Electromagnetismo Aplicado

Unidad 2: Ecuación de onda para campos eléctrico y magnético – reflexión y transmisión

Prof. Tomás Cassanelli

Departamento Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

10 de octubre de 2023

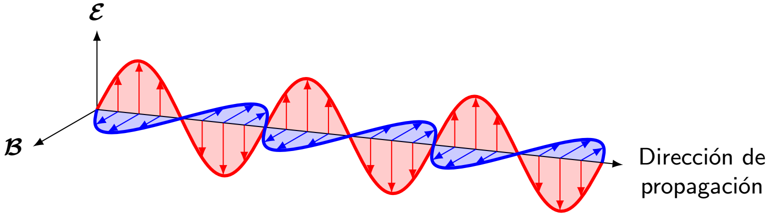
tcassanelli@ing.uchile.cl

Contenidos

Figura: Augustin-Jean Fresnel 1788–1827. Fresnel (pronunciado *frenel*) fue un físico e ingeniero francés que contribuyó significativamente a la teoría ondulatoria de la luz. Fresnel estudió el comportamiento de la luz tanto teórica como experimentalmente. El dominio de Fresnel particularmente importante para antenas (Stutzman & Thiele 1981).

Resumen clase anterior

- Podemos hacer muchas analogías de ondas mecánicas a ondas electromagnéticas
- La luz se propaga en el vacío con velocidad $c \equiv u_0$ y en medios **lineales** y **homogéneos** e **isotrópicos** con velocidad u
- La radiación posee polarización, tipos de polarización: circular, lineal, elíptica o no polarizada
- Para cuantificar mejor el porcentaje de polarización de una onda usamos la base de *Stokes*
- *Blackbody* (radiación cuerpo negro) $\rightarrow$ no polarizado, radiación incoherente térmica (*coherent and incoherent, thermal and nonthermal*)
- Laser es un ejemplo de radiación coherente (que puede ser muy limitada en $\Delta\nu$) y pulsar (estrellas de neutrones, radiación natural)



Otras propiedades de las ondas electromagnéticas

- Recordemos que la longitud de onda y frecuencia están relacionadas con la velocidad de propagación (aunque también existe velocidad de fase y otras, que no dependen de igual manera): $u = \lambda\nu$
- La energía se expresa como $E = h\nu$, con h la constante de Planck, $h \equiv 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$

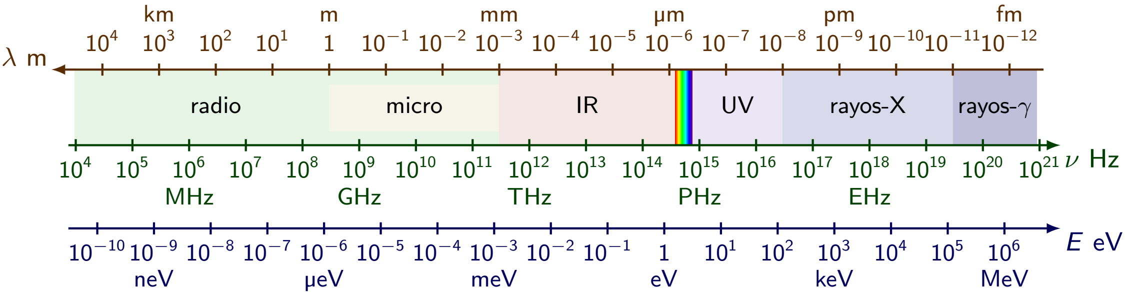


Figura: Espectro electromagnético.

Reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas

- Analicemos la propagación desde el formalismo de física (Griffiths 2017), y sin considerar el término σ
- Supongamos que el plano xy es la frontera o borde entre dos materiales
- Una onda plana[1], de frecuencia ω, viajando en la dirección $z+$ y polarización en la dirección x

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_I(z,t) = E_{0I}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 z-\omega t)}\hat{\mathbf{x}} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_I(z,t) = B_{0I}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 z-\omega t)}\hat{\mathbf{y}} = \frac{E_{0I}}{v_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 z-\omega t)}\hat{\mathbf{y}} \tag{2}$$

- La onda reflejada R es generada por la onda incidente I:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_R(z,t) = E_{0R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k_1 z-\omega t)}\hat{\mathbf{x}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_R(z,t) = -\frac{1}{v_1}E_{0R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k_1 z-\omega t)}\hat{\mathbf{y}} \tag{4}$$

- Donde el signo de ecuación (4), viene dado por $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}$

[1] Que puede ser monocromática, $E \in \mathbb{C}$, pero no un frente de ondas esférico.

Reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas

- Como sabemos de ondas mecánicas también existirá una porción de la onda que se transmitirá en el medio 2,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_T(z,t) = E_{0\,T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2 z-\omega t)}\widehat{\mathbf{x}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_T(z,t) = \frac{1}{v_2}E_{0\,T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2 z-\omega t)}\widehat{\mathbf{y}} \tag{6}$$

- La combinación de campos a la izquierda de $z=0$ $\boldsymbol{\mathcal{E}}_I + \boldsymbol{\mathcal{E}}_R$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}_I + \boldsymbol{\mathcal{B}}_R$ debe ser lo mismo a la derecha de $z=0$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}_T$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}_T$
- Usando las condiciones de borde para ondas electromagnéticas (definidas en Clase 9; i, ii, iii, y iv), pero en particular (iii) $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1^{\parallel} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_2^{\parallel}$,

$$\text{(iii)} \Rightarrow E_{0\,I} + E_{0\,R} = E_{0\,T} \tag{7}$$

$$\text{(iv)} \Rightarrow \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{1}{v_1}E_{0\,I} - \frac{1}{v_1}E_{0\,R}\right) = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{1}{v_2}E_{0\,T}\right) \tag{8}$$

Reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas

- Las dos Ecs. de frontera:

$$E_{0I} + E_{0R} = E_{0T}, \qquad E_{0I} - E_{0R} = \beta E_{0T} \tag{9}$$

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \tag{10}$$

- Y en términos de la amplitud incidente:

$$E_{0R} = \frac{1-\beta}{1+\beta} E_{0I}, \qquad E_{0T} = \frac{2}{1+\beta} E_{0I} \tag{11}$$

- Lo que es muy similar a la reflexión/transmisión de una onda mecánica, con la excepción del término μ, pero por lo general es muy similar a el vacío, luego $\beta = v_1/v_2$

$$E_{0R} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} E_{0I}, \qquad E_{0T} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} E_{0I} \tag{12}$$

- Las que son idénticas a las Ecs. de una onda mecánica
- La onda reflejada esta *en fase* y la onda si $v_2 > v_1$ y *fuera de fase* si $v_2 < v_1$

Reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas

- Usamos números complejos por conveniencia, pero la amplitud es real,

$$\mathrm{Re}\left[E_{0R}\right] = \left|\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}\right| \mathrm{Re}\left[E_{0I}\right], \qquad \mathrm{Re}\left[E_{0T}\right] = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1}\right) \mathrm{Re}\left[E_{0I}\right] \tag{13}$$

$$\mathrm{Re}\left[E_{0R}\right] = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right| \mathrm{Re}\left[E_{0I}\right], \qquad \mathrm{Re}\left[E_{0T}\right] = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right) \mathrm{Re}\left[E_{0I}\right] \tag{14}$$

- Ahora busquemos la fracción de energía incidente que es reflejada, recordemos que la intensidad es:

$$I = \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2 \tag{15}$$

- Nuevamente, podemos hacer uso de $\mu_0 = \mu_2 = \mu_2$, luego el ratio de intensidad reflejada e intensidad incidente es:

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{0R}}{E_{0I}}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \tag{16}$$

Coeficientes de reflexión y transmisión

- De forma similar calculamos el ratio de intensidad transmitida

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1}\left(\frac{E_{0T}}{E_{0I}}\right)^2 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \tag{17}$$

- Formalmente llamados R coeficiente de reflexión y T coeficiente de transmisión
- Por conservación de la energía, sabemos que siempre se cumple que:

$$R + T = 1 \tag{18}$$

- Cuando luz atraviesa desde aire ($n_1 \approx 1$) a vidrio ($n_2 = 1{,}5$), $R = 0{,}04$ y $T = 0{,}96$. No es de sorprenderse que casi toda la luz es finalmente transmitida
- Hasta acá todo bien, pero necesitamos hacer el problema más realista, considerando más tipos de materiales, entonces usamos el formalismo un poco más ingenieril.

