# Control 2

**Profesora**: Ángela Flores
**Auxiliares**: Felipe Keim
**Ayudantes**: Byron Castro, Diego Gonzalez, Miguel Ramírez.

**Pregunta III (10/30)**

**a.-** (7 puntos) Resolver el siguiente problema utilizando el algoritmo de Branch & Bound.

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2\} \\ & x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \{1,2\} \end{aligned}$$

Indicaciones:

- Utilice la formulación clásica del algoritmo *Branch & Bound*. Es decir, calcule la cota inferior de cada subproblema como el valor objetivo de su relajación lineal **(5 problemas: 1 puntos por resolver cada uno y 0.25 puntos por ramificación (2 ramificaciones))**.
- Se recomienda utilizar el método gráfico para resolver la relajación lineal de los subproblemas obtenidos.
- Para cada subproblema, calcular la cota superior $U$ e inferior $L$**(0.2 puntos por calcular la cota luego de resolver cada subproblema)**.
- Al finalizar, concluya sobre la condición de termino que aplicó y la razón por la que la solución encontrada es óptima **(0.5 puntos)**.
- Se recomienda utilizar el método gráfico para resolver la relajación lineal de los subproblemas obtenidos.
- En cada partición obtenida, se recomienda comenzar con el subproblema formado al incluir la restricción de la forma $x \leq a$.

A pesar que es posible resolver los problemas lineales del algoritmo Branch & Bound utilizando Simplex, es más rápido y simple utilizar el método gráfico. De cualquier forma, no se descontará puntaje a los alumnos que resuelvan el problema utilizando Simplex.

Para comenzar con el algoritmo de Branch & Bound, se inicializa los valores de la cota inferior y superior $L = -\infty$ y $U = +\infty$ respectivamente. En la figura 1 se presenta el conjunto factible del problema relajado linealmente y su óptimo. Se observa que el mínimo se alcanza en $x = (3.5, 3)$ y corresponde a $z = -9.5$.

Dado que se tiene una solución no entera en la segunda componente, se elige $x_1$ para particionar el conjunto factible. Además, no es posible actualizar la cota superior ($U = +\infty$) por esta misma razón, pero se actualiza $L = -9.5$.

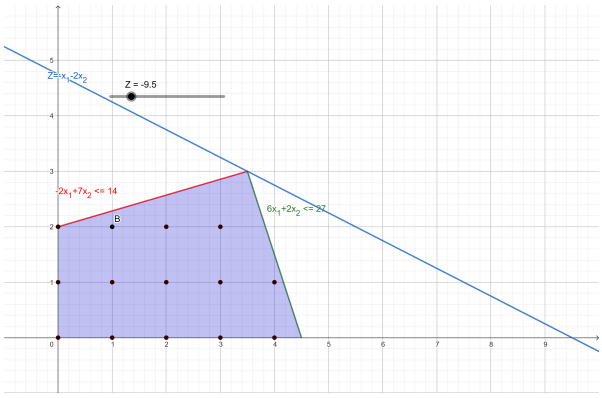



Figura 1: Representación gráfica para problema original con relajación lineal.

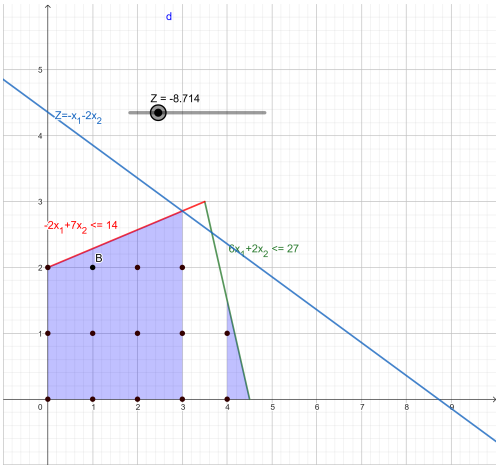
Los subproblemas resultantes (relajando linealmente) corresponden a:

$$
\begin{aligned}
P_1 = \min \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & -2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 27 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \\
& x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \{1, 2\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

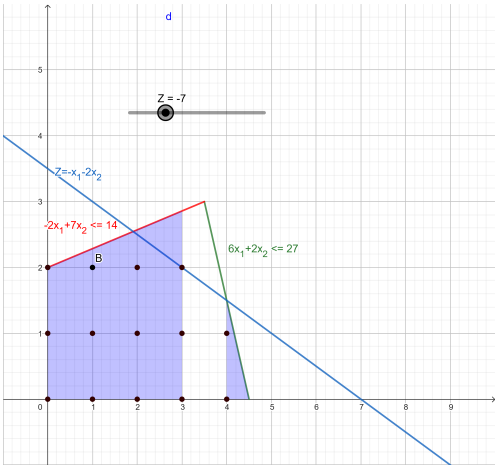
$$
\begin{aligned}
P_2 = \min \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & -2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 27 \\
& x_1 \geq 4 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \\
& x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \{1, 2\}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Resolviendo la relajación lineal $P_1$ (ver figura 2.a), se obtiene el valor óptimo de este problema es $x^* = (3, \frac{20}{7})$ con un valor de la función objetivo igual a $z_{P1} = -\frac{61}{7}$. Aún así, dado que todavía no se tiene una solución $x^*$ entera, no es posible actualizar la cota superior ($U = +\infty$) y la cota inferior se mantiene.

