



Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103) Control 1

Prof. Tomás Cassanelli

Prof. Aux. Erik Sáez

Tiempo: 10:15 to 11:45

Primavera 2023

Puntos: 30

Nombre:

Responda una pregunta **por hoja**. Favor **no olvidar** escribir su nombre. Para cantidades vectoriales (usualmente definidas como $\mathbf{A}$ en clase), favor usar flecha $\vec{A}$ para indicar que son vectores y sin flecha para escalares $A \equiv \|\vec{A}\|$, y para matrices $[A]$ usar corchetes.

1. Preguntas de contenido:

- (a) [2 puntos] Explique brevemente la diferencia entre un medio lineal y uno no lineal.
- (b) [2 puntos] Explique por qué a mayor temperatura un material conductor, por lo general, presenta una mayor resistividad.
- (c) [2 puntos] Escriba el set de las ecuaciones de Maxwell (ecuaciones i, ii, iii y iv) en términos de las variables armónicas y con solo dos variables electromagnéticas.
- (d) [2 puntos] El método de diferencias finitas (FDM) presenta dos tipos de errores, el de redondeo y el de discretización. Explique brevemente cada uno de estos errores y cómo se propagan en conjunto.
- (e) [2 puntos] Una esfera conductora de radio R está conectada a tierra. A una distancia $r_a > R$ se ubica una carga. Entonces, ¿Cuál es el potencial escalar eléctrico $V(\mathbf{r})$?
- (f) [1 puntos bonus] ¿Cuál es el orden del campo magnético de la Tierra?
- (g) [1 puntos bonus] Soluciones con simetría esférica, por lo general contienen a los llamados polinomios de Legendre. Entonces escriba $P_l(x)$ y para sus primeros valores $l = 0, 1, 2, 3$.
- (h) [1 puntos bonus] Un dipolo eléctrico (dos cargas iguales, y opuestas separadas a una distancia d) es usado como modelo básico para propiedades de polarización. ¿Cuál es la dependencia radial del campo eléctrico generado por un dipolo eléctrico?

Solución:

- (a) Un medio lineal es el cual cumple con una ecuación de la forma:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1)$$

es decir el cambio o rate está dado simplemente por una constante, en este caso ϵ , y la ley no depende de la magnitud del campo eléctrico. En un medio no lineal (*nonlinear media*) pueden existir términos cuadráticos y más complejos. Este dominio de la ciencia se le llama *nonlinear optics* (en el caso del electromagnetismo).

- (b) Desde un punto de vista microscópico, la resistividad es la medida de la dificultad que tienen los electrones para moverse a través de un material. A mayor temperatura, los electrones tienen mayor energía cinética (data por la distribución de Maxwell Boltzmann),

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

por lo que chocan más con los átomos del material, dificultando así el desplazamiento de corriente, que como sabemos, está dado por la movilidad eléctrica,

$$\mu = \frac{q\ell}{m^*v_d}.$$

Este set de ecuaciones puede ser aproximado para efectos macroscópicos de materiales (lineales) mediante el coeficiente de temperatura de resistividad α ,

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)].$$

- (c) Las ecuaciones de Maxwell con términos armónicos son:

(i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho$ (Ley de Gauss)

(ii) $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ (Sin nombre)

(iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -j\mu\omega\mathbf{H}$ (Ley de Faraday)

(iv) $\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\epsilon\omega) \mathbf{E}$ (Ley de Ampère + corrección de Maxwell)

- (d) El error de redondeo y error de discretización de un material está descrito gráficamente en figura 1. El error total, dado por la curva sólida, es la propagación del error, es decir:

$$\delta z = \delta x + \delta y,$$

δx y δy los errores de redondeo y de discretización, respectivamente. La curva nos dice que para cada tipo de problema existirá un *sweet spot* o un lugar óptimo de tamaño de elemento h para obtener una solución adecuada sin con un mínimo numero de elementos.

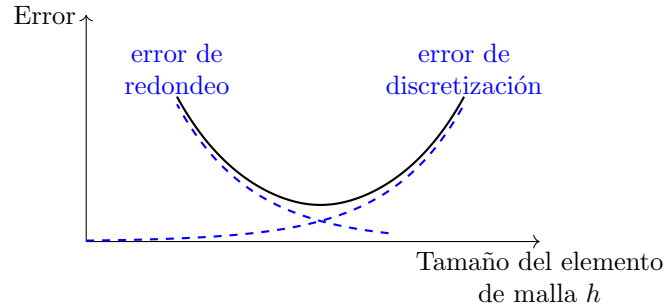


Figura 1: Error combinado de discretización y error de redondeo de una malla en material a modelar. El error total, la curva sólida corresponde a la propagación del error.