Reflexión y transmisión en ingeniería de materiales

- Definición de coeficientes de reflexión y transmisión puede ser distinta (i.e., definición de Paul & Nasar 1998)
- Partiendo de las ecuación de Maxwell variables en el tiempo y con $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, formamos las ecuaciones de onda (i.e., calculando el rotor a las ecuaciones iii y iv)

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \tag{19}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \tag{20}$$

- Las cuales también son llamadas ecuaciones de onda o ecuación de Helmholtz. Nuevamente estamos solo interesados en las soluciones armónicas, i.e.,

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathrm{j}\omega\mu(\sigma + \mathrm{j}\omega\epsilon)\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{21}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathrm{j}\omega\mu(\sigma + \mathrm{j}\omega\epsilon)\,\mathbf{H}(\mathbf{r}) \tag{22}$$

Constante de propagación γ

- Definimos entonces la constante de propagación,

$$\gamma^2 \equiv \mathrm{j}\omega\mu\left(\sigma+\mathrm{j}\omega\epsilon\right) \quad \Rightarrow \gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\left(\sigma+\mathrm{j}\omega\epsilon\right)} \tag{23}$$

- Nótese que este es un número complejo ahora lo escribiremos como:

$$z = x + \mathrm{j}y = \|z\| \underline{/\theta} \tag{24}$$

- Donde $\|z\| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$, y θ corresponde a la parte angular, i.e., $\theta = \arctan\left(y/x\right)$
- Una propiedad interesante de esta notación es que si necesitamos calcular $\sqrt{z}$ la raíz cuadrada de un complejo entonces,

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{\|z\|}\,\underline{/\tfrac{\theta}{2} \pm n\pi} \tag{25}$$

(Re)definiendo la transmisión de onda armónica y σ

- De la ecuación (21), que solo depende de la posición

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \gamma^2 E_x \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \gamma^2 E_y \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \gamma^2 E_z \tag{28}$$

- Similarmente para $\mathbf{H}$
- Ahora supongamos que una onda se desplaza hacia la dirección $\widehat{\mathbf{z}}$ y con amplitud variable en $\widehat{\mathbf{x}}$. $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x(z)\,\widehat{\mathbf{x}}$, i.e., $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$
- Reemplazando en la ley de Faraday (en un medio lineal), podemos llegar al siguiente set

$$\text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\mathbf{H} \tag{29}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 E_x}{\mathrm{d}z^2} = \gamma^2 E_x \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}^2 H_y}{\mathrm{d}z^2} = \gamma^2 H_y \tag{30}$$

Impedancia intrínseca

- Para resolver el sistema en ecuación (30), usamos un *ansatz*

$$\begin{aligned} E_x &= E_m^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} + E_m^- \mathrm{e}^{\gamma z} & H_y &= H_m^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} + H_m^- \mathrm{e}^{\gamma z} && (31) \\ &= E_m^+ \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + E_m^- \mathrm{e}^{\alpha z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} & &= H_m^+ \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + H_m^- \mathrm{e}^{\alpha z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} && (32) \end{aligned}$$

- Donde hemos separado la constante de propagación usando ecuación (23)
- El set $E_m^{\pm}$ y $H_m^{\pm}$ son constantes indeterminadas y probablemente complejas, conviene entonces definir la siguiente variable

$$\pm\eta \equiv \pm\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma} = \frac{E_m^{\pm}}{H_m^{\pm}} \tag{33}$$

- La variable η es llamada la impedancia intrínseca del medio,

$$\eta = \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\sigma + \mathrm{j}\omega\epsilon}} = \|\eta\| \underline{/\theta_\eta} \tag{34}$$

- Nótese que para $\sigma = 0 \Rightarrow \eta = \sqrt{\mu/\epsilon} \in \mathbb{R}$, $\eta_0 \equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 376{,}7\,\Omega$

Solución a la ecuación de onda y casos

- Con lo que tenemos que:

$$E_x = E_m^+ \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \mathrm{e}^{\theta^+} + E_m^- \mathrm{e}^{\alpha z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta^-} \tag{35}$$

$$H_y = \frac{E_m^+}{\|\eta\|} \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \mathrm{e}^{\theta^+} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_\eta} + \frac{E_m^-}{\|\eta\|} \mathrm{e}^{\alpha z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta^-} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_\eta} \tag{36}$$

$$\tag{37}$$

- Con $\theta^\pm$,

$$E_m^\pm = \left\| E_m^\pm \right\| \underline{/\theta^\pm} = \left\| E_m^\pm \right\| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta^\pm} \tag{38}$$

- De aquí se desprenden muchos casos, que dependiendo del medio y materiales modificarán la solución, estos son:
  - Medio sin pérdidas $\rightarrow \sigma = 0$
  - Medio con pérdidas $\rightarrow \sigma \neq 0$
  - Buen dieléctrico $\rightarrow \sigma \ll \omega\epsilon$
  - Buen conductor $\rightarrow \sigma \gg \omega\epsilon$

Casos especiales

- Buen dieléctrico:

$$\sigma \ll \omega\epsilon \qquad \Rightarrow \alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1+\frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2}\right), \quad \eta = \frac{\mu}{\epsilon}\left(1+\mathrm{j}\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}-\frac{3}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right) \tag{39}$$

- Buen conductor:

$$\sigma \gg \omega\epsilon \qquad \Rightarrow \alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+\mathrm{j}) \tag{40}$$

- En transmisión a otros medios
  - Transmisión sin pérdidas: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$
  - Incidencia en un conductor perfecto $\sigma_2 = \infty$

Ejercicio

Queda para el lector demostrar que las cantidades en ecuaciones (39) y (40) son correctas.

