilaciones podemos aproximar $\sin \phi \approx \phi$, con lo cual

$$\ddot{\phi} + \omega_o^2 \phi + \frac{1}{\tau}\dot{\phi} = 0 .$$

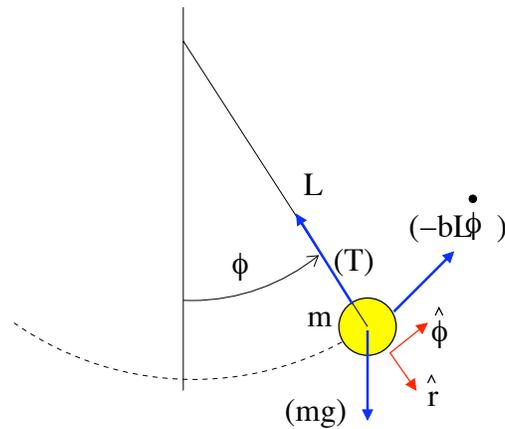


Figura 5B.6: Péndulo en presencia de roce viscoso.

La ecuación es idéntica a la del resorte con roce viscoso discutido recientemente. En este caso particular identificamos

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}, \quad \tau = \frac{m}{b}.$$

5B.8. Ejemplo

5B.8.1. Problema: tiempo de subida y bajada

Una persona lanza verticalmente un proyectil hacia arriba, con rapidez v_0 . Despreciando la resistencia del aire, el tiempo que demora en subir hasta su altura máxima es igual al tiempo que demora en caer desde ese punto hasta su posición original (ambos son iguales a v_0/g). Considerando la resistencia del aire: ¿cuál de los dos tramos demora más?.

5B.8.2. Solución

Consideremos una altura dada. El proyectil pasa por dicha altura dos veces una de ida y otra de vuelta. Como en ambas circunstancias la energía potencial es la misma, la diferencia en energía cinética deben igualar a la diferencia entre energías totales. Dicha energía es siempre mayor en el tramo de subida. Esto es fácil de ver, pues en el intervalo entre que sube y baja el roce viscoso solo pudo restar energía. La energía cinética es menor en el tramo de bajada. Esto es cierto para cada altura en el recorrido total, se sigue que demora más en bajar que en subir. En este problema no hemos hecho supuestos sobre la forma del roce viscoso, salvo que disipa energía.

5B.9. Preguntas Conceptuales

Pregunta 1: Describa el rol del coeficiente C_d en la fuerza de arrastre de Rayleigh.

Pregunta 2: Describa el rol de cada término en la expresión

$$F_S = 6\pi R\eta v$$

Pregunta 3: Describa el significado de *velocidad terminal* en el caso de un cuerpo en caída vertical.

Pregunta 4: Describa cada término en la expresión

$$F_a = \frac{1}{2}\rho C_d v^2 A,$$

para la fuerza de roce de Rayleigh.

Pregunta 5: Escriba la Fuerza de Stokes y describa el significado de los términos que la componen.

Pregunta 6: La velocidad terminal de un objeto al caer en un medio viscoso está dada por $v_t = mg/b$.
¿A qué corresponde b y qué tipo de fuerza de roce se trata?

5B.10. Ejercicios

Ejercicio 1: Considere la siguiente relación para la fuerza de arrastre

$$F = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2.$$

Además suponga la densidad del aire igual a $1,2 \text{ kg/m}^3$ y la del agua igual a 1000 kg/m^3 .

1. Determine la velocidad terminal de un paracaidista de 60 kg de masa cuando se deja caer con el paracaídas cerrado, (i) en picada y (ii) en posición horizontal con los brazos abiertos. En el primer caso considere un área transversal de $0,1 \text{ m}^2$ ($C_d = 0,7$), mientras que en el segundo el área transversal es $0,5 \text{ m}^2$ ($C_d = 1,0$).
2. ¿Podría este paracaidista alcanzar a una lata de soda lanzada antes que él? Considere en este caso $C_d = 1,0$ para la lata. Estime la masa de la lata llena y su sección transversal.
3. Estime el área del paracaídas a fin de que el paracaidista llegue al suelo con una rapidez de 5 m/s .

Ejercicio 2: Al nadar, la tracción ejercida por un nadador al bracear compensa la fuerza de arrastre del agua sobre su cuerpo.

1. Estime la fuerza de arrastre del agua sobre el nadador cuando se mueve horizontalmente a 2 m/s . Suponga $C_d = 0,7$ y el área transversal del orden de $0,1 \text{ m}^2$.
2. Estime la rapidez con que debe mover las manos, con respecto al agua detenida, a fin de compensar la fuerza de arrastre obtenida en la primera parte. Haga una buena estimación de la sección transversal de las manos y use en este caso $C_d = 1,0$.

Ejercicio 3: Suponga que en su viaje un vehículo consume una cantidad L de combustible para recorrer una distancia D con rapidez V (100 km/h). Estime el combustible que gastaría para recorrer la misma distancia a una rapidez λv , con $\lambda = 0,8$ y $1,2$.

Ejercicio 4: Un oscilador formado por un resorte y un cuerpo de masa m está inmerso en un medio viscoso. Las oscilaciones resultan amortiguadas de forma tal que, partiendo de una amplitud A , al cabo de cinco ciclos su amplitud es $A/3$. El lapso de cada ciclo es de $0,2 \text{ s}$. Determine la frecuencia natural del oscilador. Determine además la velocidad terminal de caída del mismo cuerpo si es dejado caer libre y verticalmente por gravedad en el mismo medio.

Ejercicio 5: Considere las siguientes expresiones para la fuerza de un fluido en movimiento actuando sobre una bolita de radio R ,

$$F_a = \frac{1}{2} \rho v^2 (\pi R^2), \quad F_{\text{Stokes}} = 6\pi R \eta v$$

Para velocidades grandes domina la primera de ellas (F_a), mientras que para pequeñas velocidades prima la de Stokes. Para $R = 1 \text{ cm}$, determine la rapidez a la cual estas fuerzas son comparables en el caso del aire ($\eta \sim 0,017 \text{ mPa s} = 0,017 \text{ miliPascal} \times \text{segundo}$) y agua ($\eta \sim 1 \text{ mPa s}$). Estime en cada caso la rapidez mínima para que el movimiento resulte amortiguado predominantemente por viscosidad.

Ejercicio 6: ¿En qué unidades queda representado el cociente η/ρ ? A esta cantidad se le denomina *viscosidad cinemática* y es simbolizada por ν . Calcule ν del agua y el aire.

Unidad 5C: Oscilaciones forzadas

5C.1. Introducción

En las unidades anteriores se estudiaron oscilaciones armónicas mecánicas. Se consideró también el efecto del roce viscoso sobre estas oscilaciones, lo cual se llama un oscilador amortiguado. Este oscilador puede representarse gráficamente como se muestra en la figura 5C.1, constando de tres elementos: una masa (inercia), una fuerza restitutiva (resorte) y el roce (amortiguador). Es importante notar que no se ha especificado aún el origen del roce en este sistema. Puede ser un roce superficial con el plano en la cual se apoya la masa, o puede ser roce viscoso con el aire o algún líquido lubricante. Notemos también que el largo natural del resorte simplemente nos dice que en equilibrio, es decir cuando la suma de fuerzas es nula, la masa se encuentra naturalmente a una distancia l_o de la pared, lo que define $x = 0$. En el caso de un péndulo formado por un globo, la fuerza restitutiva está dada por la gravedad y el roce está dominado por la fuerza de arrastre de Stokes.

En esta unidad estudiaremos el caso de un oscilador amortiguado forzado. Esto significa que a la imagen anterior agregaremos un forzamiento con una dependencia explícita en el tiempo. La idea es que si uno fuerza el sistema a una frecuencia particular, el movimiento oscilatorio será amplificado. Esta frecuencia se denomina *frecuencia de resonancia* o *frecuencia natural de vibración*. Un primer ejemplo es un columpio. Se trata de un péndulo, en el cual se realiza un forzamiento periódico en el tiempo moviendo las piernas de *cierta manera* hacia adelante y hacia atrás. Aquí, se deben mover las piernas sincronizadamente con el péndulo, si uno lo hace más rápido, o más lento, el columpio no funciona.

Por simplicidad, supondremos en esta unidad que el amortiguamiento está dado por un roce viscoso lineal. Esto ayuda en el tratamiento matemático y numérico del problema, aunque puede ser poco realista en algunas situaciones. El énfasis estará dado en el efecto del forzamiento más que en considerar bien cuál es el mecanismo dominante de roce en estos sistemas.

5C.2. Ejemplos genéricos

Como se explicó al comienzo del semestre, el modelamiento físico de un sistema puede hacerse en diferentes grados de complejidad. El modelo que estudiaremos en esta unidad, presentado en la figura 5C.1, es el más simple que puede considerarse. Más adelante, ustedes irán agregando grados de complejidad a los sistemas bajo estudio. Aquí mencionamos algunos ejemplos muy generales de siste-

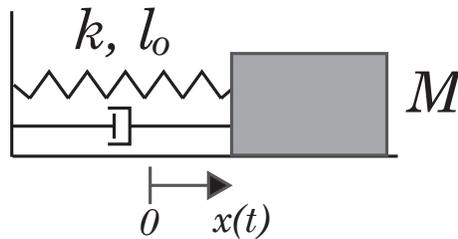


Figura 5C.1: Esquema de un oscilador amortiguado compuesto por un resorte, una masa y algún tipo de roce. El forzamiento externo puede ser incluido como una fuerza $\vec{F}(t)$ que actúa sobre la masa M .



Figura 5C.2: Derrumbe del Hotel Continental ocurrido durante el terremoto de 1985 en ciudad de México. Este edificio entró en resonancia con la frecuencia de forzamiento del temblor y sus pisos superiores colapsaron. Otros edificios contiguos, más altos o más bajos, no sufrieron los mismos daños que este hotel pues tenían frecuencias naturales diferentes.

mas oscilantes forzados que presentan las características básicas que discutiremos a continuación. En principio cualquier sistema que se encuentra en una posición de equilibrio estable realizará oscilaciones en torno a dicho punto en caso de ser perturbado. Es interesante notar que, de este modo, el comportamiento dictado por el ejemplo en la figura 5C.1 es un comportamiento *universal*. Por esto queremos decir que muchos sistemas desarrollan oscilaciones análogas a las descritas en la figura 5C.1, independientemente de su naturaleza (sistemas mecánicos, electrónicos, electromagnéticos, geológicos, atmosféricos, etc.). El simple modelo de la figura 5C.1 sirve para caracterizar diversos sistemas.

- Los instrumentos musicales son buenos ejemplos de osciladores forzados. Sin embargo, pertenecen a una clase más compleja pues son medios continuos y por lo tanto presentan un conjunto de frecuencias de resonancia (notas musicales de una cuerda de guitarra por ejemplo). Se estudiarán *los modos de resonancia* de una cuerda un poco más adelante en el semestre.
- Los edificios tienen frecuencias naturales de vibración, por muy compleja que sea su estructura. Si un terremoto excita una frecuencia de resonancia del edificio, éste puede llegar a romperse.

Por supuesto que las técnicas actuales reducen esta posibilidad. Un ejemplo de un colapso real se muestra en la figura 5C.2.

- Aunque la formación de una superficie ondulada bastante regular, llamada erróneamente *calamina*, en un camino de tierra aún no se entiende bien, los vehículos que transitan sobre un camino *calaminado* deben tener cuidado de no entrar en resonancia. En algunas salidas de autopistas, o antes de un peaje, se instalan calaminas artificiales, de modo de advertir al conductor que va muy rápido y que debe disminuir su velocidad.
- Existe la leyenda de que durante el siglo XIX un ejército francés produjo el colapso de un puente al cruzarlo debido al forzamiento resonante que produjeron los soldados al marchar. Se dice que en la actualidad se advierte a los soldados de no marchar sobre un puente.

5C.3. Ecuación y solución analítica

La ecuación de Newton de un oscilador amortiguado es la siguiente

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x}.$$

Dividiendo por M y reordenando se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_o^2 x = 0,$$

donde $\tau = M/b$ representa un tiempo de atenuación, con M la masa y b la constante de roce viscoso (fuerza de roce viscoso = $-b\dot{x}$), y $\omega_o = \sqrt{k/M}$ es la frecuencia angular de resonancia. La solución $x(t)$ de esta ecuación es

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \varphi_o), \quad (5C.1)$$

con

$$\Omega^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2.$$

Nótese que esta solución es válida si $\Omega^2 > 0$. Cuando el roce es pequeño, τ es grande y por lo tanto $\Omega \approx \omega_o$. Las constantes A y φ_o se determinan de las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$.

En el caso de un oscilador amortiguado forzado, con una fuerza $F(t) = F_o \text{sen}(\omega t)$, la ecuación de Newton resulta

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_o \text{sen}(\omega t).$$

De nuevo, dividiendo por M y reordenando se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{M} \text{sen}(\omega t). \quad (5C.2)$$

La solución analítica de esta ecuación es más compleja, pero puede demostrarse que es:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \varphi_o) + \frac{F_o/M}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \text{sen}(\omega t - \delta), \quad (5C.3)$$

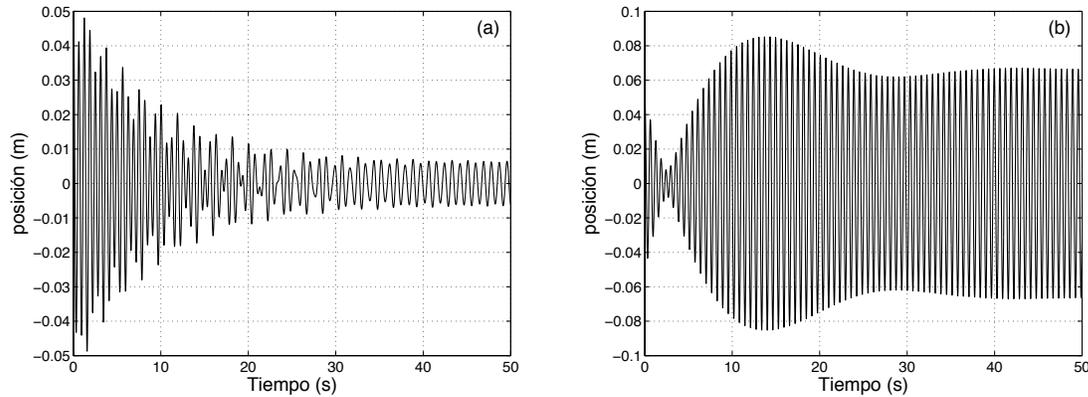


Figura 5C.3: Ejemplos de soluciones $x(t)$ obtenidas con $M = 0,778$ kg, $\tau = 4,72$ s, $k = 78$ N/m, $F_o = 0,25$ N, $x(0) = 0,05$ m, $\dot{x}(0) = 0$. En (a), $\omega = 7$ rad/s y en (b) $\omega = 9,8$ rad/s. La frecuencia natural de resonancia es $\omega_o = \sqrt{k/M} = 10$ rad/s.

con

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\omega}{\tau(\omega_o^2 - \omega^2)}.$$

La expresión de la ecuación (5C.3) es la suma de dos términos. Por un lado, el primer término es el dado por la ecuación (5C.1) y da cuenta de las oscilaciones del sistema debido a las condiciones iniciales. Estas oscilaciones tienen una frecuencia Ω y una amplitud que decae exponencialmente en un tiempo característico τ . El segundo término es una senoide de frecuencia igual a la del forzamiento, ω . La amplitud de estas oscilaciones es constante en el tiempo y depende de la frecuencia de forzamiento ω .