- (e) Exactamente igual al caso visto en clases, método de las imágenes. Situamos la carga imagen dentro de la esfera, de tal modo que anule el campo eléctrico en la superficie de la esfera, tal como se muestra en figura 2. Agregamos la nueva variable r_b para denotar la distancia desde el centro de la esfera a la carga imagen. De este modo tenemos que: $q' = -\frac{R}{r_a}q$, donde la carga imagen queda en $r_b = R^2/r_a$. Ahora calculamos el potencial,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{s} - \frac{q}{s'} \right) \quad (2)$$

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - 2ra \cos \theta}} \right]. \quad (3)$$

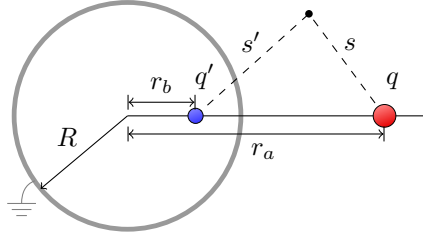


Figura 2: Método de las imágenes, carga imagen dentro de la esfera conductora.

- (f) El campo magnético de la Tierra es 25–65 μT .
- (g) La ecuación de Legendre y su solución viene dado por la fórmula de Rodrigues $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$, entonces sus polinomios iniciales son:

$$P_0(x) = 1 \quad (4)$$

$$P_1(x) = x \quad (5)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad (6)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x). \quad (7)$$

- (h) El campo eléctrico de un dipolo eléctrico es:

$$\mathbf{E} = -\nabla V_P = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (8)$$

y posee una dependencia r^{-3} .

2. Sea un condensador eléctrico (*capacitor*) con diferentes medios y geometría compleja mostrada en figura 3, con permitividad eléctricas asociada a cada uno de estos (ϵ_1 y ϵ_2), donde para $r = r_a$, se tiene que un potencia $V(r = r_a) = V_0$ mientras que en $r = r_c$ se le asocia un potencial $V(r = r_c) = 0$, determine:

- (a) [4 puntos] Obtenga una expresión explícita para el potencial escalar eléctrico $V(\mathbf{r})$ para ambos medios como también para el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Justifique el uso de ecuación de Laplace o Poisson, además de las coordenadas utilizadas.
- (b) [3 puntos] Obtenga el valor de la Capacitancia C del sistema.
- (c) [3 puntos] Obtenga el valor de la energía eléctrica para cada medio.