Coeficiente de reflexión y transmisión en ingeniería

- Similarmente al caso anterior es posible (re)definir los coeficientes de reflexión y transmisión,

$$\widehat{R} \equiv \frac{E_R}{E_I} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \qquad \widehat{T} \equiv \frac{E_T}{E_I} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}, \tag{41}$$

$$1 + \widehat{R} = \widehat{T}. \tag{42}$$

- La cantidad $\widehat{R}$ el coeficiente de reflexión y $\widehat{T}$ el coeficiente de transmisión, nótese que $\left\|\widehat{R}\right\| \leq 1$ y que $\widehat{T}$ puede exceder la unidad en esta definición
- $\widehat{R} \in \mathbb{R}$, y $\widehat{T} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = 0$, pero en general $\widehat{R} = \left\|\widehat{R}\right\| \underline{/\theta_R} \in \mathbb{C}$, y $\widehat{T} = \left\|\widehat{T}\right\| \underline{/\theta_T} \in \mathbb{C}$

Atención!

Cuidado, existen dos definiciones de reflexión y transmisión (ecuación 18), R y T las cuales son cantidades reales, $R, T \in \mathbb{R}$. Esta definición es usada en física y no posee propiedades conductoras del medio. En general, $T \neq \widehat{T}$ y $\widehat{R} \neq R$. **La ecuación** (18) **corresponde la definición física (Griffiths 2017) y ecuación** (42) **corresponde a la definición ingenieril (y más general; Paul & Nasar 1998)**.

Frente de ondas planas e uniforme (sin pérdidas)

- Entonces en general, podemos escribir la propagación de una onda electromagnética (sin fasores) como:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x \widehat{\mathbf{x}} = \mathrm{Re}\left[E_x \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \left\|E^+\right\| \mathrm{e}^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \theta^+\right) + \left\|E^-\right\| \mathrm{e}^{\alpha z} \cos\left(\omega t + \beta z + \theta^-\right) \widehat{\mathbf{x}} \quad (43)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_y \widehat{\mathbf{y}} = \mathrm{Re}\left[H_y \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \frac{\left\|E^+\right\|}{\|\eta\|} \mathrm{e}^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \theta^+ - \theta_\eta\right) - \frac{\left\|E^-\right\|}{\|\eta\|} \mathrm{e}^{\alpha z} \cos\left(\omega t + \beta z + \theta^- - \theta_\eta\right) \widehat{\mathbf{y}}. \quad (44)$$

- Donde, recordemos que hemos asumido el caso más simple $E_y = E_z = H_x = H_z = 0$
- Existen dos casos de interés en los cuales podemos aplicar ecuaciones (43) y (44): medio sin pérdidas (*lossless media*) $\sigma = 0$, medio con pérdidas $\sigma \neq 0$
- Ayuda para visualizar ondas, vea Uniform plane waves: A 3D journey to the simplest electromagnetic wave propagation, TheSIGuy.

Frente de ondas planas e uniforme (sin pérdidas)

- Entonces sabemos que $\sigma = 0$ por lo que $\gamma = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ y $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$
- La impedancia intrínseca del medio se vuelve una cantidad puramente real, $\theta_\eta = 0$,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x\widehat{\mathbf{x}} = \left[\mathcal{E}_x^+ + \mathcal{E}_x^-\right]\widehat{\mathbf{x}} = \left[\left\|E^+\right\|\cos\left(\omega t - \beta z + \theta^+\right) + \left\|E^-\right\|\cos\left(\omega t + \beta z + \theta^-\right)\right]\widehat{\mathbf{x}}, \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_y\widehat{\mathbf{y}} = \left[\mathcal{H}_x^+ + \mathcal{H}_x^-\right] = \left[\frac{\left\|E^+\right\|}{\eta}\cos\left(\omega t - \beta z + \theta^+\right) - \frac{\left\|E^-\right\|}{\eta}\cos\left(\omega t + \beta z + \theta^-\right)\right]\widehat{\mathbf{y}}. \tag{46}$$

- La velocidad de propagación entonces es:

$$u \equiv \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \tag{47}$$

- La constante de fase (de una onda plana y uniforme):

$$\beta = \frac{\omega}{u}, \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u}{\nu}. \tag{48}$$