Al final de esta guía se indican los pasos a seguir para demostrar que esta es efectivamente la solución de la ecuación (5C.2). Las constantes A y φ_o se determinan de las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. El primer término de esta solución corresponde a un transiente, es decir después de un cierto tiempo este término decae a cero, tal como en la solución de un oscilador amortiguado sin forzamiento externo. Es el segundo término, proporcional a F_o , el que da la solución estacionaria, es decir aquella que perdurará en el tiempo. De esta manera se puede interpretar δ como una diferencia de fase entre la solución estacionaria y el forzamiento.

Cuando $b \rightarrow 0$, se tiene $\tau \rightarrow \infty$, por lo que $e^{-t/2\tau} \rightarrow 1$. Además, en este límite, la amplitud de la parte estacionaria $B(\omega) \rightarrow F_o/(M(\omega_o^2 - \omega^2))$ y por lo tanto presenta una divergencia en $\omega = \omega_o$.

Ejemplos de la solución $x(t)$ para dos valores de la frecuencia de forzamiento se muestran en la figura 5C.3, lejos (a) y cerca (b) de la frecuencia de resonancia natural ω_o . Es importante notar que a pesar de que el decaimiento es $\tau = 4,72$ s, en este caso (por las condiciones iniciales) el transiente tiene un efecto importante sobre la solución para tiempos más largos, hasta aproximadamente 40 s.

Si nos fijamos únicamente en la solución estacionaria ($e^{(-t/2\tau)} \rightarrow 0$), esta tiene una amplitud dada

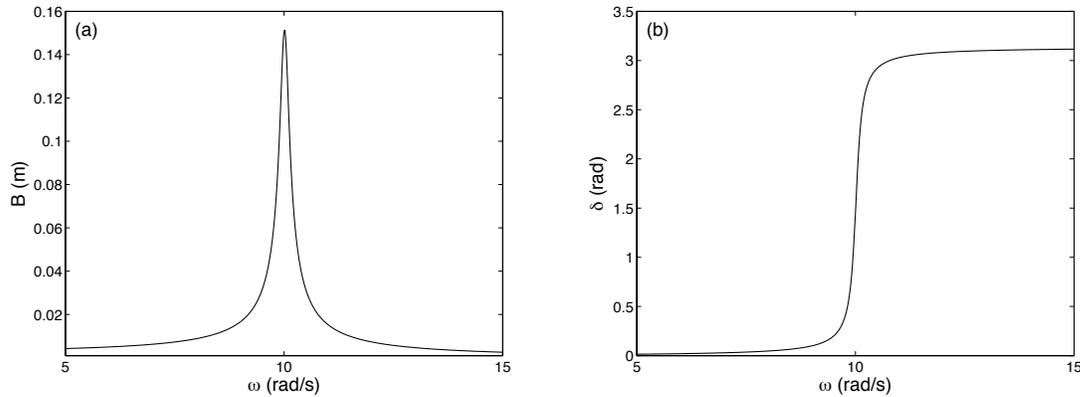


Figura 5C.4: (a) Curva de resonancia de la amplitud B como función de ω . (b) Diferencia de fase δ como función de ω . Ambas curvas fueron obtenidas con $M = 0,778$ kg, $\tau = 4,72$ s, $k = 78$ N/m, $F_o = 0,25$ N. La frecuencia natural de resonancia es $\omega_o = \sqrt{k/M} = 10$ rad/s.

por

$$B = \frac{F_o/M}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}.$$

Ejemplos de la amplitud B y el desfase δ como funciones de ω se muestran en la figura 5C.4. Se observa que la función $B(\omega)$ tiene un máximo. Imponiendo $dB(\omega)/d\omega = 0$ se obtiene que el máximo ocurre cuando

$$\omega^2 = \omega_r^2 = \omega_o^2 - 2\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2.$$

De nuevo, cuando el roce es pequeño, τ es grande y por lo tanto el sistema es resonante, es decir su respuesta es máxima, cuando $\omega \approx \omega_o$.

La interpretación de δ es simple. Para $\omega \ll \omega_r$, $\delta \approx 0$, es decir siendo la amplitud de oscilación pequeña, está en fase con el forzamiento. Por el contrario, para $\omega \gg \omega_r$, también la respuesta de la amplitud de oscilación es pequeña pero el desfase es $\delta \approx 180^\circ$. Finalmente, para $\omega = \omega_r$, se tiene $\delta = 90^\circ$.

5C.4. Explicación de la resonancia

Más allá de exponer ecuaciones que manifiestan el fenómeno de resonancia, es necesario hacerse una imagen cualitativa de lo que sucede: ¿por qué el sistema tiene esta respuesta tan peculiar? Para contestar esto explicaremos en palabras el fenómeno en ausencia de disipación para luego agregarla.

En ausencia de disipación, las únicas fuerzas son la fuerza de restitución y el forzamiento. El problema de resonancia puede entenderse como un problema de sincronización en la entrega de energía, como se explica esquemáticamente en la figura 5C.5. La fuerza externa entrega una potencia, P_{ext} , (trabajo por

unidad de tiempo) igual a $\vec{F} \cdot \vec{v}$. Dependiendo de la dirección relativa entre fuerza y velocidad, el sistema incrementará o disminuirá su energía.

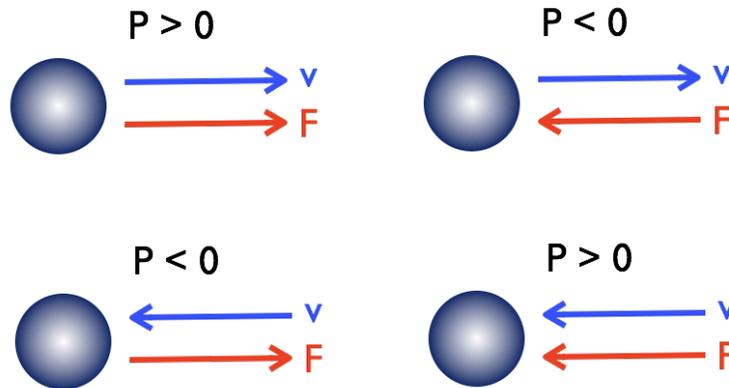


Figura 5C.5: Distintas posibilidades para el incremento en energía mecánica debido al forzamiento. La esfera representa la partícula, de masa M , que se mueve con velocidad v y es forzada mediante la fuerza F . En los casos en que $P > 0$, la rapidez de la masa se incrementa debido a la fuerza.

En los casos en que la fuerza y la velocidad oscilan independientemente, la potencia neta entregada será nula. En el caso en que existe una sincronización entre F y v , i.e. que oscilan a la misma frecuencia, la tasa neta de entrega de energía en cada ciclo será positiva y por lo tanto la energía cinética se incrementa en cada oscilación, es decir tenemos una resonancia. Como la velocidad debe estar sincronizada con la fuerza, entre la posición y la fuerza hay un desfase de $\pi/2$.

Al incluir disipación la esencia del argumento se mantiene, pero ahora hay una pérdida adicional de energía debido al roce viscoso. Como esta pérdida se incrementa con la rapidez, $P_{\text{roce}} = -mv^2/\tau$, siempre negativo, la potencia entregada por el forzamiento externo, será eventualmente compensada por la disipación. Esto nos permite entender por qué se llega a un régimen estacionario, donde la partícula oscila con amplitud finita, incluso bajo condiciones de resonancia. Este argumento permite predecir el valor de la amplitud final. Si la partícula oscila con amplitud A , la potencia entregada por la fuerza externa es $P_{\text{ext}} = \omega FA \sin^2(\omega t)$, mientras que la potencia disipada es $P_{\text{roce}} = -mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t)/\tau$. De este modo, la condición de compensación es simplemente: $A = (F/M)\tau/\omega$, consistente con el resultado analítico.

5C.5. Solución numérica

La solución analítica dada por la ecuación (5C.3) no es fácil de manipular. En particular dadas las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ se deben obtener las constantes A y φ_0 , lo que algebraicamente no es sencillo. Una manera de resolver la ecuación (5C.2) es usando el algoritmo de Verlet, visto en la unidad

1. Para ello aproximaremos

$$\dot{x}_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \quad \ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}.$$

Luego, la versión discreta de la ecuación (5C.2) es

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2} + \frac{1}{\tau} \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} + \omega_o^2 x_i = \frac{F_o}{M} \text{sen}(\omega t_i),$$

y despejando x_{i+1} se obtiene

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \frac{F_o(\Delta t)^2}{M} \text{sen}(\omega t_i) - \frac{\Delta t(x_i - x_{i-1})}{\tau} - \omega_o^2(\Delta t)^2 x_i. \quad (5C.4)$$

Las condiciones iniciales se consideran al imponer $x_1 = x(0)$ y $x_2 = x(0) + \dot{x}(0) \cdot \Delta t$ y se obtiene la secuencia de los x_i con $i > 2$. Los resultados presentados en la figura 5C.3 fueron obtenidas numéricamente usando este algoritmo.

5C.6. Un forzamiento un poco más realista

Una pregunta natural que nace al estudiar la ecuación de un oscilador mecánico forzado es de qué manera se puede obtener un forzamiento del tipo $F_o \text{sen}(\omega t)$ en una situación realista. Una manera podría ser forzar a la masa con un campo magnético o eléctrico, aunque es deseable tener un sistema mecánico más simple.

Un modelo bastante simple es el que se presenta en la figura 5C.6. Sobre un carro *grande*, de masa M , se coloca un carro *pequeño* el cual se mueve con respecto al carro grande de una manera sinusoidal, es decir $y(t) = y_o \text{sen}(\omega t)$. Debemos insistir en que el movimiento del carro pequeño es relativo al carro grande. De este modo el origen $0'$ de la coordenada $y(t)$ se encuentra fijo al carro grande.

El punto de partida entonces es escribir la ecuación de Newton para el centro de masa del sistema:

$$(M + m) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{M \cdot x + m \cdot (x + y)}{M + m} \right) = -kx - b\dot{x}.$$

Es importante notar que en este modelo el roce viscoso solo actúa sobre el carro de masa M y no sobre el carro de masa pequeña m . Con un poco de álgebra se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_o^2 x = -\frac{m}{M + m} \ddot{y},$$

donde ahora $\tau = (M + m)/b$ y $\omega_o^2 = k/(M + m)$. Suponemos ahora que el carro pequeño tiene algún tipo de motor que permite asegurar que $y(t) = y_o \text{sen}(\omega t)$ para todo t , entonces $\ddot{y} = -y_o \omega^2 \text{sen}(\omega t)$. Con esto, la ecuación de Newton resulta

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{m y_o \omega^2}{M + m} \text{sen}(\omega t),$$

que básicamente es igual a la ecuación (5C.2) salvo que la constante que va delante de $\sin(\omega t)$, llamada F_o , ya no es independiente de ω . La solución analítica (5C.3) no cambia, sólo debe cambiarse F_o/M por $my_o\omega^2/(M+m)$. De igual manera, la amplitud de la solución estacionaria $B(\omega)$ cambia sólo en el reemplazo $F_o/M \rightarrow my_o\omega^2/(M+m)$, es decir sí cambia como función de ω . Explícitamente tenemos

$$B = \frac{my_o\omega^2/(M+m)}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}. \quad (5C.5)$$

La diferencia de $B(\omega)$ obtenida con F_o constante o con $my_o\omega^2$ se muestra en la figura 5C.7. La curva original es más simétrica con respecto al máximo; la curva $B(\omega)$ nueva, dada por (5C.5), es más asimétrica. Los datos experimentales que se presentan fueron obtenidos con el mismo montaje que se usará en clases durante la sesión práctica. Estos datos muestran que efectivamente la resonancia parece más asimétrica entorno al máximo. El acuerdo entre los datos y la nueva curva $B(\omega)$ es bastante bueno, lo que se aprecia mejor en la figura 5C.7(b) que presenta el la coordenada vertical en escala logarítmica de base 10.

Finalmente, debemos decir que la solución numérica en este caso también es ligeramente corregida, por el reemplazo $F_o/M \rightarrow my_o\omega^2/(M+m)$ en la ecuación (5C.4).

5C.7. Sobre la solución de la ecuación de un oscilador forzado

Para terminar esta guía daremos una pauta simple de cómo entender la solución de la ecuación (5C.2). Si bien la demostración formal de que ésta es la solución general es complicada, se pueden dar algunas pistas para mostrar que es una solución. Se les sugiere que efectivamente hagan estos pasos como tarea:

- (1) Se intenta una solución de la forma

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \varphi_o) + B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t),$$

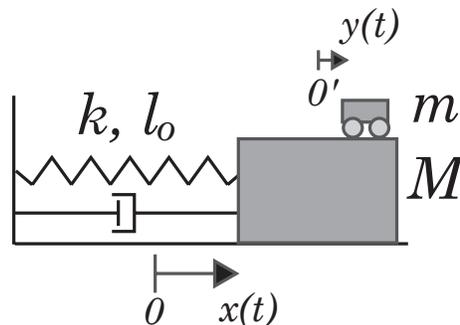


Figura 5C.6: Esquema de un oscilador amortiguado compuesto por un resorte, una masa y algún tipo de roce. El forzamiento externo sobre el carro de masa M se obtiene por un movimiento oscilatorio impuesto a la masa m , es decir con $y(t) = y_o \sin(\omega t)$.

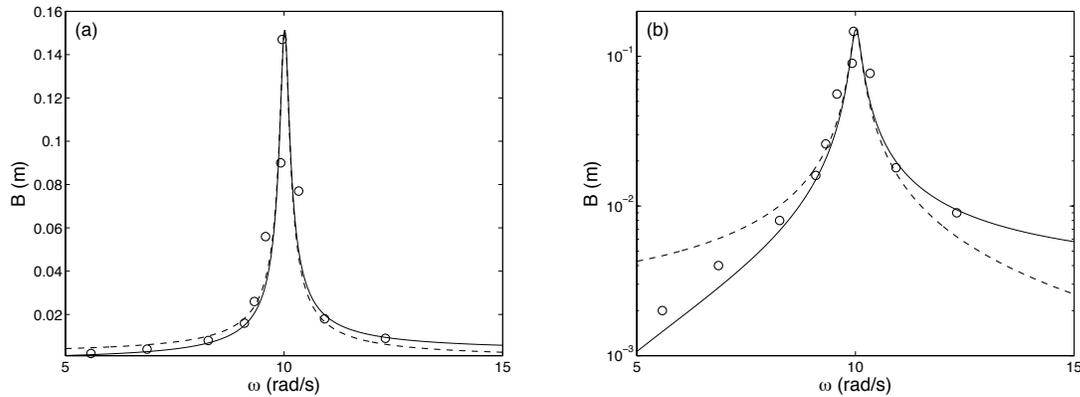


Figura 5C.7: Curvas de resonancia de la amplitud B como función de ω , en escala lineal (a) y en escala semilogarítmica (b). La curva segmentada es la misma presentada en la figura 4a. La curva continua se obtuvo con la ecuación (5C.5) con $M = 0,735$ kg, $m = 43$ g, $y_o = 5,8$ cm, $\tau = 4,72$ s, $k = 78$ N/m, $\omega_o = \sqrt{k/(M+m)} = 10$ rad/s. Los datos (\circ) corresponden a medidas experimentales.

la cual se reemplaza en la ecuación (5C.2).

- (2) La solución transiente (proporcional a A) es solución de la ecuación sin forzamiento, por lo que sólo queda la solución estacionaria. Se buscan entonces los valores B_1 y B_2 .
- (3) Se escribe

$$B_1 \operatorname{sen}(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) = B \operatorname{sen}(\omega t - \delta),$$

y se encuentran B y δ .