Por otra parte, se realiza el mismo procedimiento para $P_2$. Donde se obtiene que el valor óptimo de este problema es $x^* = (4, 1.5)$ con un valor de la función objetivo igual a $z_{P2} = -7$. Aún así, dado que todavía no se tiene una solución $x^*$ entera, no es posible actualizar la cota superior ($U = +\infty$).




(a) Resolución de $P_1$.




(b) Resolución de $P_2$.

Figura 2: Resolución de conjuntos $P_1$ y $P_2$ (sombreado izquierda y derecha respectivamente).

Siguiendo con el algoritmo. $P_1$ no satisface la restricción de variables enteras, por lo que se efectúa una nueva ramificación respecto a la variable $x_2$, que tiene el valor $\frac{20}{7}$, generándose dos nuevos problemas:

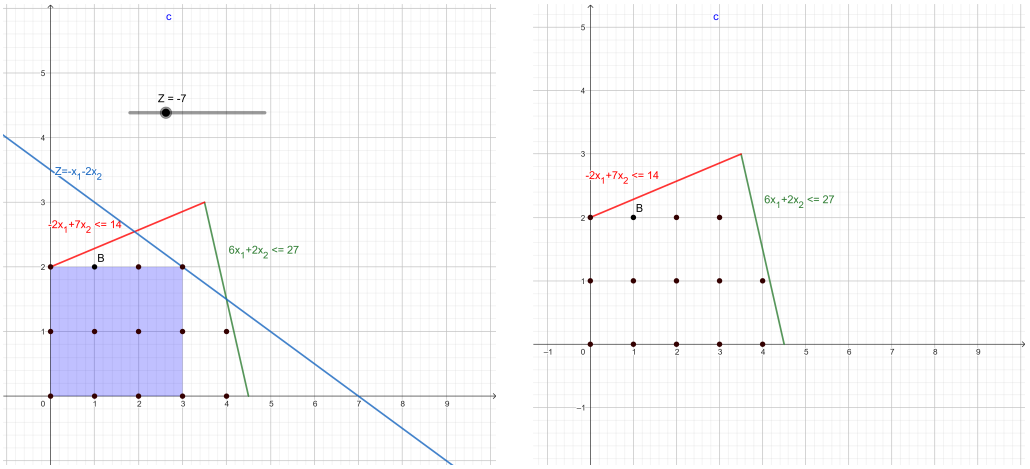
- $P_3$: Problema resultante en agregar $x_2 \leq 2$ a $P_1$.
- $P_4$: Problema resultante en agregar $x_2 \geq 3$ a $P_1$.

$$
\begin{aligned}
P_3 = \min \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & -2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 27 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2\} \\
& x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \{1,2\}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
P_4 = \min \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & -2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 27 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_2 \geq 3 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2\} \\
& x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \{1,2\}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

En la figura 3.a, se tiene que en la resolución de $P_3$ el valor óptimo es el punto $x^* = (3,2)$ dejando un valor de la función objetivo igual a $z_{P3} = -7$, de modo que se actualiza el valor del limite superior $U = -7$, y se poda este nodo por la integridad de las variables ($x_1$ y $x_2$ son enteros). Por otro lado, se poda por cota el problema $P2$.

Ahora bien, considerando $P_4$ (ver figura 3.b), se tiene que este conjunto es infactible debido a que la intersección entre esta nueva restricción y el conjunto original no existe.




(a) Resolución gráfica de $P_3$. (b) Resolución gráfica de $P_4$.

Figura 3: Conjuntos $P_3$ - $P_4$ y resolución gráfica respectiva.

Finalmente, el único sub-conjunto activo es $P_3$, por lo que se actualiza el valor de $L = -7$, dejando como óptimo del problema original $x^* = (3, 2)$ con un valor de la función objetivo igual a $-7$.