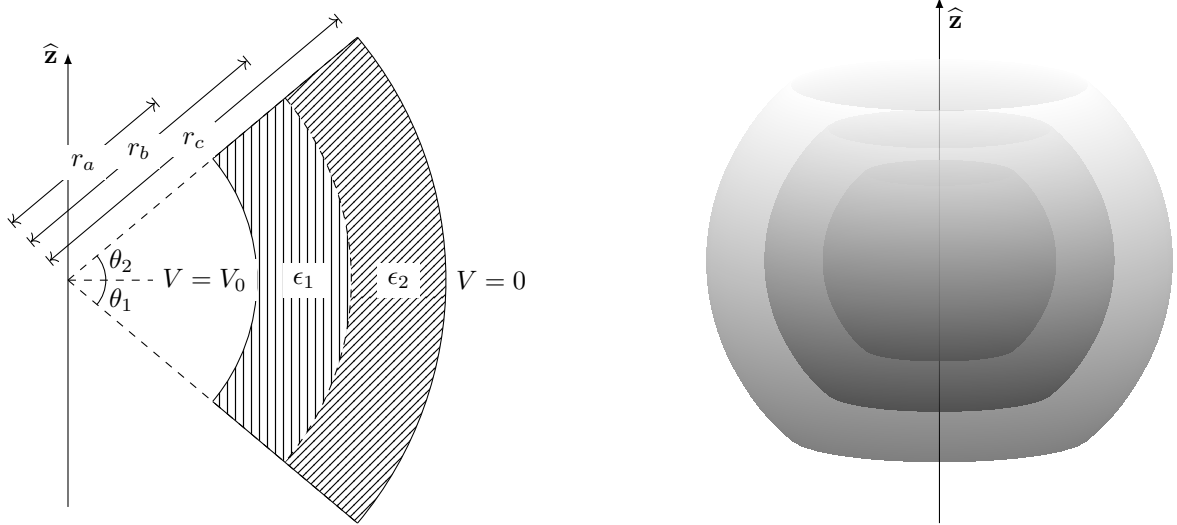


Figura 3: Izquierda: *cross-section capacitor* esférico de esferas concéntricas, pregunta 2. Los medios de una sección circular y concéntrica. Los medios 1 y 2 están denotados por las constantes ϵ_1 y ϵ_2 , respectivamente. Derecha: capacitor visto en 3 dimensiones con sus diferentes capas, corresponde a la superficie de revolución de la figura izquierda en torno a $\hat{\mathbf{z}}$.

Solución:

- (a) Usar coordenadas esféricas por la simetría del sistema. Tenemos que $V(r, \phi, \theta) = V(r)$, ya que los valores del potencial están dados por la distancia al centro del sistema y no de las componentes azimutal o polar. El problema tampoco especifica corrientes o algún generador por lo que debemos resolver la ecuación de Laplace (en coordenadas esféricas):

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad (9)$$

$$V = Ar + \frac{B}{r^2}. \quad (10)$$

Usando condiciones de frontera y continuidad (para medios 1 y 2) de la solución se

tiene que:

$$V_1(r = r_a) = -\frac{A_1}{r_a} + B_1 = V_0 \quad (11)$$

$$V_2(r = r_c) = -\frac{A_2}{r_c} + B_2 = 0 \quad (12)$$

$$V_2(r = r_b) = V_2(r = r_b) = -\frac{A_1}{r_b} + B_1 = -\frac{A_2}{r_b} + B_2 \quad (13)$$

$$\epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2 = \frac{A_1}{r^2} \epsilon_1 - \frac{A_2}{r^2} \epsilon_2 = \sigma_f \quad (14)$$

con A_1, B_1 constantes para el medio 1 y A_2, B_2 constantes para el medio 2. El valor de $\sigma_f = 0$ ya que no existe carga libre. Para el caso del campo eléctrico usamos $E = -\nabla^2 V = \frac{A}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ (para casos 1 y 2). Resolviendo el sistema de ecuaciones (11) a (14) se tiene que:

$$A_1 = \epsilon_2 \frac{V_0 r_a r_b r_c}{\epsilon_1 r_a (r_b - r_c) + \epsilon_2 r_c (r_a - r_b)} \quad (15)$$

$$B_1 = \frac{1}{r_b} (A_1 - A_2) + B_2 \quad (16)$$

$$A_2 = \epsilon_1 \frac{V_0 r_a r_b r_c}{\epsilon_1 r_a (r_b - r_c) + \epsilon_2 r_c (r_a - r_b)} \quad (17)$$

$$B_2 = \frac{\epsilon_2 r_c (r_a - r_b) + \epsilon_1 r_a (r_b - r_c)}{V_0 r_a r_b \epsilon_1}. \quad (18)$$

Con lo que con este set de constantes tenemos el potencial y el campo eléctrico reemplazando en ecuaciones (11) a (14).

- (b) La capacitancia está dada por $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_0}$. La carga total debe estar en la superficie de la esfera de radio r_a , por lo que

$$Q = \epsilon_1 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \epsilon_1 \int E_1(r = a) \hat{\mathbf{r}} \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} \quad (19)$$

$$Q = \epsilon_1 A_1 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta d\phi = \epsilon_1 A_1 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (20)$$

$$C = \frac{1}{V_0} \epsilon_1 A_1 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (21)$$

Equivalentemente uno puede realizar el mismo cálculo de carga sobre la superficie r_c , ecuación (12), y se obtiene el mismo resultado.

- (c) La energía eléctrica o el trabajo eléctrico acumulado por el sistema está dado por:

$$W_e = W_{e1} + W_{e2} = \frac{1}{2} (\epsilon_1 E_1 + \epsilon_2 E_2) \quad (22)$$

$$= \frac{\epsilon_1}{2} \int \frac{A_1}{r^2} d\tau + \frac{\epsilon_2}{2} \int \frac{A_2}{r^2} d\tau \quad (23)$$

$$= \frac{\epsilon_1 A_1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_a}^{r_b} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta dr d\phi + \frac{\epsilon_2 A_2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_b}^{r_c} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta dr d\phi \quad (24)$$

$$= \pi [\cos \theta_1 - \cos \theta_2] [\epsilon_1 A_1 (r_b - r_a) - \epsilon_2 A_2 (r_c - r_b)]. \quad (25)$$