5C.8. Problema resuelto

Considere el sistema de la figura 5C.8. Un móvil de masa M , el cual se puede mover sólo en forma horizontal, tiene un motor el cual hace girar un cuerpo de masa m , de modo que la componente del movimiento de m con respecto al móvil, en la dirección horizontal, es $y = r \operatorname{sen}(\omega t)$. El móvil M se encuentra conectado a un resorte de constante elástica k y sufre una fuerza de roce proporcional a la velocidad con constante b .

- a. Encuentre la posición del centro de masa del sistema X_{CM} , considerando que la coordenada del móvil M es x . Luego escriba la ecuación de Newton, o sea:

$$M_{\text{total}} \ddot{X}_{CM} = \Sigma \text{ Fuerzas externas}$$

y ordene la ecuación de modo que en el lado izquierdo hayan sólo términos proporcionales a x o sus derivadas y en el lado derecho los términos relacionados con y .

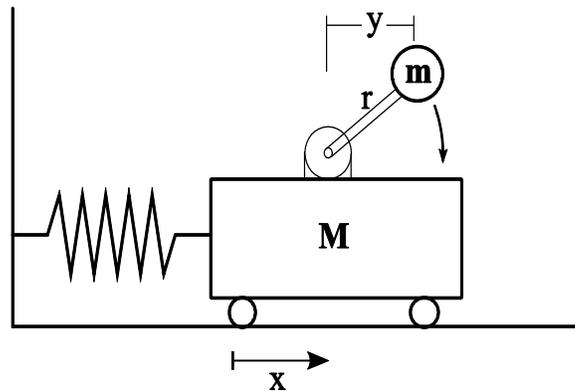


Figura 5C.8: Esquema de un oscilador forzado mediante una masita que gira alrededor de un eje.

b. Compruebe que la función:

$$x(t) = \frac{mr\omega^2 \sin(\omega t - \delta)/(M + m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}$$

es solución a la ecuación obtenida en a), donde $\omega_0^2 = k/(M + m)$, $\tau = (m + M)/b$ y $\text{tg } \delta = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

c. Se realiza un experimento para medir la amplitud de la oscilación B del móvil en función de la frecuencia de giro ω de la masa m . Al hacer un ajuste cuadrático se obtiene que la amplitud de la oscilación cumple aproximadamente la siguiente relación:

$$B(\omega) = \frac{1,2\omega^2}{\sqrt{\omega^4 - 7\omega^2 + 16}} \text{ cm}$$

Encuentre los valores experimentales de ω_0 y de τ y el valor de ω para el cual la amplitud es máxima.

5C.8.1. Solución

a. La posición horizontal del centro de M es $x(t)$. La posición horizontal de la bolita m es $x(t) + y(t)$, luego la posición del centro de masa del sistema es

$$x_{cm} = \frac{Mx(t) + mx(t) + my(t)}{M + m} = x(t) + \frac{m}{M + m}y(t)$$

Las fuerzas externas al carrito se deben al resorte ($F_e = -kx$) y al roce viscoso ($F_r = -b\dot{x}$), luego la segunda ley de Newton la escribimos como

$$-kx(t) - b\dot{x} = (M + m)\ddot{x}_{cm}.$$

Usando $\ddot{y} = -\omega^2 y(t)$ y reordenando

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -m\ddot{y} = mr\omega^2 \sin(\omega t)$$

- b. Dividiendo la ecuación anterior por $(M + m)$ e identificando $\omega_0^2 = k/(M + m)$ y $1/\tau = b/(M + m)$ podemos reescribirla como

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{mr\omega^2}{M + m} \text{sen}(\omega t)$$

La única dependencia de la solución propuesta $x(t) \equiv B(\omega) \text{sen}(\omega t - \delta)$ en el tiempo está en el numerador luego obtenemos

$$\frac{1}{\tau}\dot{x} = \frac{\omega}{\tau} B(\omega) \cos(\omega t - \delta) \quad \text{y} \quad \ddot{x} = -\omega^2 x(t) = -\omega^2 B(\omega) \text{sen}(\omega t - \delta),$$

luego

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = [-\omega^2 + \omega_0^2] B(\omega) \text{sen}(\omega t - \delta) + \frac{\omega}{\tau} B(\omega) \cos(\omega t - \delta).$$

Usando $\text{sen}(\omega t - \delta) = \text{sen}(\omega t) \cos \delta - \text{sen} \delta \cos(\omega t)$, $\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t) \cos \delta + \text{sen}(\omega t) \text{sen} \delta$; reemplazando en la ecuación anterior y reagrupando:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + \frac{\omega}{\tau} \text{sen} \delta \right] B(\omega) \text{sen}(\omega t) + \left[\frac{\omega}{\tau} \cos \delta - (\omega_0^2 - \omega^2) \text{sen} \delta \right] B(\omega) \cos(\omega t).$$

Factorizando por $\cos \delta$ y reemplazando $\text{tg} \delta = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$ se anula el término con $\cos(\omega t)$ y se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\omega^2}{\tau^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right] \cos \delta B(\omega) \text{sen}(\omega t)$$

A partir de la relación $\text{sen}^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$ obtenemos

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2/\tau^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}},$$

que al reemplazar arriba se obtiene finalmente:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right] \frac{B(\omega)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}} \text{sen}(\omega t) = \frac{mr\omega^2}{M + m} \text{sen}(\omega t),$$

es decir, efectivamente la función $x(t)$ propuesta es solución.

- c. Expandiendo el interior de la raíz cuadrada en el denominador de $B(\omega)$ encontramos

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} = \sqrt{\omega^4 + (1/\tau^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4},$$

que, identificando término a término con la expresión experimental, resulta

$$\omega_0^4 = 16 \quad \text{y} \quad (1/\tau^2 - 2\omega_0^2) = -7 \Rightarrow \omega_0 = 2 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \tau = 1 \text{ s}$$

La amplitud $B(\omega)$ es máxima cuando $\omega_{max}^2 = \omega_0^2 - 2(\frac{1}{\tau^2})^2$ de donde $\omega_{max} = \sqrt{3,5} \sim 1,9 \sim \omega_0$.

Alternativamente imponiendo $\frac{dB(u)}{du} = 0$ con $u = \omega^2$ se obtiene $u_{max} = 32/7 \sim 4,6$ de donde $\omega_{max} \sim 2,1 \sim \omega_0$.

5C.9. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: Explique el significado de cada término de la ecuación de un oscilador amortiguado y forzado

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_o \text{sen}(\omega t)$$

Pregunta 2: Dé un ejemplo cotidiano de un oscilador mecánico forzado. En particular indique cuál es la fuerza restitutiva y cuál es el origen del forzamiento.

Pregunta 3: Usando el algoritmo de Verlet, escriba la versión discreta de la ecuación

$$M\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_o \text{sen}(\omega t)$$

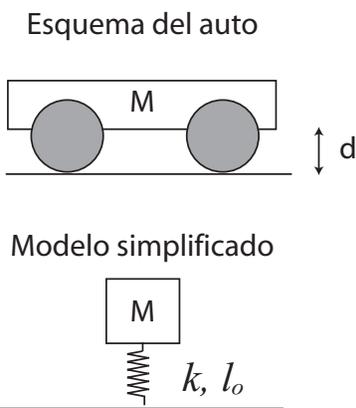
y despeje $x(i+1)$ en función de cantidades evaluadas en tiempos menores ($i, i-1$, etc).

Pregunta 4: Explique de manera simple lo que representa cada término de la solución de la ecuación de un oscilador amortiguado y forzado:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_o) + \frac{F_o/M}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} \text{sen}(\omega t - \delta),$$

5C.10. Ejercicios

Ejercicio 1: La figura representa un modelo de un automóvil, de masa M y suspensión de constante elástica total k y largo natural l_o . Supondremos que los resortes que componen las suspensiones son tan rígidos que se desprecia el efecto de la gravedad. Se modelará la disipación como un roce viscoso lineal, de constante b . En equilibrio, la distancia entre el piso y el automóvil es $d = l_o/2$. Un terremoto ejerce una fuerza $F_o \sin(\omega t)$ sobre el vehículo, en dirección vertical. Se observa que éste alcanza un estado estacionario cuya amplitud es tal que el auto toca justo el piso. Cuál es la frecuencia ω de forzamiento del temblor?



Ejercicio 2: Una cuerpo de masa de m , después de caer una distancia h , se adosa a un resorte de constante k . A partir de ese momento ($t = 0$) el sistema resultante está descrito por la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{z}(t) + 2\omega_0 \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = C,$$

donde $z(t)$ es la posición del cuerpo de masa m (medida hacia abajo desde el punto más alto del resorte en $t = 0$) y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del resorte. Notar que la constante de amortiguamiento toma un valor crítico $= 2\omega_0$. Para constantes de amortiguamiento menores que este valor crítico el movimiento corresponde a oscilaciones amortiguadas. En este caso la solución toma la siguiente forma:

$$z(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} + D,$$

donde A y B son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales (forman parte de la solución homogénea), y D es una constante que corresponde a la llamada solución particular (independiente de las condiciones iniciales)

1. Determine las constantes C y D .
2. ¿Cuál es la posición de equilibrio de la masa m ? Relacione esta posición con la solución particular.
3. A partir de las condiciones iniciales determine las constantes A y B .
4. Grafique esquemáticamente la solución $z(t)$ entre $t = 0$ y $t \rightarrow \infty$.

5. ¿Cuál es la energía total disipada por el amortiguador?
6. ¿Con que frecuencia habría que forzar este sistema para obtener una amplitud de resonancia máxima?

Unidad 6A: Ondas propagativas

6A.1. Introducción a las ondas

Las ondas son un fenómeno genérico en física, manifestándose en muchos sistemas diversos. Así, se habla de ondas sonoras, ondas en la superficie del agua, ondas electromagnéticas (luz, radio), ondas en membranas (tambores), ondas en cuerdas, ondas sísmicas, etc.

Según veremos todas estas ondas presentan propiedades muy similares y tienen una descripción matemática similar. En este curso estudiaremos las ondas que tienen características newtonianas, es decir, cuya dinámica está dada por la ley de Newton y que se propagan en una dimensión. Más adelante en la carrera se tratará otros tipos de ondas:

Tipo de onda	Curso
Sonido	Termodinámica
Electromagnéticas	Electromagnetismo
Ondas en membranas	Vibraciones y ondas
Ondas en agua	Vibraciones y ondas
Ondas sísmicas	Cursos de especialidad de Física, Geofísica o Ing. Civil
Ondas de materia	Cursos de especialidad de Física: Mecánica Cuántica

6A.1.1. Fenomenología básica

Recordemos que las oscilaciones armónicas (amortiguadas o no) ocurren en sistemas que son perturbados cuando están cerca de un punto de equilibrio. Así, aparece una fuerza que tiende a llevar al sistema de vuelta al equilibrio, fuerza que se denomina *restitutiva*. La inercia (masa), básicamente definida como *resistencia a la aceleración*, es responsable de que el sistema se atrase con respecto a la fuerza en llegar al punto de equilibrio. La misma inercia causa que el sistema se *pase de largo* del punto de equilibrio, derivando en un movimiento oscilatorio.

Las ondas aparecen por un mecanismo similar, pero, a diferencia de las oscilaciones, las ondas involucran la oscilación de muchos grados de libertad (en principio un número infinito). Estas oscilaciones, al estar acopladas, se sincronizan de muchas maneras dando origen al comportamiento ondulatorio. Ya no se trata, por ejemplo, de una partícula puntual o un sólido rígido que cuelga de un péndulo, sino que es toda una cuerda la que puede ser deformada (sacada del equilibrio) punto a punto.

Así, una cuerda tensa entre sus extremos tiende a estar recta. Si es deformada, tratará de volver a su forma original, generando un movimiento que llamaremos *ondulatorio*.

Al considerar una cuerda tensa, una membrana de tambor o la superficie del agua se observa que dependiendo de cómo se deforme el sistema se presentan los siguientes fenómenos:

Oscilación colectiva Todo el sistema oscila colectivamente con una amplitud que depende de la posición, como se observa en una cuerda de guitarra. Este tipo de movimiento se denomina *modo(s) normal(es)* y será tratado en la Unidad 6B.

Propagación de pulsos Una perturbación se propaga casi sin deformación, como ocurre en la superficie del agua, sobre la cual, si se genera una perturbación localizada, ésta se propaga hacia afuera. De igual manera, si se genera un pulso en una cuerda larga (o una manguera para regar, por ejemplo), éste se propaga hasta el otro extremo casi sin deformación. Las ondas de radio también corresponden a este fenómeno.

Ambos tipos de fenómenos se describen de manera unificada como *fenómenos ondulatorios*, siendo la propagación de pulsos el que estudiaremos en esta unidad.

6A.2. Descripción matemática de las ondas

Para constituir una onda se requiere de un medio continuo que pueda estar en equilibrio y que pueda ser deformado de alguna forma. Para ilustrarlo se considerará un ejemplo sencillo, que veremos en el laboratorio.

6A.2.1. Ondas de torsión en un arreglo de varillas

Consideremos el sistema de la figura 6A.1, que consiste de varillas de masa m , largo L y momento de inercia I , soldadas por su centro a un hilo metálico horizontal.

Tal como se ve en la figura 6A.1, las varillas pueden girar en torno a su centro, pero, al ser solidarias al hilo, éste se tuerce ejerciendo torque sobre las varillas vecinas.

Rotulemos con $i = 1, \dots, N$ las varillas y sea θ_i el ángulo que forma la varilla i -ésima con la horizontal. Si la varilla que le sigue (la $i + 1$) se encuentra al mismo ángulo que ésta, el hilo no está torcido y el torque que éste ejerce sobre las varillas es nulo; si la varilla forma un ángulo mayor con la horizontal ($\theta_{i+1} > \theta_i$) entonces el hilo está torcido y ejerce torque sobre la varilla i -ésima, el que tiende a hacer que θ_i crezca para que los dos ángulos se igualen, es decir un torque positivo (noten que por acción y reacción el torque que i ejerce sobre $i + 1$ es negativo); finalmente si $\theta_{i+1} < \theta_i$ el torque será negativo. Considerando la situación en que las diferencias de ángulo no son muy grandes, se puede considerar entonces como una buena aproximación que el torque sobre i debido a $i + 1$ sea proporcional a la diferencia de ángulos.

$$\tau_i \text{ debido a } i+1 = T(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

donde T es una constante que habrá que medir y que depende de las propiedades del hilo.

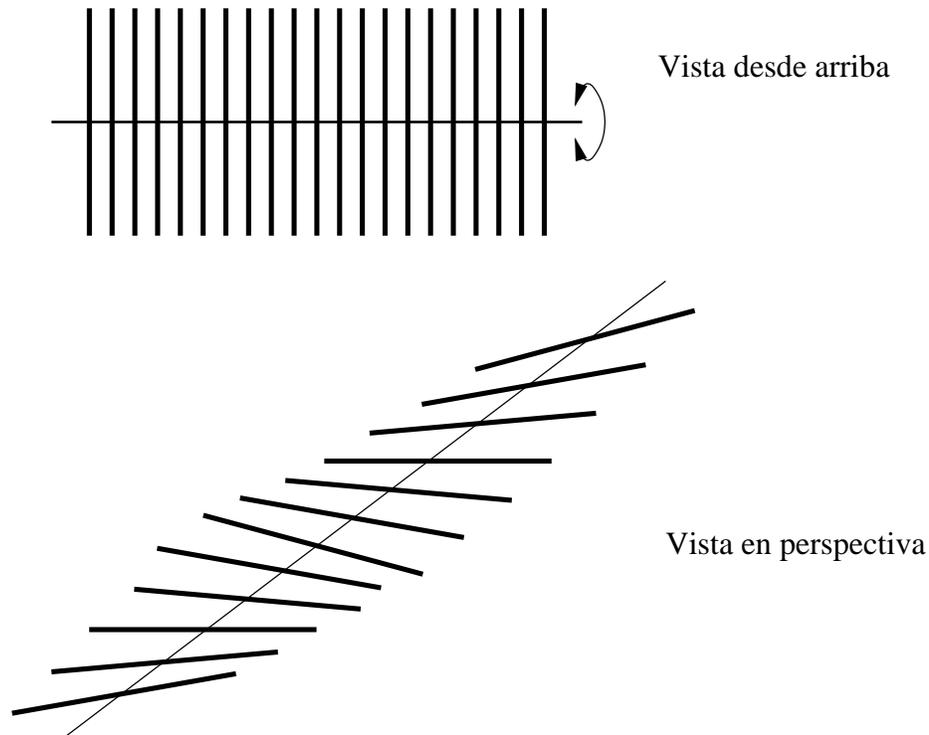


Figura 6A.1: Sistema de varillas soldadas a un hilo metálico central.

