# Auxiliar 1

**Pauta**

## Pregunta I - PlanSat

Un equipo de investigación de la Universidad de Chile está actualmente trabajando en el desarrollo de un proyecto para enviar un PlanSat al espacio. El objetivo es determinar la cantidad óptima de plantas y agua a enviar en el satélite, con el propósito de minimizar los costos de lanzamiento y asegurar el cumplimiento de las especificaciones técnicas del proyecto.

El satélite tiene una capacidad máxima de carga de $k$ [kg]. Cada planta pesa $w_p$ [kg] y cada litro de agua pesa $w_a$ [kg]. Además, se ha determinado que cada planta ocupa un volumen de $V_p$ $[m^3]$, mientras que un litro de agua requiere un volumen de $V_a$ $[m^3]$. La capacidad total del compartimento del PlanSat está limitada a $V$ $[m^3]$. Cada planta necesita un suministro constante de $l$ litros de agua para sobrevivir durante el período de la misión. El costo asociado con el envío y el mantenimiento de cada planta es de $c_p$ [unidad monetaria], y el costo de transportar un litro de agua es de $c_a$ [unidad monetaria por litro].

Formule el problema de optimización que permita resolver eficientemente el desafío planteado.

**R:**

Un problema de optimización cuenta con cuatro componentes principales: variables de decisión, función objetivo, restricciones y parámetros. A continuación se plantean las cuatro componentes para el problema.

- **Parámetros:**

  Los parámetros corresponden a los datos del problema. Recordar que no se toma una decisión de su valor, sino que estos tienen un valor fijo (y entregado en el enunciado del problema).

  - Pesos de los elementos: $w_p$ y $w_a$.
  - Volúmenes de los compartimientos: $V_p$ y $V_a$.
  - Capacidad de peso y de volumen: $k$ y $V$.
  - Volumen de agua requerido por cada planta: $l$.
  - Costos de llevar cada elemento: $c_p$ y $c_a$.

- **Variables de decisión:**

  Las variables de decisión corresponden a las variables del problema de optimización, es decir, las variables cuyo valor se debe decidir. Estas variables son centrales para modelar el problema por lo que se deben definir claramente. En este caso se puede modelar el problema con dos variables: el número de plantas y la cantidad de agua a enviar.

- $p$: Número de plantas a enviar en el PlanSat.
- $a$: Cantidad de agua en litros a enviar en el PlanSat.

- **Función objetivo:**

  La función objetivo es una función que toma valores en los reales y permite cuantificar qué tan óptimas son las soluciones de un problema de optimización. En el problema se desea minimizar el costo por lo que se calcula el costo de enviar $p$ plantas y $a$ litros de agua.

$$f.o. = p \cdot c_p + a \cdot c_a \tag{1}$$

- **Restricciones:**

  - En primer lugar se debe satisfacer las condiciones de peso y de volumen, de forma que el peso y volumen total debe ser menor a los límites:

$$p \cdot w_p + a \cdot w_a \leq k, \text{Restricción de peso}$$
$$p \cdot V_p + a \cdot V_a \leq V, \text{Restricción de volumen}$$

  - Cada planta requiere al menos una cantidad de $l$ litros de agua:

$$a \leq l \cdot p, \text{Restricción cantidad de agua}$$

  - Para completar el proyecto se requiere enviar al menos una planta:

$$p \geq 1, \text{Restricción de enviar una planta}$$

  - Finalmente existen las restricciones del espacio en el que se encuentran las variables, donde la cantidad $p$ de plantas es un número natural y la cantidad de agua debe ser positiva:

$$p \in \mathbb{N}$$
$$a \geq 0$$

Así, el problema queda:

$$\begin{aligned}
\min_{p,a} \quad & p \cdot c_p + a \cdot c_a \\
\text{s.t. } & p \cdot w_p + a \cdot w_a \leq k \\
& p \cdot V_p + a \cdot V_a \leq V \\
& a \leq l \cdot p \\
& p \geq 1 \\
& p \in \mathbb{N} \\
& a \geq 0
\end{aligned}$$

### Pregunta II - Despacho económico

Considere el Sistema Eléctrico de Potencia que se muestra en la Figura 1. En el problema de despacho económico de un SEP, se busca determinar la potencia generada por todas las unidades de generación de manera que se minimicen los costos, garantizando al mismo tiempo el suministro de energía a cada barra (nodo) y el cumplimiento de los límites técnicos del sistema.