3. Sea un transformador rectangular figura 4, el cual presenta un devanado con corriente I_0 y N vueltas con sección transversal de diámetro D . El transformador en la sección indicada en figura 4 posee dos medios con permitividad (μ_1 y μ_2), determine:
- [2 puntos] Justifique brevemente la existencia de un potencia escalar magnético en relación al campo auxiliar magnético H , así como la dependencia de este en relación a su dominio en base a las simplificaciones que considere pertinente.
 - [3 puntos] Obtenga una expresión explícita para el el campo magnético B y el potencial escalar magnético F para ambos medios.
 - [3 puntos] Obtenga el valor de la inductancia L a partir del flujo magnético.
 - [2 puntos] Obtenga el valor de la inductancia L a partir de la energía magnética.

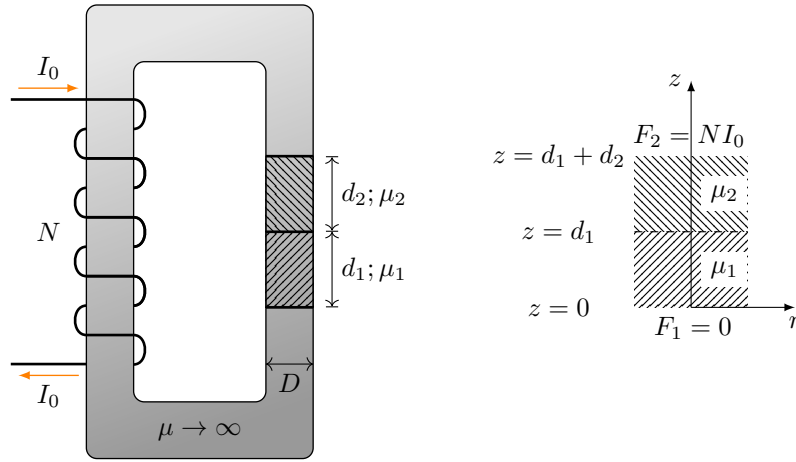


Figura 4: Transformador rectangular del pregunta 3. Nótese la orientación de el sistema coordenado. La sección transversal del transformador posee un diámetro D .

Solución:

- Existirá un potencial escalar magnético junto a los medios dieléctricos debido a que $B = \mu H$ ($\mu \rightarrow \infty \Rightarrow H = 0$), con lo que corriente no deben existir, ya que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = -\nabla F. \quad (26)$$

- Ahora resolvemos para el potencial escalar magnético, el campo magnético y campo de intensidad magnética para los dos medios con una distinta permeabilidad. Usaremos como punto de referencia u origen del eje coordenado igual a la figura 4 (ejes de la derecha $z = 0$). Para esto tendremos la ecuación de Laplace en una dimensión, es decir:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \quad (27)$$

Separando para las regiones 1 y 2, tenemos:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow F_1 = C_1 z + C_2 \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow F_2 = C_3 z + C_4. \quad (29)$$

Vemos ahora las condiciones de frontera que posee el sistema:

$$F_2(z = d_1 + d_2) = C_3(d_1 + d_2) + C_4 = NI_0 \quad (30)$$

$$F_1(z = 0) = C_1 \times 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0 \quad (31)$$

$$F_1(z = d_1) = F_2(z = d_1) \quad \Rightarrow C_1 d_1 + \cancel{C_2}^0 = C_3 d_1 + C_4 \quad (32)$$

$$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 \quad \Rightarrow C_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} C_3 \quad (33)$$

$$(34)$$

Reordenando el sistema de ecuaciones tenemos la solución a las constantes:

$$C_1 = \frac{NI_0}{d_1 + d_2 \frac{\mu_1}{\mu_2}} \quad (35)$$

$$C_2 = 0 \quad (36)$$

$$C_3 = \frac{NI_0}{d_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + d_2} \quad (37)$$

$$C_4 = \frac{d_1 NI_0 (\mu_2 - \mu_1)}{d_1 \mu_2 - d_2 \mu_1}. \quad (38)$$

Finalmente potenciales y campos son:

$$F_1 = \frac{NI_0}{d_1 + d_2 \frac{\mu_1}{\mu_2}} z \quad (39)$$

$$F_2 = \frac{NI_0}{d_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + d_2} z + \frac{d_1 NI_0 (\mu_2 - \mu_1)}{d_1 \mu_2 - d_2 \mu_1} \quad (40)$$

$$H_1 = -\nabla F_1 = -\frac{NI_0}{d_1 + d_2 \frac{\mu_1}{\mu_2}} \quad (41)$$

$$H_2 = -\nabla F_2 = -\frac{NI_0}{d_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + d_2}. \quad (42)$$