De igual manera se puede calcular el torque sobre la varilla i debido a la anterior (la $i - 1$), resultando τ_i debido a $i-1 = T(\theta_{i-1} - \theta_i)$

Sumando los dos resultados se tiene el torque total sobre la varilla i :

$$\tau_i = T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1})$$

Por otro lado, sabemos que el movimiento de las varillas está dado por la ley de Newton para sólidos rígidos con un punto fijo (donde están soldadas al hilo)

$$\begin{aligned} I \frac{d^2 \theta_i}{dt^2} &= \tau_i \\ I \frac{d^2 \theta_i}{dt^2} &= T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) \end{aligned} \quad (6A.1)$$

Se obtiene N ecuaciones de movimiento acopladas (pues la i depende de $i + 1$ e $i - 1$) lo cual hace muy difícil su análisis. Sin embargo, el problema se simplifica si hacemos una *aproximación continua*. Consiste en suponer que el conjunto de varillas es una forma de modelar un cuerpo continuo. Llamemos Δ a la diferencia de posición entre una varilla y la siguiente y supongamos que Δ es pequeño. En ese caso, en vez de rotular las varillas de manera discreta podemos pasar a una descripción continua (es el

paso opuesto al hecho en la primera unidad). Así, la varilla i -ésima se encuentra en $x = i\Delta$ y podemos llamar $\theta(x)$ al ángulo de la varilla en la posición x .

Notamos que el lado derecho de la ecuación de movimiento (6A.1) se puede escribir de una manera simplificada pues recordamos que es la forma que tiene la segunda derivada discreta. En efecto

$$\begin{aligned} T(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) &= T\Delta^2 \left(\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta^2} \right) \\ &= T\Delta^2 \left(\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} \right) \end{aligned}$$

Así la ecuación de movimiento queda:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = T\Delta^2 \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

que se puede escribir como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = c^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (6A.2)$$

donde se ha definido por comodidad

$$c = \sqrt{T\Delta^2/I}$$

La ecuación (6A.2) se denomina *ecuación de ondas*, donde la variable dependiente es el ángulo θ que depende tanto de x como de t , es decir, $\theta(x, t)$. La ecuación (6A.2) se puede entender como una ecuación de Newton, donde a la izquierda está la inercia y a la derecha las fuerzas. Si la colección de varillas contiene grandes diferencias angulares ($d^2\theta/dx^2$ grande) entonces habrá una fuerza mayor que provocará una mayor aceleración en cada punto.

Por último determinemos la dimensión de c . T es un torque, Δ una distancia e I un momento de inercia, luego

$$\begin{aligned} [c] &= \sqrt{\frac{[T][\Delta]^2}{[I]}} \\ &= \sqrt{\frac{(LMLT^{-2})(L^2)}{ML^2}} \\ &= \sqrt{L^2T^{-2}} \\ &= LT^{-1} \end{aligned}$$

es decir, tiene dimensiones de velocidad.

6A.2.2. La cuerda

Un segundo ejemplo de ondas en una dimensión se puede obtener del análisis del movimiento de una cuerda que está atada en sus extremos y que se mantiene tensa, con tensión T . La cuerda tiene una masa

M y largo L , de la que se obtiene una densidad de masa lineal ρ_L . Este ejemplo es ampliamente analizado en los textos, en los que pueden buscar explicaciones alternativas.

La cuerda es levemente extensible y se puede deformar verticalmente (se dice que se deforma transversalmente a la dirección en la que está tensada).

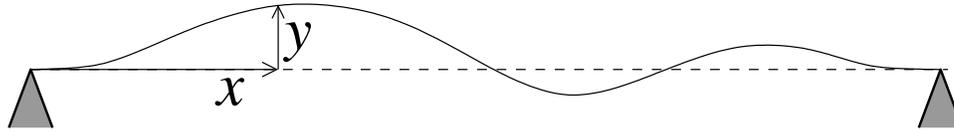


Figura 6A.2: Cuerda realizando un movimiento oscilatorio.

Para describir la dinámica de la cuerda, estudiemos lo que pasa en una vecindad de un punto x de la misma. Considerando la cuerda de la figura 6A.2, llamamos $y(x, t)$ a la deformación vertical de la cuerda en el punto x en el instante t , de igual manera como llamábamos $\theta(x, t)$ a la torsión de la varilla en un punto x en el instante t .

Consideremos el trozo de cuerda entre $x - \Delta$ y $x + \Delta$ ⁵. Al hacer el DCL de ese trozo, las fuerzas involucradas son las tensiones por ambos extremos. Si llamamos θ_1 al ángulo que forma la tangente a la cuerda en $x - \Delta$ y θ_2 al ángulo que forma la tangente a la cuerda en $x + \Delta$, la fuerza total sobre ese trozo es:

$$\vec{F} = T(-\cos \theta_1 \hat{x} - \sin \theta_1 \hat{y}) + T(\cos \theta_2 \hat{x} + \sin \theta_2 \hat{y})$$

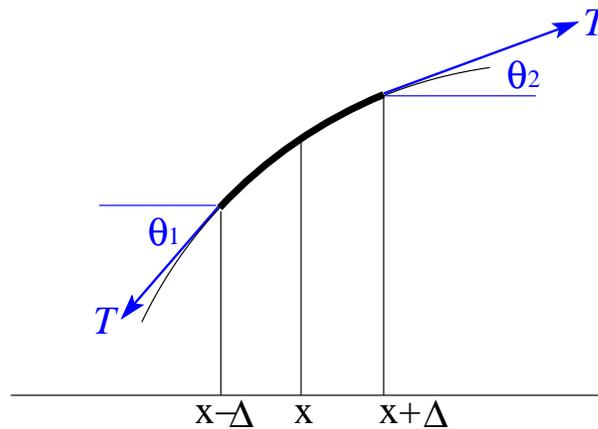


Figura 6A.3: Diagrama de cuerpo libre sobre un trozo de cuerda.

La figura 6A.3 muestra una cuerda muy deformada, pero vamos a considerar el caso en que la deformación es pequeña. Esto significa que vamos a suponer que los ángulos que forma la tangente a la

⁵En esta derivación suponemos que Δ es muy pequeño. El estudiante se preguntará ¿pequeño respecto a qué?. Esta es una pregunta difícil de contestar: esencialmente diremos que el cambio en $y(x, t)$ asociado al cambio en Δ debe ser pequeño, i.e. $\Delta \partial u / \partial x \ll y(x, t)$. Esta discusión es un poco estéril, cuando aprendamos más sobre el comportamiento ondulatorio sabremos que el criterio realmente útil es que Δ sea pequeño respecto de la *longitud de onda*.

cuerda con la horizontal son siempre pequeños ($\theta \ll 1$). Si no se cumple esta hipótesis debemos hacer un análisis mucho más complejo.

Si los ángulos son pequeños la fuerza se simplifica pues $\cos \theta \approx 1$ y $\sin \theta \approx \theta \approx \text{tg } \theta$,

$$\vec{F} = T(-\text{tg } \theta_1 + \text{tg } \theta_2)\hat{y}$$

pero $\text{tg } \theta$, de acuerdo a lo aprendido en el curso de cálculo, es la derivada de la función en el punto respectivo. Es decir

$$\begin{aligned}\text{tg } \theta_1 &= \frac{dy}{dx}(x - \Delta) \\ \text{tg } \theta_2 &= \frac{dy}{dx}(x + \Delta)\end{aligned}$$

Luego, la fuerza es

$$\vec{F} = T \left(\frac{dy}{dx}(x + \Delta) - \frac{dy}{dx}(x - \Delta) \right) \hat{y}$$

Por otro lado, la ley de Newton dice que la fuerza sobre el trozo de cuerda es igual al producto entre su masa y su aceleración. La masa de ese trozo de cuerda es la densidad por el largo 2Δ . Luego la masa es $m = 2\Delta\rho_L$. Como el movimiento es puramente vertical, la aceleración es

$$\vec{a} = \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y}$$

Combinando todo, se encuentra que la ecuación para el trozo de cuerda es

$$2\Delta\rho_L \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} = T \left(\frac{dy}{dx}(x + \Delta) - \frac{dy}{dx}(x - \Delta) \right) \hat{y}$$

Simplificando el vector unitario y dividiendo por 2Δ se tiene

$$\begin{aligned}\rho_L \frac{d^2y}{dt^2} &= T \left(\frac{\frac{dy}{dx}(x + \Delta) - \frac{dy}{dx}(x - \Delta)}{2\Delta} \right) \\ \rho_L \frac{d^2y}{dt^2} &= T \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)\end{aligned}$$

donde en el último paso se hizo tender Δ a cero.

Esta ecuación tiene la misma forma que la encontrada para el caso de las varillas en torsión, con la diferencia que la densidad de masa juega el rol de la inercia y la tensión de la cuerda la fuerza restitutiva.

Nuevamente, si definimos

$$c = \sqrt{T/\rho_L}$$

se obtiene la ecuación de ondas

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)$$

Verifique que nuevamente c tiene dimensiones de velocidad

La ecuación de ondas para la cuerda dice que la aceleración es proporcional a la segunda derivada de y respecto a x . Notemos que esto es consistente pues si la cuerda simplemente se levanta desde un extremo, la deformación y está dada por una línea recta $y = (\operatorname{tg} \alpha)x$, donde α es el ángulo en que se levantó. Sabemos que la segunda derivada de una línea recta es nula, dando lugar a que la aceleración es nula, tal como efectivamente se observa. ¡Una guitarra no suena sola cuando se la inclina!

6A.3. Análisis de la ecuación: Solución de D' Alembert

El análisis general de la ecuación de ondas no es simple y en esta unidad nos concentraremos en lo que se llama ondas propagativas.

En general la ecuación de ondas tiene la forma

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \quad (6A.3)$$

donde $u(x, t)$ es una variable que describe la deformación relevante en el medio (es decir, $u = \theta$ para el caso de las varillas y $u = y$ para el caso de la cuerda).

Vamos a buscar un tipo de soluciones que se llama de D' Alembert o propagativo. Imaginemos que tenemos una función $f(x)$ cualquiera (con todas las buenas propiedades de cálculo para poder calcular las derivadas que sean necesarias). A partir de esta función definimos la función

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

Calculemos las derivadas temporales y espaciales de u . Las derivadas espaciales son directas y se calculan como

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= f'(x - ct) \\ \frac{d^2 u}{dx^2} &= f''(x - ct) \end{aligned}$$

donde f' y f'' son la primera y segunda derivada de f respecto a su argumento. Para calcular las derivadas de u respecto al tiempo hay que usar la regla de la cadena pues se debe derivar el argumento $(x - ct)$ respecto a t . El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (-c)f'(x - ct) \\ \frac{d^2 u}{dt^2} &= (-c)^2 f''(x - ct) = c^2 f''(x - ct) \end{aligned}$$

Notamos que si reemplazamos estas derivadas en la ecuación de onda (6A.3), se produce una cancelación a ambos lados para cualquier f .

Luego, hemos encontrado una solución de la ecuación de ondas.

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

De manera análoga se puede mostrar (queda de tarea) que si $g(x)$ es una función cualquiera entonces

$$u(x, t) = g(x + ct)$$

también es solución.

Notar que una combinación cualquiera

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

es solución (¡verificar!).

También es conveniente notar que la solución puede escribirse como:

$$u(x, t) = f_1(ct - x) + g_1(ct + x)$$

donde f_1 y g_1 son funciones arbitrarias. En algunas situaciones resulta más cómodo usar la última forma.

6A.4. Problema resuelto

6A.4.1. Problema

Una cuerda de longitud L y masa total m cuelga desde un soporte, como se muestra en la figura 6A.4.

1. Determine el tiempo total que tarda un pulso en propagarse desde el extremo inferior al superior. (Indicación: Recuerde que la tensión de la cuerda cambia según la altura).
2. ¿Cómo cambia su respuesta si un cuerpo de masa M se cuelga desde el extremo inferior de la cuerda?.

6A.4.2. Solución

La velocidad de un pulso depende de la tensión y de la densidad de masa, a través de la relación $c = \sqrt{T/\rho_L}$. En este problema la tensión depende de la posición debido a que la cuerda debe sostener su propio peso. En el punto y medido desde el punto inferior, la tensión debe sostener un peso $\rho_L g y$. De este modo tenemos que la velocidad satisface la relación: $v^2 = gy$. La velocidad satisface la relación de un movimiento uniformemente acelerado: $v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta$. Con $v_i = 0$, $\Delta = y$ y $a = g/2$. El tiempo está entonces entregado por la relación:

$$y(t) = y_0 + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 = L$$

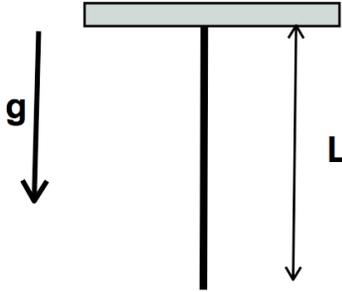


Figura 6A.4: Cuerda que cuelga bajo su propio peso.

obteniendo la solución: $t = 2\sqrt{L/g}$.

La clave para este problema es identificar la dependencia de la tensión con respecto a la posición. Una vez hecho eso, el resultado es directo si logramos identificar las ecuaciones resultantes con las de un movimiento acelerado uniformemente. Esta identificación no deja de ser extraña pues el valor de la aceleración es igual a la mitad de g ¡pero hacia arriba! Esto se debe que mientras más arriba, más peso debe soportar la cuerda debido a su propio peso

En el caso en que un cuerpo de masa M cuelga del extremo inferior de la cuerda, el único cambio corresponde a la tensión $T = \rho_L g y + Mg$. De este modo obtenemos: $v^2 = gy + Mg/\rho_L$. Haciendo nuevamente la analogía con el movimiento uniforme acelerado, obtenemos:

$$t = 2\sqrt{\frac{M}{\rho_L g}} \left(\sqrt{1 + \frac{m}{M}} - 1 \right),$$

donde m es la masa total de la cuerda.

Podemos verificar nuestra álgebra usando los límites $m \ll M$ y $m \gg M$. En el primer caso obtenemos $t \sim L\sqrt{\rho_L/Mg}$. Es decir, toda la tensión se origina a partir de la masa M y la contribución de la masa de la misma cuerda es irrelevante. El tiempo es simplemente L/c donde c es constante y dado por la densidad de la cuerda y la tensión generada por la masa externa. En el otro caso límite recuperamos la expresión de la parte anterior $t \sim 2\sqrt{L/g}$.

6A.5. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: En el texto se desarrollaron dos ejemplos de ondas.

Para cada uno de estos ejemplos, indique cuál es la variable que está descrita por la ecuación de ondas. Es decir, para cada ejemplo indique qué es u en:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2 \frac{d^2u}{dx^2}$$

Pregunta 2: Dé un ejemplo de una onda transversal y de una onda longitudinal.

