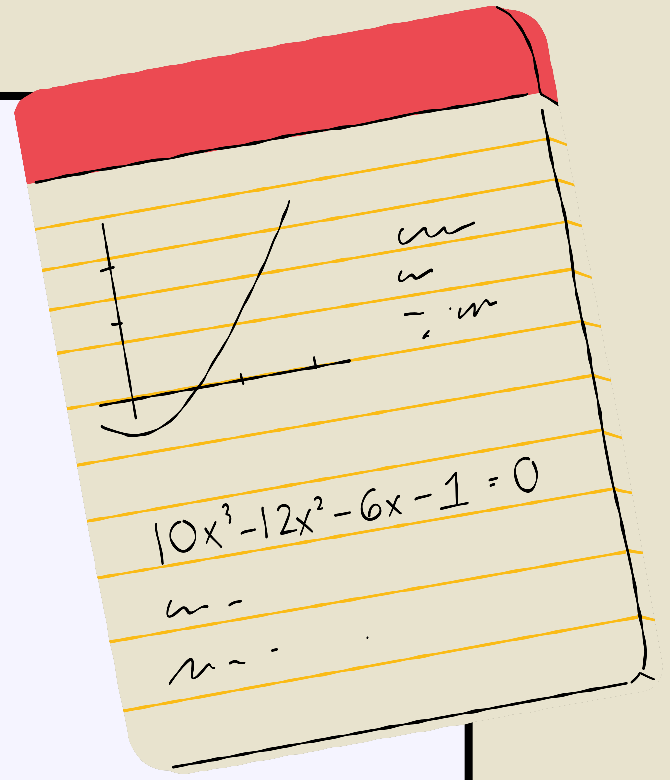
Auxiliar #7

Dualidad de problemas lineales



Resumen

Definición: problema dual

$$
\begin{array}{lrl}
\min & c^\top x & \\
\text{sujeto a} & a_i^\top x \geq b_i & i \in M_1 \\
& a_i^\top x \leq b_i & i \in M_2 \\
& a_i^\top x = b_i & i \in M_3 \\
& x_j \geq 0 & j \in N_1 \\
& x_j \leq 0 & j \in N_2 \\
& x_j \text{ libre} & j \in N_3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lrl}
\max & p^\top b & \\
\text{sujeto a} & p_i \geq 0 & i \in M_1 \\
& p_i \leq 0 & i \in M_2 \\
& p_i \text{ libre} & i \in M_3 \\
& p^\top A_j \leq c_j & j \in N_1 \\
& p^\top A_j \geq c_j & j \in N_2 \\
& p^\top A_j = c_j & j \in N_3
\end{array}
$$

Al revés para primal de maximización.

Resumen

Propiedades

- Dual de un dual es el primal.

- Primales equivalentes poseen duales equivalentes.

- Dualidad débil: x, p solución factible del primal y dual respectivamente, entonces:

$$p^T b \leq c^T x$$

Al revés para primal de maximización.

- Dualidad fuerte: x, p soluciones óptimas del primal y dual respectivamente, entonces:

$$p^T b = c^T x$$

Resumen

Posibilidades del par primal/dual

	Óptimo finito	No acotado	Infactible
Óptimo finito	Posible	Imposible	Imposible
No acotado	Imposible	Imposible	Posible
Infactible	Imposible	Posible	Posible

Resumen

Holgura complementaria:

Sean *x*, *p* soluciones factibles del primal y dual. Estas son soluciones óptimas para sus problemas si y solo si:

$$p_i \cdot (a_i^T x - b_i) = 0, \qquad \forall i$$
$$\left(c_j - p^T A_j\right) \cdot x_j = 0, \qquad \forall j$$

Si una restricción del primal no está activa, esta se puede descartar del problema y el dual es cero.

Dada una solución del primal no degenerada, se puede determinar una solución del dual única.

Preguntas

Pregunta I - Holgura Complementaria

Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^2} \ & 15x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t. } & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 \leq^3 /_2 \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 14 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Calcule el dual de este problema. Vuelva a calcular el dual del problema obtenido. ¿Qué se puede comentar al respecto?
2. Muestre que el punto óptimo $x^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ es una solución factible del problema primal.
3. Proponga un punto p^* en el problema dual, que junto con x^* cumplan con las hipótesis del Teorema de Holgura Complementaria.
4. Concluya que ambos puntos son soluciones óptimas del problema primal y dual respectivamente.
5. Ahora considere el punto $x^* = \left(1, \frac{5}{2}\right)$. Muestre que es una SBF, encuentre un punto p^* del problema dual asociado y muestre que x^* no es óptimo del problema original.

Preguntas

Pregunta II - Interpretación económica

En una fábrica de lácteos debe asignar cuanto producir de cada lácteo en función de la leche disponible para un determinado periodo de tiempo, por culpa de la capacidad de inventario de leche 8 $[m^3]$. Se conoce que los rendimientos (en $[\frac{m^3}{m^3_{leche}}]$) de producción son del 10 % y del 60 % para el queso y el yogurt respectivamente . La capacidad de almacenamiento de ambos productos es de 1 $[m^3]$ por separado. Finalmente se sabe que por temas de demanda la producción de queso debe ser de al menos 0.7 $[m^3]$.

1. Plantee el modelo del problema de optimización que permita maximizar las utilidades de la fábrica de lácteos, considerando que el precio del queso es de 15 $[\frac{\$}{m^3}]$ y su costo de producción es de 3 $[\frac{\$}{m^3}]$, y el precio del yogurt es de 4 $[\frac{\$}{m^3}]$ y el costo es de 1 $[\frac{\$}{m^3}]$.
2. Escriba el problema de optimización dual del problema formulado.
3. Considerando que la solución del problema primal es $x^* = (0.7, 0.6)$, encontrar la solución del problema de optimización dual p^*.
4. Interprete económicamente cada coeficiente de la solución dual. ¿Qué pasaría si el problema original fuera de minimización?