(c) La inductancia para el caso de un sistema con N vueltas es:

$$F_1 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a} = \mu_1 C_1 \int (-\hat{\mathbf{z}}) r dr d\phi (-\hat{\mathbf{z}}) = \mu_1 C_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} r dr d\phi \quad (43)$$

$$= \mu_1 C_1 \pi \frac{D^2}{4} = \mu_1 \pi \frac{D^2}{4} \frac{NI_0}{d_1 + d_2 \frac{\mu_1}{\mu_2}}. \quad (44)$$

Con C_1 solución en ecuación (35). Donde por condiciones de frontera tenemos que $F_1 = F_2$. La inductancia para el transformador es:

$$L = \frac{NF}{I_0} = \mu_1 \pi \frac{D^2}{4} \frac{NI_0}{d_1 + d_2 \frac{\mu_1}{\mu_2}} \frac{N}{I_0} = \frac{\pi (DN)^2 \mu_1 \mu_2}{4 d_1 \mu_2 + d_2 \mu_1}. \quad (45)$$

(d) Para calcular la energía es necesario considerar ambos medios, entonces:

$$\frac{1}{2} LI_0^2 = \int \frac{1}{2} \mu H^2 d\tau = \int \frac{1}{2} \mu_1 H_1^2 d\tau + \int \frac{1}{2} \mu_2 H_2^2 d\tau \quad (46)$$

$$= \frac{1}{2} \int \mu_1 \left(\frac{NI_0}{d_1 + d_2 \frac{\mu_1}{\mu_2}} \right)^2 d\tau + \frac{1}{2} \int \mu_2 \left(\frac{NI_0}{d_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + d_2} \right)^2 d\tau \quad (47)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_1 \left(\frac{NI_0}{d_1 + d_2 \frac{\mu_1}{\mu_2}} \right)^2 \int d\tau + \frac{1}{2} \mu_2 \left(\frac{NI_0}{d_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + d_2} \right)^2 \int d\tau \quad (48)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_1 \left(\frac{NI_0}{d_1 + d_2 \frac{\mu_1}{\mu_2}} \right)^2 \frac{D^2}{4} \pi d_1 + \frac{1}{2} \mu_2 \left(\frac{NI_0}{d_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + d_2} \right)^2 \frac{D^2}{4} \pi d_2 \quad (49)$$

$$L = \frac{\pi (DN)^2 \mu_1 \mu_2}{4 d_1 \mu_2 + d_2 \mu_1}. \quad (50)$$

Con lo que se comprueba que hemos llegado al mismo resultado en ecuación (45).

4. [10 puntos bonus] Una placa de un material con constante ϵ posee dimensiones de $8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$, y se le aplica potencial como muestra figura 5. Entonces, determine el potencial en el centro de la placa y el campo eléctrico en el centro de la placa.

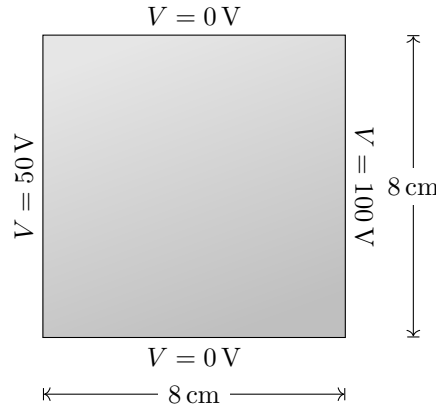


Figura 5

Solución:

Discretizamos la sección con un elemento de tamaño $h = 2 \text{ cm}$, de tal modo que tenemos un nodo justo al centro de la placa, V_5 , mostrado en figura 6.

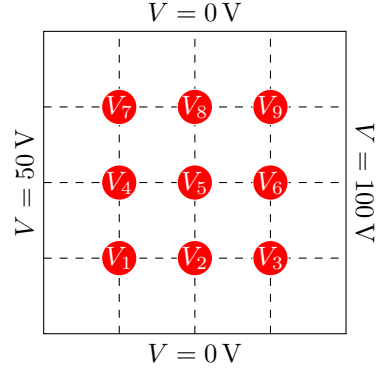


Figura 6: Discretización de figura 5. El tamaño del elemento es $h = 2 \text{ cm}$.