Pregunta 3: Dé dos ejemplos de ondas transversales.

Pregunta 4: Dé dos ejemplos de propagación de pulsos en ondas.

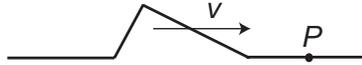
Pregunta 5: Dé dos ejemplos de ondas mecánicas y un ejemplo de una onda no mecánica.

Pregunta 6: En la ecuación de ondas, ¿qué unidades tiene la cantidad c ?

$$\frac{d^2u}{dt^2} = c^2 \frac{d^2u}{dx^2}$$

6A.6. Ejercicios

Ejercicio 1: La figura representa una foto de un pulso que se mueve a velocidad v en una cuerda uniforme bajo una tensión dada. Grafique el desplazamiento y_P del punto P como función del tiempo.



Ejercicio 2: Dos cuerdas semi-infinitas de densidades distintas están unidas en $x = 0$. Desde $x > 0$ viaja hacia $x < 0$ una onda armónica de frecuencia angular ω y longitud de onda λ . ¿Cuáles de las siguientes cantidades cambian al pasar la onda de un medio a otro?

- (a) Frecuencia
- (b) Velocidad de propagación de la onda
- (c) Longitud de onda
- (d) Período

Ejercicio 3: Un pulso se mueve en dirección x en un sistema de varillas acopladas por torsión τ , todas las varillas de igual largo $L = 0,2$ m, masa $m = 0,3$ kg, separación $\Delta = 0,01$ m, y de diámetro muy pequeño. El pulso está descrito por

$$\theta(x, t) = A e^{-(ax+bt)^2},$$

con $A = 0,2$ rad, $a = 1 \text{ m}^{-1}$ y $b = 0,05 \text{ s}^{-1}$. Determine:

- (a) la dirección de movimiento del pulso,
- (b) la velocidad de propagación del pulso,
- (c) la constante de torsión τ entre las varillas.

Unidad 6B: Ondas estacionarias

6B.1. Introducción

Todos los cuerpos exhiben algún grado de flexibilidad por cuanto pueden experimentar pequeñas deformaciones, sean éstas de tipo longitudinal (a lo largo del cuerpo) o transversal (normales al cuerpo). Estas perturbaciones, inicialmente forzadas por un agente externo, pueden viajar a través del medio dando lugar a ondas y pulsos.

Un caso simple, pero muy relevante, es una cuerda tensa dispuesta en forma horizontal. Supondremos el eje x alineado con la cuerda. En este caso la deformación $y(x,t)$ corresponde a los pequeños cambios de posición vertical de las “partículas” que forman la cuerda. Las “partículas” se refieren a los elementos infinitesimales de la cuerda entre x y $x + dx$. Al aplicar la segunda ley de Newton a un elemento infinitesimal de la cuerda obtenemos la ecuación de onda:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

donde $c = \sqrt{\tau/\rho}$, con τ la tensión de la cuerda y ρ su densidad lineal. Notar que c depende exclusivamente de las propiedades del medio y no de las condiciones iniciales o amplitud de las deformaciones.

En la unidad anterior se demostró que la función

$$y = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{6B.1}$$

satisface la ecuación de onda. Las funciones f y g representan la “forma” de una onda viajera o pulso que se desplaza a la derecha y a la izquierda, respectivamente, con una rapidez c (es por eso que el parámetro c se conoce como velocidad de fase).

6B.2. Ondas armónicas

Supongamos que en $t = 0$ la cuerda se ha deformado en forma sinusoidal tal que

$$y(x,0) = A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right). \tag{6B.2}$$

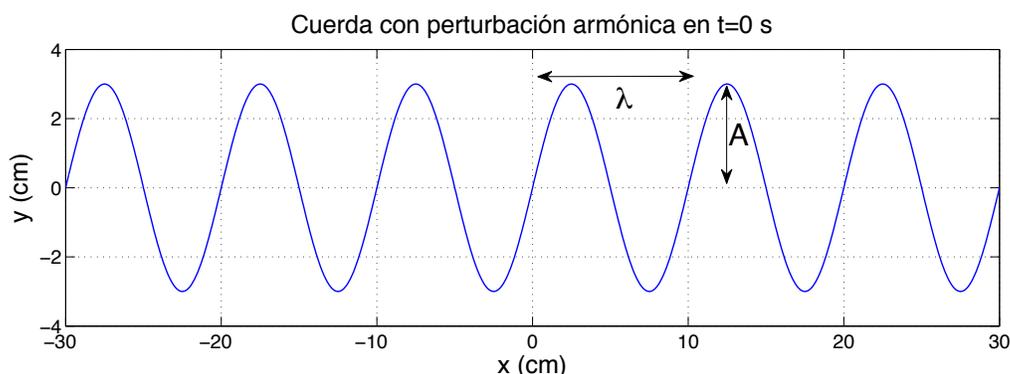


Figura 6B.1: Forma de una perturbación armónica en $t = 0$ (condición inicial). En este caso, $\lambda = 10$ cm y $A = 3$ cm.

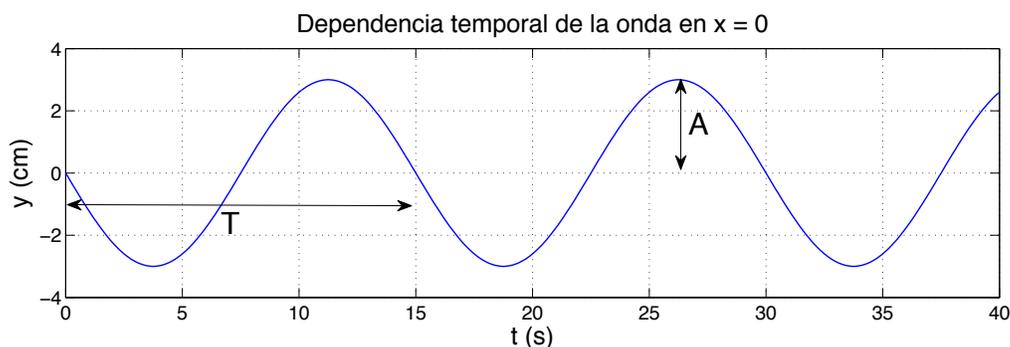


Figura 6B.2: Evolución temporal de la perturbación armónica en $x = 0$ ($T = 15$ s y $A = 3$ cm)

La constante A representa la amplitud máxima de las deformaciones. Los nodos de la cuerda corresponden a los puntos $y = 0$. En la condición inicial, éstos ocurren en todas las posiciones x que satisfacen $2\pi x/\lambda = n\pi$, es decir $x = n\lambda/2 = \{\dots, -2\lambda, -3\lambda/2, -\lambda, -\lambda/2, 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, 2\lambda, \dots\}$. En la figura 6B.1 se ilustra la forma de la cuerda en $t = 0$. Se observa que en $x = \lambda, 2\lambda, \dots$ la forma sinusoidal se reproduce nuevamente. Por esta razón λ se denomina longitud de onda.

Cuando $t \geq 0$ la onda comienza a avanzar, con velocidad de fase c , y supongamos que lo hace hacia la derecha. Esto significa que el argumento debe ser de la forma $x - ct$. Combinando las expresiones (6B.1) y (6B.2) obtenemos entonces

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} \left[2\frac{\pi}{\lambda}(x - ct) \right] = A \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{ct}{\lambda} \right) \right] = A \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right], \quad (6B.3)$$

donde hemos definido $T = \lambda/c$. Interpretamos ahora este nuevo parámetro. Por simplicidad consideremos $x = 0$, de manera que (6B.3) se reduce a $y(0, t) = A \operatorname{sen}(-2\pi t/T) = -A \operatorname{sen}(2\pi t/T)$, cuyo gráfico se muestra en la figura 6B.2. Claramente la partícula de la cuerda en $x = 0$ (y cualquier otra partícula) experimenta oscilaciones armónicas de amplitud A y período T . Entonces la ecuación (6B.3) describe una onda armónica, de amplitud A , con longitud de onda λ y período T que viaja hacia la derecha. Una

forma más simplificada de escribir esta ecuación es

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t), \quad (6B.4)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia angular (rad/s). Algunas veces se emplea la frecuencia $f = 1/T$ (en $s^{-1} = \text{Hz} \equiv \text{Hertz}$). Las ecuaciones (6B.3) y (6B.4) suponen que $y(x=0, t=0) = 0$, lo cual no siempre es así. Una versión más general de (6B.3) se escribe como

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t - \varphi), \quad (6B.5)$$

donde φ se denomina constante de fase. Tanto la amplitud A como la constante de fase φ dependen de las condiciones iniciales, es decir las deformaciones impuestas a la cuerda en $t = 0$.

Las condiciones iniciales también pueden dictar el valor de λ (y entonces k) con lo cual el valor de T (y entonces ω) queda completamente definido pues

$$\frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}.$$

Alternativamente, la condición inicial puede fijar el valor de T , lo cual a su vez determina el valor de λ . Las relaciones anteriores indican que la longitud de onda (o número de onda) no es independiente del período (o frecuencia) cumpliéndose que

- Longitudes de onda largas (número de onda pequeño) son ondas de período largo (baja frecuencia).
- Longitudes de onda cortas (número de onda grande) son ondas de período corto (alta frecuencia).

6B.3. Ondas en una cuerda semi-finita

Hasta ahora hemos considerado que la cuerda tiene un largo infinito, $-\infty \leq x \leq +\infty$. Analizaremos a continuación lo que pasa cuando la cuerda es semi-finita, tal que $-\infty \leq x \leq 0$. La condición de borde en $x = 0$ puede ser de dos tipos:

- Extremo fijo:

$$y(0,t) = 0 \quad \forall t$$

- Extremo móvil:

$$\frac{dy(0,t)}{dx} = 0 \quad \forall t$$

6B.3.1. Extremo fijo

Supongamos que un pulso u onda se acerca desde la izquierda hacia el punto fijo y definamos $t = 0$ cuando la perturbación alcanza $x = 0$. Entonces,

$$y_D(x,t) = f(x - ct) \quad \text{para } t \leq 0 \text{ y } x \leq 0.$$

¿Qué pasa cuando $t \geq 0$? Para responder esta pregunta emplearemos el principio de superposición, suponiendo además que la cuerda se extiende hacia el infinito también a la derecha de $x = 0$. Imaginemos que en el lado *imaginario* de la cuerda viaja una perturbación idéntica a la real pero invertida y moviéndose hacia la izquierda

$$y_I(x,t) = -f(-(x+ct)) \text{ para } t \leq 0 \text{ y } x \geq 0.$$

El signo $-$ delante de f es porque debe estar invertida con respecto a la horizontal $y = 0$ (posición de equilibrio de la cuerda), y el signo $-$ delante el argumento $x+ct$ es porque debe estar invertida respecto a la vertical en $x = 0$. Ambas condiciones aseguran que en $x = 0$ la onda en la cuerda, dada por $y(x,t) = y_D(x,t) + y_I(x,t)$ siempre cumplirá $y(0,t) = 0 \forall t$. Entonces, la solución completa está dada por:

$$y(x,t) = f(x-ct) - f(-(x+ct)), \forall t \text{ y } \forall x.$$

La fórmula anterior claramente satisface la condición de punto fijo en $x = 0$, puesto que $y(0,t) = f(0-ct) - f(-0-ct) = 0$. Además predice lo que ocurre para $t > 0$. En este caso la perturbación se refleja en $x = 0$ (es decir comienza a avanzar hacia la izquierda), invirtiendo su forma tanto respecto a la horizontal como la vertical pero manteniendo todos los demás parámetros iguales (Figura 6B.3a).

Una manera más formal de hacer la deducción de la forma de la onda que se reflejará del borde fijo es reconocer que $f(x-ct)$ por sí solo no puede satisfacer la condición de borde $y(0,t) = 0$ para todo t . Es por ello que la solución debe tener la forma $y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, pues ésta es precisamente la solución general de la ecuación de onda. Se impone entonces $y(0,t) = 0$, luego $-f(-ct) = g(ct)$. Haciendo el cambio de variable $u = ct$, entonces la función g cumple $g(u) = -f(-u)$. Se concluye entonces que $g(x+ct) = -f(-(x+ct))$.

6B.3.2. Extremo móvil

En este caso, la partícula de la cuerda en $x = 0$ puede cambiar su posición pero la tangente a la cuerda siempre se mantiene horizontal. Esto se debe a que ahora solo hay una tensión por el lado izquierdo de este punto, por lo que en la deducción de la ecuación de movimiento de la cuerda que vimos en la unidad anterior se obtiene $dy(0,t)/dx = 0$ para todo t . Si esta condición no se satisface actuaría una fuerza transversal finita (en la dirección vertical) lo que generaría aceleraciones infinitamente grandes pues el extremo tiene masa cero. Por analogía con el caso anterior, se puede demostrar que esta condición de borde se cumple para

$$y(x,t) = f(x-ct) + f(-(x+ct)) \forall t \text{ y } \forall x.$$

Esto se obtiene de imponer $dy(0,t)/dx = 0 \forall t$ en la forma general $y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, pues en este caso $dy(x,t)/dx = f'(x-ct) + g'(x+ct)$, donde el símbolo $'$ representa la derivada respecto al argumento de cada función. Luego, al evaluar en $x = 0$, $f'(-ct) = -g'(ct)$. Con el cambio de variable $u = ct$, se tiene $g'(u) = -f'(-u)$. Al integrar, se obtiene $g(u) = f(-u)$, por lo tanto $g(x+ct) = f(-(x+ct))$, lo que concluye la demostración.

La solución $y(x,t) = f(x-ct) + f(-(x+ct))$ indica que nuevamente una perturbación viajera se refleja en $x = 0$, pero esta vez es reflejada manteniéndose en el mismo lado de la cuerda pero con su

forma invertida con respecto a la vertical en $x = 0$ (Fig. 6B.3b). Solo de esta forma, al encontrarse la onda incidente con la imaginaria en $x = 0$ se tiene que la suma de las dos ondas tiene pendiente nula en $x = 0$ para todo t .

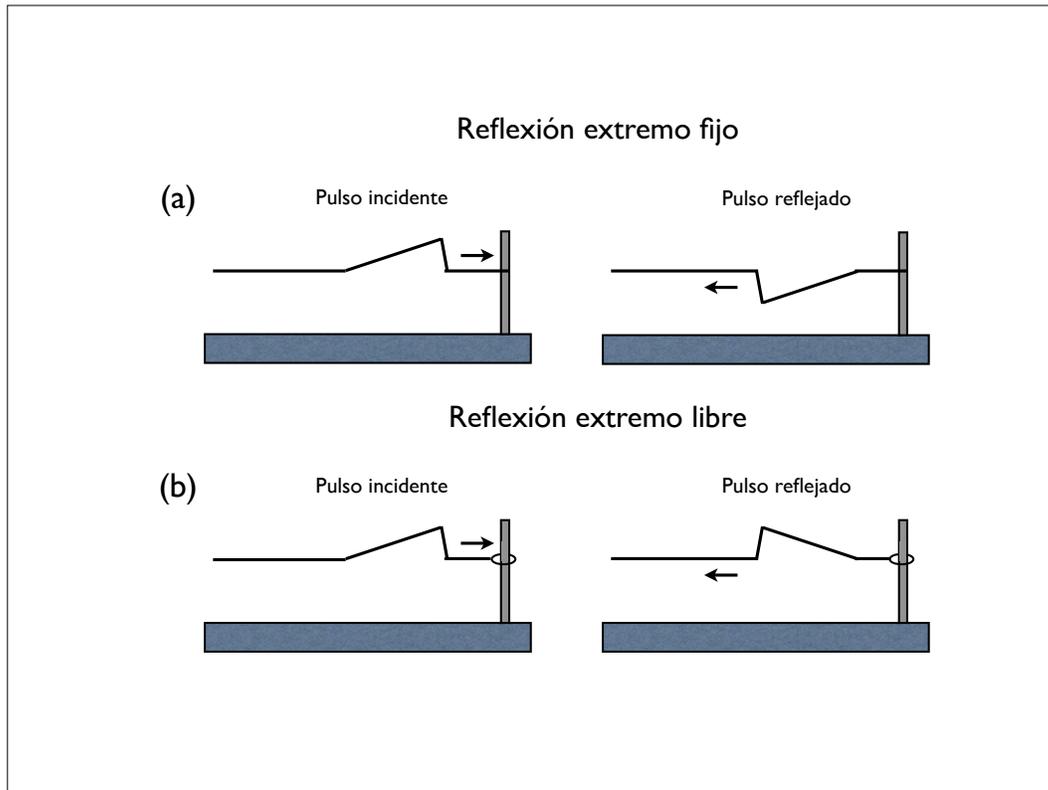


Figura 6B.3: Reflexión de un pulso en un extremo fijo (a) y libre (b).