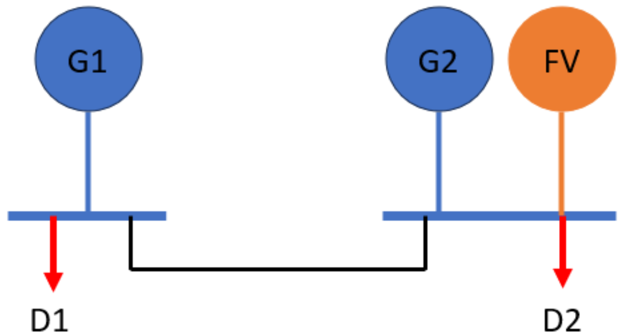


Figura 1: Representación del Sistema Eléctrico de Potencia (SEP)

La Tabla 1 presenta los límites de generación mínima y máxima de las tres unidades de generación:

Tabla 1: Límites de generación de las unidades del SEP

| Central | $P_{\text{min}}$ [MW] | $P_{\text{max}}$ [MW] |
|---|---|---|
| G1 | 200 | 500 |
| G2 | 150 | 550 |
| FV | 0 | 600 |

Además, las funciones de costos de G1 y G2 están definidas por:

$$C(P_{G1}) = 400 + 10P_{G1} + 0.003P_{G1}^2 \, [\text{USD/h}] \tag{2}$$

$$C(P_{G2}) = 300 + 12P_{G2} + 0.001P_{G2}^2 \, [\text{USD/h}] \tag{3}$$

Las demandas en las barras 1 y 2 corresponden a 800 [MW] y 400 [MW] respectivamente. Es importante considerar que existe un límite de transmisión de 300 [MW] en la línea que conecta las barras y que existen pérdidas de potencia dependientes del flujo transmitido, representadas por:

$$P_p = 0.00005F_L^2 \, [\text{MW}] \tag{4}$$

Donde $F_L$ es el flujo de potencia en la línea. Se solicita determinar la dirección del flujo de potencia y plantear el problema de optimización completo, incluyendo todas sus componentes, en función de lo expuesto anteriormente.

**R:**

En primer lugar se debe notar que la unidad fotovoltaica no tiene costos de operación (pues se genera a partir de la energía del sol que es gratuita). De esta forma en el óptimo esta unidad generará a su máximo técnico ($600[MW]$). Como la demanda en la barra 2 es menor a la generación fotovoltaica, el flujo de potencia se dirigirá en sentido a la barra 1.

Se modela el problema de optimización con sus cuatro componentes:

- **Parámetros:**
  - Potencias mínimas: 200 [MW], 150 [MW] y 0.
  - Potencias máximas: 500 [MW], 550 [MW] y 600 [MW].
  - Costos de operación G1: $\alpha_1 = 400$, $\beta_1 = 10$ y $\gamma_1 = 0.003$.
  - Costos de operación G1: $\alpha_2 = 300$, $\beta_2 = 12$ y $\gamma_2 = 0.001$.
  - Demandas de las barras: 800 [MW] y 400 [MW].
  - Límite de transmisión: 300 [MW].
- **Variables de decisión:**

  En un problema de despacho económico la decisión se realiza en la generación de las unidades. También se define el flujo que va desde una barra a la otra.
  - $P_{G1}$: Generación unidad 1.
  - $P_{G2}$: Generación unidad 2.
  - $P_{FV}$: Generación unidad fotovoltaica.
  - $F$: Flujo de potencia desde barra 2 hacia 1.
- **Función objetivo:**

  Se busca minimizar los costos de operación, de forma que la función objetivo corresponderá a la suma de las funciones de costo de las unidades.