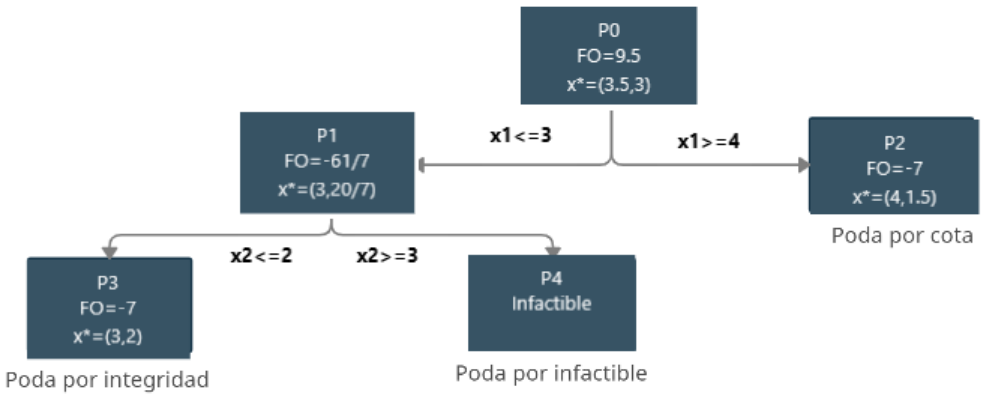



Figura 4: Arbol de enumeración de algoritmo de Branch & Bound.

Respecto a los comentarios sobre la condición de término del problema, existen 2 formas en la que se puede concluir que la solución encontrada es el óptimo del problema discreto original:

- **Gap nulo**: Se puede calcular la cota inferior y superior para mostrar que $U - L = 0$.
- **Comparación:** Luego de resolver todos los subproblemas, la mejor solución **entera** debe ser la solución óptima del problema original.

**b.-** (3 puntos) Para el siguiente problema de optimización, calcule todos los cortes de Gomory que sea posible teniendo en cuenta el tableau óptimo de la Tabla 1. Adicionalmente, verifique que se reduce el conjunto factible de la relajación lineal del problema pero no el del problema entero original.

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ & -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2\} \\ & x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \{1,2\} \end{aligned}$$

Tabla 1: Tableau óptimo.

| | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 95/5 | 0 | 0 | 5/3 | 1/3 |
| 13/3 | 1 | 0 | 1/3 | -1/3 |
| 28/3 | 0 | 1 | 1/3 | 2/3 |

A partir del tableau, se tienen las variables básicas de la relajación lineal del problema, como ambas son no enteras se deben construir dos corte de Gomory.

$$\begin{aligned} x_i + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor \cdot x_j &\leq \lfloor \bar{a}_{i0} \rfloor \\ x_1 + \lfloor \bar{a}_{13} \rfloor \cdot s_1 + \lfloor \bar{a}_{14} \rfloor \cdot s_2 &\leq \lfloor 13/3 \rfloor \\ x_2 + \lfloor 1/3 \rfloor \cdot s_1 + \lfloor -1/3 \rfloor \cdot s_2 &\leq \lfloor 13/3 \rfloor \\ x_1 - s_2 &\leq 4 \\ x_2 + \lfloor \bar{a}_{23} \rfloor \cdot s_1 + \lfloor \bar{a}_{24} \rfloor \cdot s_2 &\leq \lfloor 13/3 \rfloor \\ x_2 + \lfloor 1/3 \rfloor \cdot s_1 + \lfloor 2/3 \rfloor \cdot s_2 &\leq \lfloor 28/3 \rfloor \\ x_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

Se trabaja el primer corte para dejarlo en función de $x_1$ y $x_2$. Donde $s_2 = 5 + x_1 - x_2$, lo que reemplazando deja el siguiente corte $\rightarrow x_2 \leq 9$, lo que da igual al segundo corte, por lo que solo existirá un corte de gomory.

En la figura 5 se comprueba que el corte reduce el conjunto factible del problema relajado, pero no el del problema discreto original ya que sobre $x_2 = 9$ no hay soluciones enteras factibles.

- **1 punto por calcular correctamente el corte de Gomory (ambos).**
- **1 puntos por comprobar que el corte no reduce el conjunto factible del problema original.**

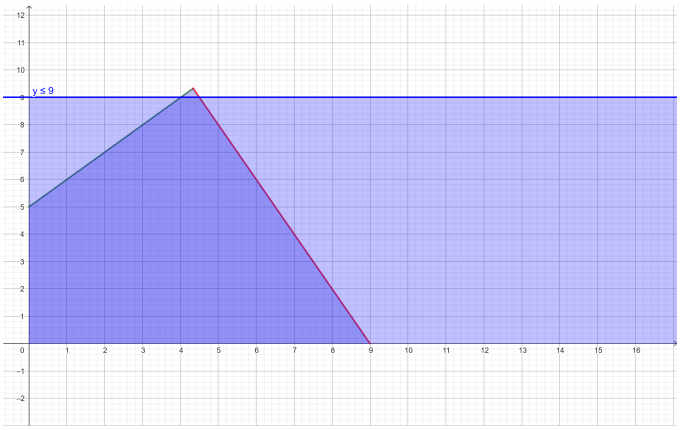



Figura 5: Conjunto factible incorporando el corte de Gomory.