6B.4. Ondas estacionarias

Supongamos que se generan ondas armónicas en una cuerda semi-infinita, la cual está fija en uno de sus extremos (en $x = 0$). De acuerdo a la solución general ya vista, en este caso la solución está dada por $y(x,t) = A \text{sen}(kx - \omega t - \varphi) - A \text{sen}(-(kx + \omega t + \varphi))$. Aplicando identidades trigonométricas, es fácil demostrar que

$$y(x,t) = 2A \text{sen}(kx) \cos(\omega t + \varphi), \quad (6B.6)$$

lo cual se cumple $y(0,t) = 0 \forall t$. Esta ecuación fue deducida de la superposición (suma) de dos ondas viajeras, pero es una onda estacionaria; no aparecen explícitamente los argumentos del tipo $x - ct$ y $x + ct$. Esta onda estacionaria tiene número de onda (y longitud de onda λ) igual que la onda original ($\text{sen}(kx)$) y oscila en el tiempo al igual que la original (ω o T no cambian). Los valores k y ω aún satisfacen $c = \omega/k$. La forma de esta onda se muestra en la figura 6B.4. Los nodos se definen como los puntos

donde $y(x,t) = 0$ para todo t , mientras que los antinodos son los puntos donde la amplitud es máxima y es el doble de la original, o sea es igual a $2A$. Tanto los nodos como los antinodos están separados entre sí por $\lambda/2$.

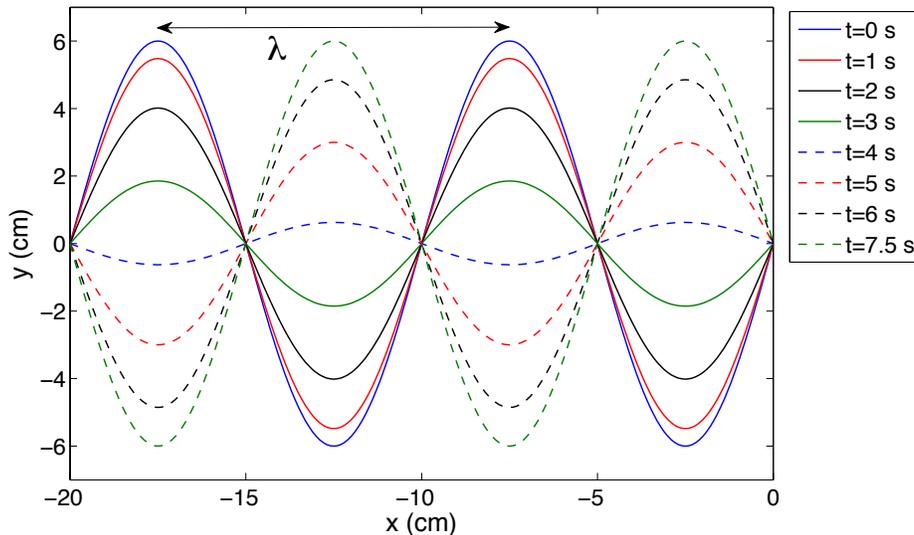


Figura 6B.4: Geometría de onda estacionaria en una cuerda semi-infinita producida por la superposición $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t) - A \sin(-(kx + \omega t)) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$. Se muestra la onda para diferentes tiempos. En este caso $\varphi = 0$, $A = 3$ cm, $T = 15$ s y $\lambda = 10$ cm. Para $t = T/2 = 7,5$ s, la onda repite su forma pero desplazada en $\lambda/2$ (o invertida por un factor -1).

6B.5. Modos normales en una cuerda finita

6B.5.1. Ambos extremos fijos

Supongamos ahora que la cuerda está empotrada en ambos extremos y tiene largo L . Ya no es posible tener valores arbitrarios de k (ni de ω) pues ambos extremos de la cuerda deben ser nodos, $y(x=0,t) = y(x=L,t) = 0 \forall t$. La ecuación (6B.6) cumple la primera condición en forma trivial, pero la segunda requiere

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k \equiv k_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$. Además, como $c = \lambda/T = \lambda f$, entonces

$$f_n = nc/2L.$$

Los pares $[\lambda_n, f_n]$ definen los modos normales de la cuerda. A medida que n aumenta, disminuye la longitud de onda y aumenta su frecuencia (ver figura 6B.5).

Se ha encontrado que una cuerda con extremos fijos sólo puede oscilar con ciertas frecuencias muy particulares, las frecuencias de los modos normales f_n . Esto es similar al caso del oscilador armónico (visto en la Unidad 5A). En el caso del oscilador armónico, la oscilación ocurría con una única frecuencia que dependía de la masa y rigidez del resorte. En el caso de una cuerda, por ser un sistema extendido, ya no hay una sino que varias frecuencias naturales, las cuales constituyen un conjunto discreto infinito. Análogamente al caso del oscilador armónico, si una cuerda es forzada en una de estas frecuencias naturales resonará, presentando un movimiento de gran amplitud.

El resultado encontrado es de mayor generalidad que sólo para cuerdas. Cualquier sistema extendido que tenga una forma de equilibrio, tiene un conjunto discreto de frecuencias naturales en las cuales oscila y que, por lo tanto, puede ser forzado en resonancia. Como ejemplo de esto, tenemos los instrumentos musicales de percusión o cuerda, como también los edificios o puentes, los cuales son diseñados para que las frecuencias naturales no coincidan con los forzamientos de los terremotos, por ejemplo.

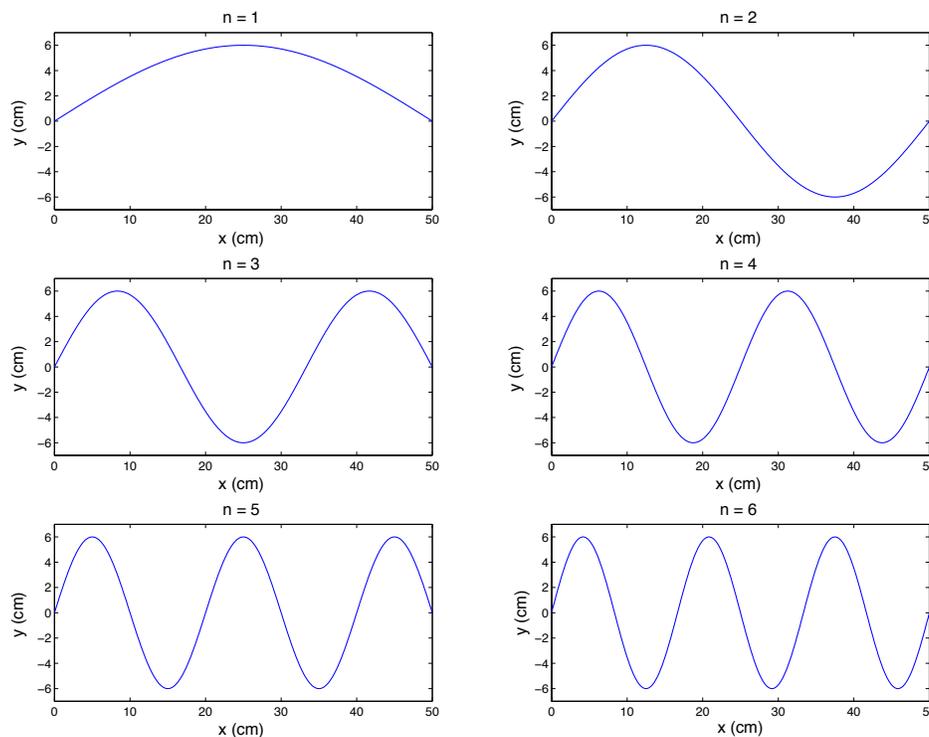


Figura 6B.5: Modos normales en una cuerda con sus dos extremos fijos. En este caso $\varphi = 0$, $A = 3$ cm y $L = 50$ cm.

6B.5.2. Un extremo fijo y el otro libre

Se deja propuesto demostrar que en este caso $\lambda_n = 4L/(2n - 1)$ y $f_n = (2n - 1)c/4L$.

6B.5.3. Ambos extremos libres

Se deja propuesto demostrar que en este caso $\lambda_n = 2L/n$ y $f_n = nc/2L$.

6B.6. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: Se desea generar ondas armónicas en una cuerda tensa ($T = 10 \text{ N}$) de densidad lineal $0,1 \text{ kg/m}$. Inicialmente se impone una deformación aproximadamente sinusoidal con longitud de onda $\lambda = 0,1 \text{ m}$ y amplitud $A = 0,02 \text{ m}$.

- ¿Cuál es la frecuencia de onda resultante?
- Si la cuerda es infinita, ¿qué tipo de ondas se generan? (viajeras o estacionarias).

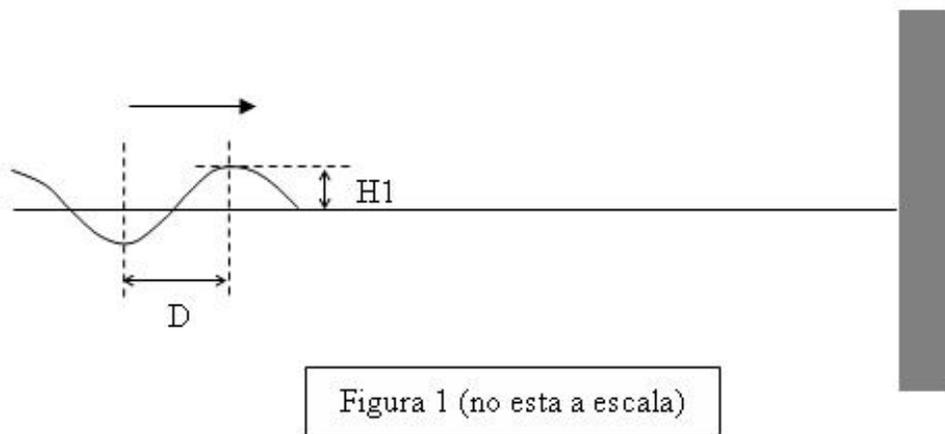
Pregunta 2: Una onda estacionaria se genera a partir de la superposición de dos ondas viajeras idénticas en una cuerda tensa. Las ondas viajeras tienen una amplitud $A = 0,005 \text{ m}$ y una frecuencia $f = 2 \text{ Hz}$. Determine la amplitud que experimenta la cuerda en los antinodos de la onda estacionaria y el período con que éstos puntos experimentan un ciclo completo de oscilación.

Pregunta 3: Una onda estacionaria se genera a partir de la superposición de dos ondas viajeras idénticas en una cuerda tensa. Las ondas viajeras tienen una amplitud $A = 0,005 \text{ m}$ y una longitud de onda $\lambda = 0,1 \text{ m}$. La velocidad de fase en esta cuerda es $c = 20 \text{ m/s}$. Determine la amplitud que experimenta la cuerda en los antinodos de la onda estacionaria y el período con que estos puntos experimentan un ciclo completo de oscilación.

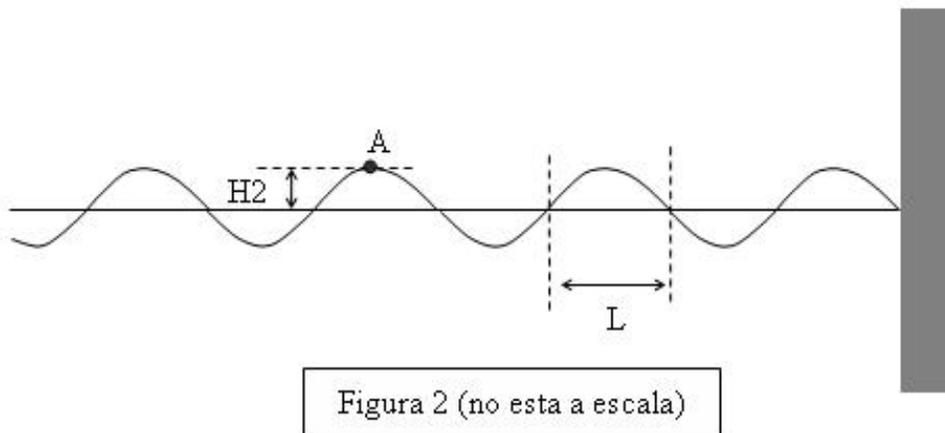
6B.7. Ejercicios

Ejercicio 1: Se fija el extremo derecho de una cuerda semiinfinita. Desde la izquierda se hacen incidir ondas viajeras armónicas hacia el extremo fijo. La tensión de la cuerda es 10 N y la densidad lineal 0,1 kg/m.

La figura 1 muestra una fotografía instantánea de las ondas viajeras (antes de llegar al punto fijo), con $D = 0,1$ m y $H1 = 0,02$ m.



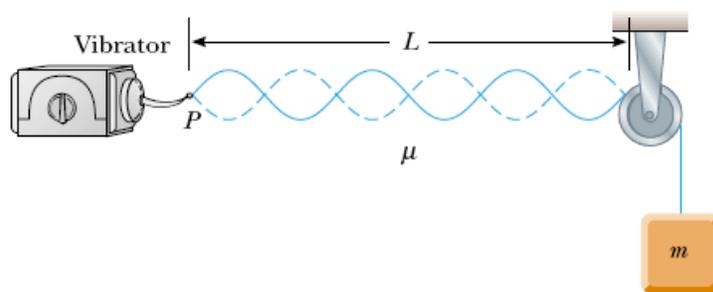
Después de un cierto tiempo se vuelve a sacar una fotografía instantánea como se muestra en la figura 2. El punto A se encuentra a una altura $H2 = 0,02$ m.



Determine el valor de L (distancia entre nodos), la altura máxima a la cual llegará el punto A y el tiempo que transcurrirá entre el instante de la fotografía y el momento en que A alcance su altura máxima.

Ejercicio 2: Se tiene un arreglo como indicado en la figura: un bloque de masa m pasa por una polea ideal sujeta por una cuerda ideal de densidad lineal de masa $\rho = 2 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$. La cuerda está fija a una distancia horizontal $L = 2 \text{ m}$ del eje de la polea a un aparato que fuerza vibraciones verticales con una frecuencia f fija. Cuando la masa m es $16,0 \text{ kg}$ o $25,0 \text{ kg}$ se observan ondas estacionarias, y no se producen ondas estacionarias con masas intermedias.

1. Determinar la frecuencia de vibración f .
2. Determinar la masa máxima para la cual se pueden observar ondas estacionarias.