$$f.o. = C(P_{G1}) + C(P_{G2}) = 400 + 10P_{G1} + 0.003P_{G1}^2 + 300 + 12P_{G2} + 0.001P_{G2}^2$$

- **Restricciones:**
  - Se tiene que cumplir exactamente la demanda en ambas barras. Para esto hay que considerar que el flujo va en dirección a la barra 1 y que existen pérdidas de potencia:

$$P_{G1} + F - P_p = P_{G1} + F - 0.00005F_L^2 = D_1$$

$$P_{G2} + P_{FV} - F = D_2$$

  - Se deben satisfacer las restricciones de capacidad de las unidades:

$$200 \leq P_{G1} \leq 500$$

$$150 \leq P_{G2} \leq 550$$

$$0 \leq P_{FV} \leq 600$$

– Finalmente, el flujo no debe superar su capacidad máxima y debe ser positivo:

$$0 \leq F \leq 300$$

Así, el problema de optimización queda:

$$\begin{aligned}
\min_{P_{G1},P_{G2},P_{FV}} \quad & 700 + 10P_{G1} + 0.003P_{G1}^2 + 12P_{G2} + 0.001P_{G2}^2 \\
\text{s.t.}\ P_{G1} + F - P_p = P_{G1} + F - 0.00005F_L^2 &= D_1 \\
P_{G2} + P_{FV} - F &= D_2 \\
P_{G1} &\geq 200 \\
P_{G1} &\leq 500 \\
P_{G2} &\geq 150 \\
P_{G2} &\leq 550 \\
P_{FV} &\geq 0 \\
P_{FV} &\leq 600 \\
F &\leq 300 \\
F &\geq 0
\end{aligned}$$

**Pregunta III - Localización de instalaciones de telecomunicaciones**

Una empresa de telecomunicaciones tiene la intención de iniciar sus operaciones en Santiago, ofreciendo servicios de conexión mediante fibra óptica a ocho comunas de la ciudad. El objetivo es planificar la construcción de centros de datos y redes para minimizar los costos de inversión. Con este fin, se contempla la construcción de $n$ centros en $n$ de las comunas a atender, cuyas demandas se detallan en la Tabla 2.

Tabla 2: Demandas de las comunas

| **Comuna** | **Demanda** | **Comuna** | **Demanda** |
|---|---|---|---|
| El Bosque | 40626 | Maipú | 130406 |
| Independencia | 25070 | Ñuñoa | 67153 |
| La Florida | 91729 | Providencia | 44399 |
| Las Condes | 92136 | Quilicura | 56602 |

Por otro lado, los costos por unidad de flujo en \$/flujo para la conexión entre los centros y las comunas se indican en la siguiente Tabla 3.

Tabla 3: Costos de transporte entre comunas

| **Comuna** | El Bosque | Independencia | La Florida | Las Condes | Maipú | Ñuñoa | Providencia | Quilicura |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| El Bosque | 1.0 | 3.3 | 2.1 | 4.3 | 1.5 | 3.9 | 4.1 | 3.5 |
| Independencia | 3.3 | 1.0 | 2.2 | 2.0 | 2.8 | 1.6 | 1.8 | 1.2 |
| La Florida | 2.1 | 2.2 | 1.0 | 3.2 | 1.6 | 2.8 | 3.0 | 2.4 |
| Las Condes | 4.3 | 2.0 | 3.2 | 1.0 | 3.8 | 1.4 | 1.2 | 1.8 |
| Maipú | 1.5 | 2.8 | 1.6 | 3.8 | 1.0 | 3.4 | 3.6 | 3.0 |
| Ñuñoa | 3.9 | 1.6 | 2.8 | 1.4 | 3.4 | 1.0 | 1.2 | 1.4 |
| Providencia | 4.1 | 1.8 | 3.0 | 1.2 | 3.6 | 1.2 | 1.0 | 1.6 |
| Quilicura | 3.5 | 1.2 | 2.4 | 1.8 | 3.0 | 1.4 | 1.6 | 1.0 |

Se solicita modelar el problema de optimización para los siguientes casos:

a) Cada comuna debe estar conectada a un único centro de datos, y la cantidad total de centros de datos es igual a 3.

b) La construcción de un centro de datos tiene un costo de \$5, y la empresa debe determinar el número óptimo de centros de datos a construir.

c) Ahora cada comuna puede estar conectada a múltiples centros de datos, permitiendo el abastecimiento de su demanda desde varios centros.