Ahora generamos el set de ecuaciones lineales con la definición de *five-point equal arm difference*, donde V_5 es el nodo central:

$$V_1 = \frac{1}{4} (50 + V_2 + V_4) \quad (51)$$

$$V_2 = \frac{1}{4} (V_1 + V_3 + V_5) \quad (52)$$

$$V_3 = \frac{1}{4} (V_2 + V + 6 + 100) \quad (53)$$

$$V_4 = \frac{1}{4} (V_1 + V_5 + V_7 + 50) \quad (54)$$

$$V_5 = \frac{1}{4} (V_2 + V_4 + V_6 + V_8) \quad (55)$$

$$V_6 = \frac{1}{4} (V_3 + V_5 + V_9 + 100) \quad (56)$$

$$V_7 = \frac{1}{4} (V_4 + V_8 + 50) \quad (57)$$

$$V_8 = \frac{1}{4} (V_5 + V_7 + V_9) \quad (58)$$

$$V_9 = \frac{1}{4} (V_6 + V_8 + 100) . \quad (59)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ -100 \\ -50 \\ 0 \\ -100 \\ -50 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$[\mathbf{A}] \mathbf{V} = \mathbf{B}. \quad (61)$$

Al resolver el sistema por cualquier método debemos obtener:

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.299 & -0.098 & -0.031 & -0.098 & -0.063 & -0.027 & -0.031 & -0.027 & -0.013 \\ -0.098 & -0.33 & -0.098 & -0.063 & -0.125 & -0.063 & -0.027 & -0.045 & -0.027 \\ -0.031 & -0.098 & -0.299 & -0.027 & -0.063 & -0.098 & -0.013 & -0.027 & -0.031 \\ -0.098 & -0.063 & -0.027 & -0.33 & -0.125 & -0.045 & -0.098 & -0.063 & -0.027 \\ -0.063 & -0.125 & -0.063 & -0.125 & -0.375 & -0.125 & -0.063 & -0.125 & -0.063 \\ -0.027 & -0.063 & -0.098 & -0.045 & -0.125 & -0.33 & -0.027 & -0.063 & -0.098 \\ -0.031 & -0.027 & -0.013 & -0.098 & -0.063 & -0.027 & -0.299 & -0.098 & -0.031 \\ -0.027 & -0.045 & -0.027 & -0.063 & -0.125 & -0.063 & -0.098 & -0.33 & -0.098 \\ -0.013 & -0.027 & -0.031 & -0.027 & -0.063 & -0.098 & -0.031 & -0.098 & -0.299 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 28.57142857 \\ 28.125 \\ 46.42857143 \\ 36.16071429 \\ 37.5 \\ 57.58928571 \\ 28.57142857 \\ 28.125 \\ 46.42857143 \end{bmatrix} \mathbf{V}. \quad (62)$$

Con lo que el potencial en el centro del cuadrado es $V_5 = 37.5 \text{ V}$.

Otra forma más rápida de llegar al resultado es usando el principio de la ecuación de Laplace y distribución del potencial. Por simetría del sistema tenemos que el potencial en el centro del cuadrado es el promedio de los potenciales en los nodos de las esquinas, es decir: $V_5 = \frac{1}{4} (0 + 0 + 100 + 50) = 37.5 \text{ V}$.

Como ahora tenemos los valores en cada nodo de la figura 6 podemos calcular numéricamente el valor del campo eléctrico, $\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}$, aproximamos usando toda la información disponible, esto es usando diferencias finitas centradas (*central-difference*), es

decir:

$$\frac{dV}{dx} \approx \frac{V(x_5 + h) - V(x_5 - h)}{2h} = \frac{V_6 - V_4}{2h} = -1389 \text{ V m}^{-1}, \quad (63)$$

$$\frac{dV}{dy} \approx \frac{V(y_5 + h) - V(y_5 - h)}{2h} = \frac{V_2 - V_8}{2h} = 0 \text{ V m}^{-1}, \quad (64)$$

donde hemos usado $\Delta x = \Delta y = h$, ya que ambos elementos son iguales. Entonces tenemos que:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \approx -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \approx \hat{\mathbf{x}} 1389 \text{ V m}. \quad (65)$$

Lo que nuevamente tiene sentido ya que el campo debe ser cero en la componente y (ya que el potencial es cero en sus bordes).

¡Buena suerte!