Unidad 7A: Hidrostática–Presión colisional

7A.1. Introducción

En esta unidad estudiaremos la fuerza que ejerce un conjunto de partículas cuando rebotan en una superficie. Comenzaremos con nociones simples acerca de rebotes de partículas y construiremos un modelo más elaborado para cuantificar el rebote de un chorro de ellas.

Lo interesante de este modelo es que nos permite hacerlo extensivo a diversos sistemas de nuestro entorno. Por lo tanto, este modelo nos permite entender, por ejemplo, la fuerza que un gas ejerce sobre las paredes de su contenedor, la fuerza de arrastre del aire sobre un globo cuando éste se mueve rápidamente, la fuerza que el viento ejerce sobre un objeto, la fuerza que ejerce una cadena al caer sobre el suelo, el rol de las aspas de un helicóptero para que éste vuele, la fuerza que ejerce el chorro de una manguera al chocar contra el suelo, etc.

Conviene introducir algunas nociones que nos serán útiles en la discusión que sigue. La primera de estas es la *densidad de partículas*, denotada por n , que corresponde al número de partículas por unidad de volumen (ver Fig. 7A.1). Así, si $n(\vec{r})$ es el número de partículas por unidad de volumen en la posición \vec{r} , entonces el número de partículas δN en un pequeño volumen de tamaño δV que abarca \vec{r} está dado por

$$\delta N = n(\vec{r}) \delta V .$$

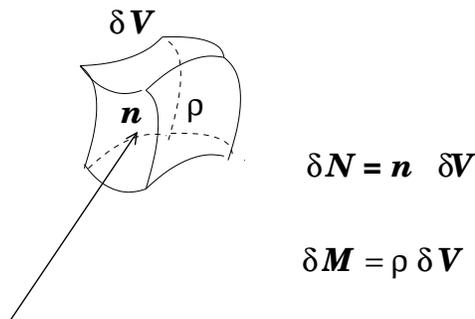


Figura 7A.1: Definición de densidad de partículas $n(\vec{r})$ y de densidad de masa $\rho(\vec{r})$.

De igual manera podemos definir la *densidad de masa*, que denotaremos por ρ . La masa δM contenida en un pequeño volumen de tamaño δV estará dada por

$$\delta M = \rho(\vec{r}) \delta V .$$

Ciertamente ρ puede depender de la posición, lo que se representa por $\rho = \rho(\vec{r})$.

Si todas las partículas son de igual masa m_o entonces

$$\rho(\vec{r}) = m_o n(\vec{r}) ,$$

7A.2. Colisiones elementales

Cuando una partícula con cierto momento lineal rebota en una superficie, experimenta un cambio de momento. El momento transferido a la partícula es

$$\delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i ,$$

donde \vec{p}_i y \vec{p}_f son los momentos inicial y final, respectivamente. La situación está representada en la figura 7A.2. Si el rebote es elástico, con la partícula incidiendo con rapidez v , entonces la variación de momento está dada por

$$\delta \vec{p} = 2m_o v \cos \phi \hat{n} ,$$

con ϕ el ángulo de incidencia con respecto a la normal \hat{n} del plano del rebote y m la masa de la partícula.

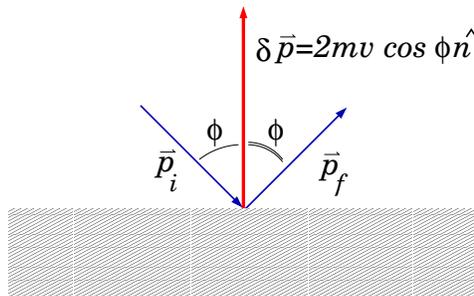


Figura 7A.2: Colisión de una partícula con una superficie.

Este cambio de momento es el que la superficie le entrega a la partícula, siendo su origen la interacción (fuerza) percusiva que la superficie ejerce sobre la partícula (que por la tercera ley de Newton, es igual y opuesta a la que la partícula le imprime a la superficie).

Una situación interesante ocurre cuando una lluvia de partículas rebota sobre la misma superficie. Para simplificar la discusión, supondremos que existen n partículas por unidad de volumen, las cuales se mueven con igual velocidad de incidencia sobre una superficie plana.

En este caso cuantificaremos el momento neto $\delta \vec{P}$ que entrega la superficie al chorro de partículas en un lapso δt . En la figura 7A.3 se ilustra un chorro de partículas que incide sobre una superficie. En

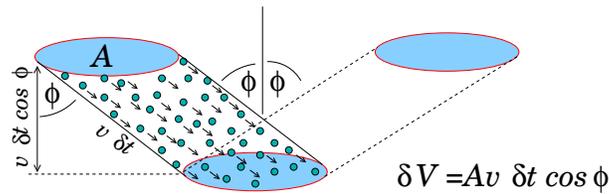


Figura 7A.3: Lluvia de partículas incidiendo sobre una superficie.

ella se muestran las partículas que colisionarán la superficie entre t y $t + \delta t$. El cambio de momento del chorro será igual al cambio de momento experimentado por una sola de las partículas multiplicado por el número δN de partículas que colisionarán con la pared durante el intervalo de tiempo δt . δN está dado por

$$\delta N = n \times \delta V = n \times A v \delta t \cos \phi .$$

Entonces, el cambio de momento experimentado por todas las partículas que golpean (en el lapso δt) es

$$\begin{aligned} \delta \vec{P} &= (n A v \delta t \cos \phi) \times (2 m_0 v \cos \phi \hat{n}) \\ &= 2 \underbrace{m_0 n}_{\rho} A v^2 \cos^2 \phi \hat{n} \delta t . \end{aligned}$$

Por la segunda ley de Newton, identificamos entonces la fuerza media responsable del cambio de momento de las partículas rebotando:

$$\vec{F}_{col} = 2 \rho A v^2 \cos^2 \phi \hat{n} .$$

Denotando por $A_{\perp} = A \cos \phi$, la sección transversal del chorro de partículas, entonces

$$\vec{F}_{col} = 2 \rho A_{\perp} v^2 \cos \phi \hat{n} .$$

Observamos que la fuerza que la superficie ejerce sobre el chorro es proporcional a:

- la densidad de masa del chorro;
- el cuadrado de la rapidez;
- la sección transversal del chorro;
- al coseno del ángulo de incidencia con respecto a la normal.

En el caso de un chorro de partículas que incide perpendicularmente sobre una superficie, la fuerza es

$$F_{\perp} = 2 \rho A_{\perp} v^2 .$$

Podemos estimar la fuerza que ejerce un viento de 60 km/h sobre una placa de 1 m^2 . Tomando $v = 60 \text{ km/h} \approx 17 \text{ m/s}$, $\rho \approx 1 \text{ kg/m}^3$, estimamos $F_{\perp} \approx 580 \text{ N}$, equivalente al peso de una masa de 58 kg.

7A.2.1. La presión colisional

Volviendo a la expresión $\vec{F}_{col} = 2\rho Av^2 \cos^2 \phi \hat{n}$, observamos que

$$P \equiv \frac{F_{col}}{A} = 2\rho v^2 \cos^2 \phi$$

que expresa la fuerza por unidad de área que el chorro ejerce sobre la superficie al incidir sobre ésta las partículas. A esta cantidad se le denomina *presión* y dimensionalmente se expresa como fuerza por unidad de área. En el sistema internacional, una unidad de presión se expresa en N/m^2 y corresponde a un Pascal:

$$1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa}$$

La presión es una cantidad física muy útil para caracterizar la manifestación mecánica de un medio fluido. En nuestro modelo es el resultado del cambio de momento de partículas en movimiento. En este modelo, las partículas son monoenergéticas (todas chocan con la misma energía cinética) y colimadas (todas ellas se mueven en la misma dirección).

En el caso del aire, ejemplificado en la figura 7A.4, las partículas que golpean sobre un pequeño elemento de superficie provienen de todas las direcciones dentro de medio hemisferio. Además, las partículas no son monoenergéticas sino que su velocidad sigue una distribución de probabilidad. El cálculo de la presión en este caso requiere de herramientas matemáticas más sofisticadas de las que se dispone en este nivel. Sin embargo, el origen microscópico de la presión es el mismo que hemos introducido en esta unidad.

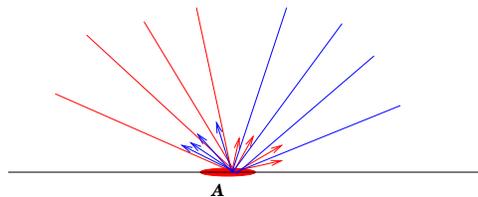


Figura 7A.4: Un esquema más realista de la presión colisional en el aire requiere considerar que las partículas pueden viajar en todas direcciones y con distintas rapidezces.

7A.3. Fuerza al desviar un chorro de partículas

Una aplicación directa del resultado anterior es el estudio de un chorro de partículas que golpea un plano inclinado al caer por gravedad, como se muestra en la figura 7A.5. La deducción anterior para la magnitud de la fuerza que ejerce el plano inclinado para desviar las partículas en sus impactos, $F_{col} = 2\rho A_{\perp} v^2 \cos \phi$, indica que ella es proporcional al cuadrado de la rapidez del impacto, al coseno del ángulo de inclinación, a la sección transversal del flujo y a la densidad de éste.

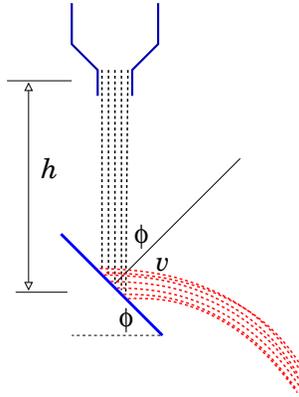


Figura 7A.5: Chorro que cae bajo la acción de la gravedad e impacta un plano inclinado.

Una manera de constatar la proporcionalidad entre F_{col} y v^2 es medir la fuerza sobre la superficie inclinada y analizar su comportamiento con la altura de caída de granos que caen desde una altura h . Por conservación de energía tenemos que $v^2 = 2gh$, donde g es la aceleración de gravedad. Así,

$$\begin{aligned} F_{col} &= (4\rho A_{\perp} g \cos \phi) h \\ &= (4\rho A_{\perp} g h) \cos \phi \end{aligned}$$

La primera de ellas expresa proporcionalidad con respecto a la altura de caída. La segunda expresa la proporcionalidad con respecto a $\cos \phi$. Se plantea determinar los rangos de variación de h y ϕ para los cuales las expresiones anteriores son razonablemente válidas. ¿Cómo medir nA_{\perp} a partir de una imagen?

7A.4. Rebotes en una placa inclinada

En la figura 7A.6 se ilustran las fuerzas que actúan sobre una placa inclinada de peso $M\vec{g}$, sujeto por un cordel vertical (\vec{T}), embestido por un chorro de granos (\vec{F}) y soportado por un pivote en P (\vec{R}).

Si el sistema es estático, entonces al imponer torque neto nulo con respecto a P tenemos

$$LT \cos \phi - \frac{2L}{3}F - \frac{L}{2}Mg \cos \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad (T - \frac{1}{2}Mg) \cos \phi = \frac{2}{3}F .$$

Si denotamos por T_o la tensión que ocurre cuando $F = 0$,

$$T_o = \frac{1}{2}Mg ,$$

entonces

$$F = \frac{3}{2}(T - T_o) \cos \phi .$$

Si aceptamos que la fuerza F se debe a la fuerza colisional ejercida por el chorro de partículas, es decir $F = F_{col}$, entonces

$$4\rho A_{\perp} h g \cos \phi = \frac{3}{2}(T - T_o) \cos \phi \quad \Rightarrow \quad (T - T_o) = \frac{8}{3}(\rho A_{\perp} h) g .$$

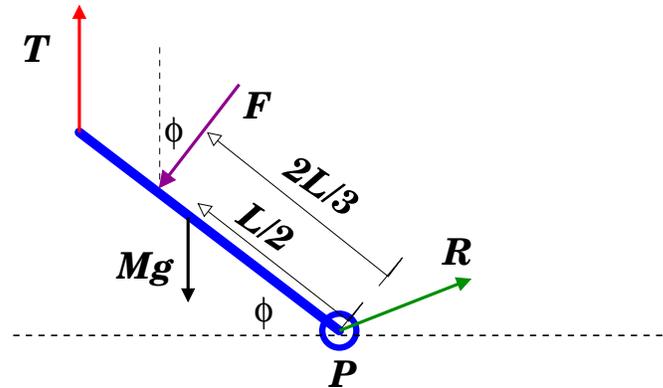


Figura 7A.6: Diagrama de cuerpo libre de una placa inclinada que recibe un chorro de partículas. Uno de los extremos de la placa reposa sobre un pivote y el otro se sujeta con una cuerda.

Definamos la constante B por

$$B = \frac{8\rho A_{\perp}g}{3},$$

entonces

$$(T - T_0) = Bh.$$

Este resultado de forma bastante sencilla es consistente con el hecho de que la rapidez del impacto en la placa es proporcional a v^2 . Además, la ausencia de la dependencia en el ángulo ϕ es por la orientación vertical del cordel que soporta la placa. Las relaciones algebraicas permiten la cancelación de $\cos\phi$ provenientes de F_{col} .

7A.5. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: ¿En qué unidades se expresa la constante B ?

Pregunta 2: Estime la densidad de alumnos por unidad de área en la sala Galileo, de superficie 300 m^2 .
Estime la densidad de masa correspondiente.

Pregunta 3: Estime la fuerza de una granizada sobre un paraguas.

Pregunta 4: ¿Cuál sería el ángulo de rebote de una partícula incidiendo con un ángulo ϕ si la energía cinética del rebote es λ veces la inicial?

Pregunta 5: ¿Cuál es el significado físico de $T - T_0$?

Pregunta 6: ¿En qué unidades se expresa ρv ?

Pregunta 7: Estime la fuerza que ejerce un viento de 100 km/h sobre la pared de una casa de $2,5 \text{ m}$ de altura y 5 m de ancho.

Pregunta 8: Un chorro de partículas de densidad de masa ρ (1 kg/m^3) se mueve con velocidad v (1 m/s) a lo largo de una manguera. Para doblar la manguera en un ángulo β (30°), ¿qué fuerza es necesario aplicar?

Pregunta 9: ¿Qué caracteriza a un chorro monoenergético y colimado de partículas?

Pregunta 10: Estime el tiempo que dura la colisión de un puñado de porotos cuando éstos son soltados desde 50 cm de altura.

Pregunta 11: Defina la densidad de partículas n e ilustre con un ejemplo.

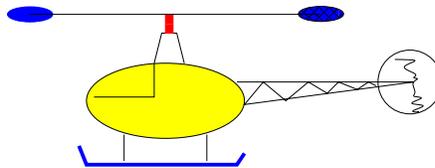
Pregunta 12: Defina la densidad de masa ρ e ilustre con un ejemplo.

7A.6. Ejercicios

Ejercicio 1: Mientras llueve verticalmente, una persona de altura H debe cruzar al paradero de enfrente, ubicado a una distancia L . La persona debe optar por cruzar corriendo o caminando. Determine de qué forma se moja menos.

Ejercicio 2: Un balde con 5 kg de arena se deja caer sobre una balanza durante 1 minuto. Determine y grafique el peso que registra la balanza hasta los 90 segundos considerando que los granos de arena no rebotan.

Ejercicio 3: Para efectos de una estimación sencilla, considere las aspas de un helicóptero formadas por dos placas circunferenciales de aproximadamente 1 m^2 cada una, ubicada a 5 m del eje. Las placas mantienen un ángulo de inclinación entre 25 y 30 grados con la horizontal. Estime el período de rotación de la hélice a fin de que con su rotación se pueda levantar al helicóptero de 500 kg de masa.