**R:**

a)
- **Parámetros:**
  - Demandas de las comunas: $d_i, \quad i \in \{1, ..., 8\}$
  - Costos de transmisión: $c_{i,j}, \quad i, j \in \{1, ..., 8\}$
  - Número de centrales: $n = 3$
- **Variables de decisión:**

  Se utilizan dos variables binarias para modelar el problema. La primera $x_{i,j}$ que modela si una comuna $i$ se conecta a un centro de datos $j$, y la segunda $y_j$ que modela si se construye un centro de datos en la comuna $j$.

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Si se conecta comuna } i \text{ con el centro en } j. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se construye centro de datos en } j. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Función objetivo:**
  Se deben sumar los costos por transmisión multiplicado por las demandas (puesto que los costos entregados son por unidad de flujo). Además se multiplica por la variable binaria $x_{i,j}$ para sumar solo las conexiones elegidas.

$$\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} c_{i,j} \cdot d_j \cdot x_{ij}$$

- **Restricciones:**
  - Se deben tener tres centros construidos:

$$\sum_{j=1}^{8} y_j = 3$$

  - Cada comuna debe estar conectada a un único centro (notar que se debe sumar en los centros):

$$\sum_{j=1}^{8} x_{i,j} = 1, \forall i \in \{1, ..., 8\}$$

  - Si no hay un centro construido en $j$ ($y_j = 0$), entonces no puede existir una conexión entre una comuna y $j$ ($x_{i,j} = 0$):

$$x_{i,j} \leq y_j, \forall i, j \in \{1, ..., 8\}$$

  - Ambas variables son binarias:

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}$$

$$y_j \in \{0, 1\}$$

Así, el problema de optimización queda:

$$
\begin{aligned}
\min_{x_{i,j}, y_j} \quad & \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} c_{i,j} \cdot d_j \cdot x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{8} y_j = 3 \\
& \sum_{j=1}^{8} x_{i,j} = 1, \forall i \in \{1, ..., 8\} \\
& x_{i,j} \leq y_j, \forall i, j \in \{1, ..., 8\} \\
& x_{i,j} \in \{0, 1\} \\
& y_j \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

b) En esta caso la modelación es similar, pero $n$ ya no es un parámetro sino que una variable de decisión. Existe un nuevo parámetro que corresponde al costo de construir un centro. La función objetivo incluye el costo de construir cada centro y se agregar la restricción de que la suma de centros sea igual a n.

- **Parámetros:**
  - Demandas de las comunas: $d_i, \quad i \in \{1, ..., 8\}$
  - Costos de transmisión: $c_{i,j}, \quad i, j \in \{1, ..., 8\}$
  - Costo de construir una central: $c = 3$
- **Variables de decisión:**

$$
x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Si se conecta comuna } i \text{ con el centro en } j. \\ 0 & \sim \end{cases}
$$

$$
y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se construye centro de datos en } j. \\ 0 & \sim \end{cases}
$$

$n$: número de centrales a construir.

- **Función objetivo:**
  Se suma el término que incluye el costo por construir una central.

$$
\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} c_{i,j} \cdot d_j \cdot x_{ij} + \sum_{j=1}^{8} 3 \cdot y_j
$$

- **Restricciones:**
  - Se deben tener n centros construidos:

$$
\sum_{j=1}^{8} y_j = n
$$

- Cada comuna debe estar conectada a un único centro:

$$\sum_{j=1}^{8} x_{i,j} = 1, \forall i \in \{1, ..., 8\}$$

- Si no hay un centro construido en $j$ ($y_j = 0$), entonces no puede existir una conexión entre una comuna y $j$ ($x_{i,j} = 0$):

$$x_{i,j} \leq y_j, \forall i, j \in \{1, ..., 8\}$$

- Ambas variables son binarias:

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}$$
$$y_j \in \{0, 1\}$$

- El número de centros de datos debe estar entre 1 y 8:

$$n \in \{1, ..., 8\}$$

Así, el problema de optimización queda:

$$\begin{aligned}
\min_{x_{i,j}, y_j, n} \quad & \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} c_{i,j} \cdot d_j \cdot x_{ij} + \sum_{j=1}^{8} 3 \cdot y_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{8} y_j = n \\
& \sum_{j=1}^{8} x_{i,j} = 1, \forall i \in \{1, ..., 8\} \\
& x_{i,j} \leq y_j, \forall i, j \in \{1, ..., 8\} \\
& x_{i,j} \in \{0, 1\} \\
& y_j \in \{0, 1\} \\
& n \ \in \{1, ..., 8\}
\end{aligned}$$

c) Finalmente para este caso se debe agregar una nueva variable de decisión que corresponde al flujo de datos que se envía desde cada centro a las distintas comunas. La función objetivo debe incorporar esto y se modifican algunas restricciones.

- **Parámetros:**
  - Demandas de las comunas: $d_i, \quad i \in \{1, ..., 8\}$
  - Costos de transmisión: $c_{i,j}, \quad i, j \in \{1, ..., 8\}$
  - Costo de construir una central: $c = 3$
- **Variables de decisión:**

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Si se conecta comuna } i \text{ con el centro en } j. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se construye centro de datos en } j. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$n$: número de centrales a construir.

$f_{i,j}$: Flujo de datos entre comuna $i$ y centro $j$.

- **Función objetivo:**
  Los costos en este caso se deben multiplicar por el flujo de datos:

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} c_{i,j} \cdot f_{i,j} + \sum_{j=1}^{8} 3 \cdot y_j$$

- **Restricciones:**
  Notar que ya no aparece la restricción de que cada comuna está conectada a un único centro de datos.
  - Se deben tener n centros construidos:

$$\sum_{j=1}^{8} y_j = n$$

  - Si no hay un centro construido en $j$ ($y_j = 0$), entonces no puede existir una conexión entre una comuna y $j$ ($x_{i,j} = 0$):

$$x_{i,j} \leq y_j, \forall i, j \in \{1, ..., 8\}$$

  - Ambas variables son binarias:

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}$$

$$y_j \in \{0, 1\}$$

  - El número de centros de datos debe estar entre 1 y 8:

$$n \in \{1, ..., 8\}$$

  - La suma de los flujos desde todos los centros de datos hacia cada comuna debe ser igual a su demanda:

$$\sum_{j=1}^{8} f_{i,j} = d_i, \forall i \in \{1, ..., 8\}$$

  - Si un centro no está construido ($y_j = 0$) no puede enviar flujo de datos ($f_{i,j} = 0$). Multiplicamos la variable binaria por un número suficientemente grande M.

$$f_{i,j} \leq y_j \cdot M, \forall i, j \in \{1, ..., 8\}$$

  - Si no hay conexión entre una comuna $i$ y un centro $j$, entonces no puede existir flujo de datos:

$$f_{i,j} \leq x_{i,j} \cdot M, \forall i, j \in \{1, ..., 8\}$$

Así, el problema de optimización queda:

$$
\begin{aligned}
\min_{x_{i,j}, y_j, n, f_{i,j}} \quad & \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} c_{i,j}\cdot f_{i,j} + \sum_{j=1}^{8} 3\cdot y_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{8} y_j = n \\
& x_{i,j} \leq y_j, \forall i, j \in \{1, ..., 8\} \\
& x_{i,j} \in \{0,1\} \\
& y_j \in \{0,1\} \\
& n \in \{1, ..., 8\} \\
& \sum_{j=1}^{8} f_{i,j} = d_i, \forall i \in \{1, ..., 8\} \\
& f_{i,j} \leq y_j \cdot M, \forall i, j \in \{1, ..., 8\} \\
& f_{i,j} \leq x_{i,j} \cdot M, \forall i, j \in \{1, ..., 8\}
\end{aligned}
$$