Ejercicio 4: El diámetro típico de una gota de lluvia es de 3 mm, aproximadamente. Cuando el agua caída durante 1 hora de lluvia es de 1 mm, estime el número de gotas que golpean el piso en ese lapso por metro cuadrado. ¿A qué fuerza media (colisional) se traduce? Note que necesita estimar la velocidad terminal con que cae una gota de agua. Averígüelo en la web o estímelo a partir de la expresión de la fuerza de arrastre vista en la unidad 5b. ¿A qué presión corresponde el resultado?

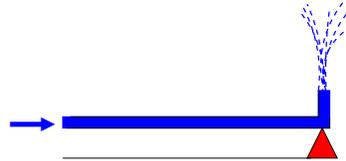
Ejercicio 5: Cuando una partícula rebota elásticamente sobre una pared, el cambio de momento en la colisión es $\delta p_{\perp} = 2m_0 v \cos \phi$, con ϕ el ángulo de incidencia con respecto a la normal.

Determine δp_{\perp} en el caso en que el choque ocurra sobre una superficie perfectamente resbaladiza pero con pérdida de energía, caracterizada por

$$(p'_y)^2 = \lambda (p_y)^2, \quad p'_x = p_x$$

Aquí, la dirección x es paralela al plano de la superficie y la dirección y es perpendicular a ella, $p_{x,y}$ y $p'_{x,y}$ son las componentes del momento antes y después de la colisión, respectivamente. Expresé su resultado en función de la rapidez de incidencia v , ángulo de incidencia ϕ , masa de las partículas m_0 , y constante de rebote λ . Grafique su resultado en función de λ , con $0 \leq \lambda \leq 1$.

Ejercicio 6: En la figura se ilustra una cañería que termina en forma de “L”, de donde sale un chorro de agua en forma vertical. Por la cañería pasa agua ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) a razón de 2 litros cada minuto.



Determine el incremento de la fuerza normal en la cuña triangular cuando sale agua por la cañería. Considere el diámetro de la cañería igual a 10 mm.

Unidad 7B: Hidrostática–Principio de Arquímedes

7B.1. Introducción

Comenzaremos por reconocer que existen distintos estados de la materia. Todos sabemos que el agua puede encontrarse en forma de hielo. Es también usual encontrarse que un charco o pozo de agua líquida puede evaporarse, aunque sea en forma parcial. Estas observaciones denotan que el agua puede estar en forma líquida, gaseosa o sólida. Estos tres estados de la materia son muy generales, cualquier material conocido puede ser transformado de uno de estos estados a otro.

De manera bastante simple podemos decir que un sólido tiene un volumen y una forma bien definidos. Un líquido en cambio tiene un volumen definido, pero su forma no lo es. Finalmente, un gas puede ser considerado como un estado que no tiene ni forma ni volumen bien definidos, pues ambas características dependerán del recipiente que lo contenga.

Tanto los líquidos como los gases corresponden a lo que se conoce como un fluido: se trata de una colección de átomos o moléculas dispuestas aleatoriamente y unidas por fuerzas cohesivas débiles y por fuerzas ejercidas por la pared del contenedor. Estos fluidos pueden ser descritos desde el punto de vista de la Mecánica de Newton. Como hemos visto, esta Mecánica Newtoniana puede ser extendida a un medio compuesto por un gran número de constituyentes elementales. En el caso de los fluidos, su descripción mecánica se divide en la *hidrostática* y la *dinámica de fluidos*. La primera descripción corresponde a la estática de fluidos y es el tema central de esta unidad. La segunda descripción corresponde al estudio de cómo las fuerzas que actúan sobre un fluido afectan su movimiento. También se puede incluir el estudio de la interacción entre fluidos y objetos sólidos, como por ejemplo el caso de un avión. Algo de esto ya ha sido abordado al estudiar la fuerza de arrastre de Rayleigh en la unidad 5B.

En la unidad anterior se estudió el concepto de *presión colisional*. Se determinó cómo un chorro de partículas, sean átomos o granos macroscópicos, ejercen una fuerza sobre una pared que depende, entre otras cosas, de la velocidad del chorro. Este ejemplo es bastante ilustrativo, y el cálculo es relativamente simple. En particular se supone que todos los átomos o granos llegan con la misma velocidad a la pared y por lo tanto transfieren la misma cantidad de momentum a ella.

Consideremos ahora qué pasa con un fluido en reposo, es decir un fluido en una situación estática. ¿Qué significa exactamente que el fluido esté en reposo? ¿Que cada átomo o molécula que lo constituye

está en reposo, es decir con velocidad nula? Esto no es así. Un fluido está en reposo cuando al considerar cualquier pequeño volumen, pequeño comparado con el volumen del contenedor pero grande para aún así contener un gran número de átomos o moléculas, el promedio de las velocidades de todos los constituyentes elementales es cero. Por lo tanto, es este pequeño volumen el que está en reposo, pero no necesariamente los constituyentes elementales. Si cada posible pequeño volumen del fluido cumple esta condición, entonces el fluido completo está en una condición estática.

7B.2. Presión

Es bien conocido que un fluido en reposo ejerce una fuerza sobre las paredes de su contenedor. Basta pensar en un globo. Al inflarlo, éste se llena de gas. Después de cerrar el globo, el gas rápidamente llega a un estado en reposo. Podemos deducir esto simplemente por que no vemos el globo moverse sólo en una dirección. Ahora, recordemos que el globo se mantiene inflado estando el gas en su interior en reposo. El material que conforma el globo es muy elástico y por lo tanto éste trata de volver a su forma inicial (globo desinflado). Pero no puede, simplemente porque el gas que está en su interior ejerce una fuerza sobre sus paredes internas. El globo debe finalmente llegar a un compromiso, entre la fuerza que ejerce el gas y la fuerza elástica del material que lo compone. La fuerza que ejerce el fluido sobre una pared, dividido por el área de ésta, es una cantidad física que se llama presión y que denotaremos P . Es una cantidad escalar y, para un fluido homogéneo, es una cantidad constante independiente del espacio.

El hecho que un fluido en reposo ejerza una fuerza sobre las paredes de su contenedor implica que efectivamente los constituyentes elementales del gas no están en reposo individualmente, pues debe existir una transferencia de momentum entre el fluido y las paredes. Como esta fuerza es constante, podemos concluir que los átomos o moléculas que componen el fluido tienen una rapidez característica. Notemos que es esta rapidez característica de los átomos o moléculas de un fluido lo que fija su temperatura, $T \propto \langle v^2 \rangle$. Un fluido más frío tiene átomos o moléculas que se mueven con una rapidez típica menor y viceversa. Además, los experimentos muestran que en muchos casos la presión es proporcional a la temperatura, $P \propto T$. Esto es consistente con la presión colisional estudiada en la unidad 7A. La diferencia es que la cantidad v (en la dependencia en v^2) ahora no es la velocidad de un chorro o de un flujo, sino que una rapidez promedio.

En resumen, la presión es una cantidad escalar, definida como

$$P = \frac{|\vec{F}|}{A},$$

donde \vec{F} es la fuerza que se ejerce sobre una pared de área A . En el sistema internacional de unidades, la presión tiene como unidad el Pascal, definido como

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

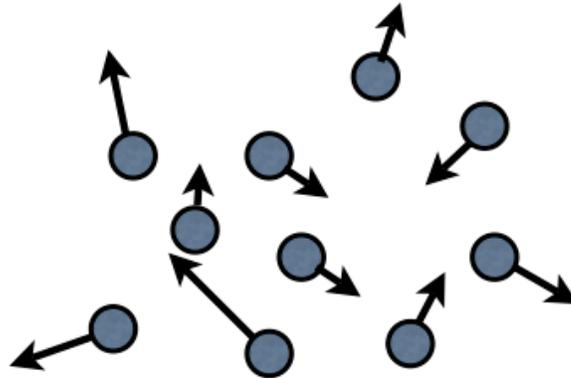


Figura 7B.1: Representación esquemática de un volumen del fluido. Si el promedio de las velocidades es cero, el fluido está en una situación estática. Pero el promedio de la rapidez no es cero. Esto define la temperatura de un fluido, $T \propto \langle v^2 \rangle$.

7B.3. Dependencia de P con la profundidad de un fluido

Es una experiencia común el sentir un aumento de presión en la parte más profunda de una piscina, lo que puede incluso llegar a ser molesto para los oídos. A continuación demostraremos que este aumento de presión es proporcional a la profundidad de un fluido para el caso en que su densidad ρ_f es constante. Consideremos un volumen de fluido, un elemento pequeño comparado con un recipiente pero grande de modo que contiene muchos átomos o moléculas, como el que se muestra en la figura 7B.2. Este elemento de fluido se encuentra en equilibrio mecánico, por lo que la segunda ley de Newton nos dice

$$\sum \vec{F} = 0.$$

En particular consideremos la suma de fuerzas en la dirección vertical:

$$\sum F_y = P \cdot A - P_o \cdot A - Mg = 0,$$

donde P_o es la presión a una profundidad d y P es la presión a una profundidad $d + h$. La masa del elemento de fluido es $M = \rho_f Ah$. Simplificando se obtiene

$$P = P_o + \rho_f gh.$$

Esta ecuación nos dice que la diferencia de presión entre dos profundidades es proporcional a la diferencia de profundidades.

7B.4. Ley de Pascal

Incluso en estado estático, o cuasi-estático, los fluidos pueden ser usados de manera bastante provechosa. Un ejemplo es el uso de una *gata hidráulica*, como la que se muestra en la figura 7B.3. Para explicar su funcionamiento enunciemos la ley de Pascal:

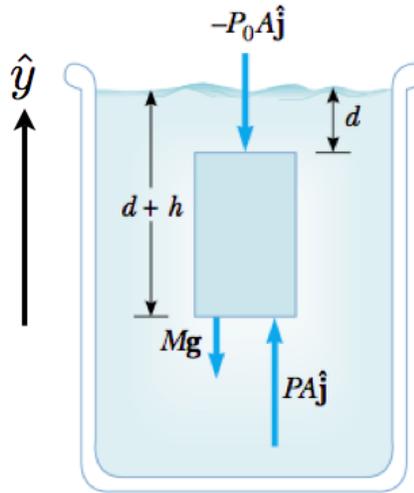


Figura 7B.2: Representación de un volumen de fluido, de altura h , área A , ubicado a una profundidad d .

Un cambio de presión aplicado a un fluido es transmitido a cada punto del fluido y a las paredes del contenedor.

Consideremos la gata hidráulica de la figura 7B.3. Inicialmente el sistema está en equilibrio. Al aplicar lentamente una fuerza F_1 sobre un pistón de área A_1 se genera un aumento de presión $\Delta P = F_1/A_1$ en el fluido. Por la ley de Pascal, este cambio de presión ocurre en cada punto del fluido y sobre las paredes del contenedor también. Por lo tanto, sobre la superficie A_2 del pistón más grande hay un aumento de presión ΔP , lo que se traduce en una nueva fuerza F_2 , la cual cumple $\Delta P = F_2/A_2$. Finalmente obtenemos

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}.$$

Luego, como $A_1 < A_2$, entonces $F_2 > F_1$. Si la diferencia de áreas es muy grande, entonces la diferencia de fuerzas también lo es. Esto podría parecer violar alguna ley básica de la Física, pero no es así. Hay que tener en cuenta que el volumen de fluido desplazado es el mismo, $A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$. Usando esto en la ecuación anterior, obtenemos $F_1 \Delta x_1 = F_2 \Delta x_2$, lo cual no es nada más que la conservación de energía, pues establece que el trabajo realizado por ambos pistones es igual.

7B.5. Principio de Arquímedes

Un objeto sumergido en un líquido experimenta una fuerza de empuje, la cual tiende a reducir su peso aparente. Esta observación se estampa en el principio de Arquímedes el cual se enuncia de la siguiente manera:

La magnitud de la fuerza de empuje es igual al peso del fluido desplazado por el objeto.

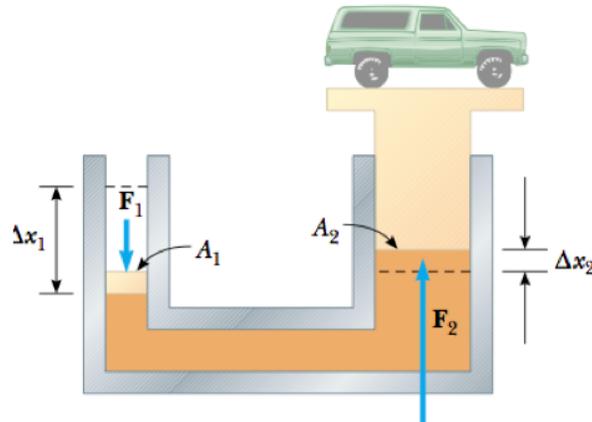


Figura 7B.3: Esquema del funcionamiento de una gata hidráulica. Un pistón de área pequeña se mueve una distancia Δx_1 debido a una fuerza F_1 . Gracias a este movimiento, un pistón de área más grande A_2 se desplaza una distancia x_2 ejerciendo el fluido una fuerza F_2 sobre el pistón.

Luego, si un objeto sumergido desplaza una masa M del líquido, el empuje que experimenta el objeto es $E = Mg$. Esta fuerza de empuje siempre es en sentido contrario al del peso del objeto, y por lo tanto reduce el peso aparente de éste. Atención que esta masa es la del líquido, no la del objeto. Escribiendo lo mismo de otra manera obtenemos

$$E = \rho_f V_o g,$$

donde ρ_f es la densidad de fluido y V_o el volumen del objeto. Si no hay más fuerzas presentes, la ecuación de Newton resulta

$$M_o \vec{a} = E \hat{y} - M_o g \hat{y}$$

donde M_o es la masa del objeto. La aceleración es $\vec{a} = a_y \hat{y}$ y su signo depende de la diferencia de densidades del objeto con el fluido: $a_y = (\rho_f - \rho_o)g / \rho_o$, donde ρ_o es la densidad del objeto. Así, un objeto más denso que el fluido tendrá una aceleración negativa, en el mismo sentido que la gravedad, y se hundirá. En cambio, un objeto de densidad menor al del fluido, tendrá una aceleración positiva y flotará.

En el caso que un objeto flote, determinemos el volumen del objeto que está sumergido con respecto al volumen total del objeto. La fuerza de empuje será en este caso $E = \rho_f g V_s$, donde V_s es el volumen del objeto que está sumergido. El peso del objeto es $M_o g = \rho_o V_o g$. En equilibrio estas fuerzas son iguales, por lo tanto

$$\frac{V_s}{V_o} = \frac{\rho_o}{\rho_f}.$$

Este resultado dice que si la densidad de objeto es similar a la del fluido, entonces, gran parte de su volumen se encontrará sumergido. Un caso a considerar es el de un cubo de hielo de agua sumergido en agua. Siendo las densidades $\rho_o = 917 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$, ¿cuál es el porcentaje del cubo que se encuentra sumergido?

7B.6. Preguntas conceptuales

Pregunta 1: Enuncie el principio de Arquímedes y dé un ejemplo de su aplicación.

Pregunta 2: Explique por qué en un fluido la presión varía con la profundidad (o altura).

Pregunta 3: Determinar la fracción del volumen bajo la superficie del agua de un pedazo de hielo que flota en equilibrio. La densidad del hielo es 917 kg/m^3 . Justificar.

Pregunta 4: Dos vasos idénticos están llenos de agua hasta el mismo nivel. En uno de los vasos flotan cubos de hielo. ¿Cuál vaso pesa más? Justificar.

Pregunta 5: Un barco de 200 toneladas ingresa a un compartimiento cerrado del canal de Panamá. El barco es grande de modo que el agua que lo rodea al interior del compartimiento tiene menos de 200 toneladas. ¿Puede flotar el barco en dicho compartimiento? ¿Por qué?