Incidencia normal de una onda electromagnética

- Consideramos medio 1 y medio 2, con propiedades $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ y $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$, respectivamente
- Consideramos además (y como lo hemos hecho hasta ahora), la propagación en $+\widehat{\mathbf{z}}$
- En caso de que la onda electromagnética actúe de forma normal tendremos una onda incidente, reflejada y transmitida:

$$\mathbf{E}_i = E_{ix}\widehat{\mathbf{x}} = E_i \mathrm{e}^{-\gamma_1 z}\widehat{\mathbf{x}} = E_i \mathrm{e}^{-\alpha_1 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\widehat{\mathbf{x}}, \tag{49}$$

$$\mathbf{H}_i = H_{ix}\widehat{\mathbf{y}} = \frac{E_i}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}\widehat{\mathbf{y}} = \frac{E_i}{\eta_1}\mathrm{e}^{-\alpha_1 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\widehat{\mathbf{y}} = \frac{E_i}{\|\eta_1\|}\mathrm{e}^{-\alpha_1 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_{\eta_1}}\widehat{\mathbf{y}}, \tag{50}$$

$$\mathbf{E}_r = E_{rx}\widehat{\mathbf{x}} = E_r \mathrm{e}^{\gamma_1 z}\widehat{\mathbf{x}} = E_r \mathrm{e}^{\alpha_1 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\widehat{\mathbf{x}}, \tag{51}$$

$$\mathbf{H}_r = H_{rx}\widehat{\mathbf{y}} = -\frac{E_r}{\eta_1}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}\widehat{\mathbf{y}} = -\frac{E_r}{\|\eta_1\|}\mathrm{e}^{\alpha_1 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_{\eta_1}}\widehat{\mathbf{y}}, \tag{52}$$

$$\mathbf{E}_t = E_{tx}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z}\widehat{\mathbf{x}} = E_t \mathrm{e}^{-\alpha_2 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}\widehat{\mathbf{x}}, \tag{53}$$

$$\mathbf{H}_t = H_{ty}\widehat{\mathbf{y}} = \frac{E_t}{\eta_2}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z}\widehat{\mathbf{y}} = \frac{E_t}{\|\eta_2\|}\mathrm{e}^{-\alpha_2 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_{\eta_2}}\widehat{\mathbf{y}}, \tag{54}$$

Incidencia normal de una onda electromagnética

- Las constantes de propagación y la impedancia intrínseca del medio 1 y 2 son:

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \mathrm{j}\beta_1 = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu_1\left(\sigma_1 + \mathrm{j}\omega\epsilon_1\right)}, \qquad \eta_1 = \|\eta_1\| \underline{/\theta_{\eta_1}} = \sqrt{\mathrm{j}\omega\eta_1/\left(\sigma_1 + \mathrm{j}\omega\epsilon_1\right)}, \tag{55}$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 + \mathrm{j}\beta_2 = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu_2\left(\sigma_2 + \mathrm{j}\omega\epsilon_2\right)} \qquad \eta_2 = \|\eta_2\| \underline{/\theta_{\eta_2}} = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu_2/\left(\sigma_2 + \mathrm{j}\omega\epsilon_2\right)} \tag{56}$$

- Nótese que hemos asumido que no existe alguna reflexión en el medio 2, es decir no hay función de onda con propagación $-\widehat{\mathbf{z}}$ en el medio 2
- La discontinuidad entre ambos medios debe cumplir que:

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t, \qquad \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_t, \qquad \text{para} \quad z = 0. \tag{57}$$

- Al igual que anteriormente podemos definir la reflexión y transmisión:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_2} \equiv \widehat{R}, \qquad \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_2} \equiv \widehat{T}. \tag{58}$$

- Nótese que estos coeficientes son adimensionales, que pueden ser números complejos, e.g., $\widehat{R} = \left\|\widehat{R}\right\| \underline{/\theta_{\widehat{R}}}$, y que dependen de las propiedades de los medios 1 y 2

Incidencia normal de una onda electromagnética

- La relación entre los coeficientes de transmisión y reflexión es:

$$1 + \widehat{R} = \widehat{T} \tag{59}$$

- El coeficiente de reflexión $\left\|\widehat{R}\right\| \leq 1$ y $\widehat{T}$ puede ser mayor a la unidad
- Para el caso en que los medios 1 y 2 poseen una conductividad $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ entonces estamos en un caso sin pérdidas y los coeficientes de reflexión y transmisión serán números reales (y es igual al caso más simple definido en el formalismo físico)

Incidencia oblicua de una onda electromagnética

- Consideramos medio 1 y medio 2, con propiedades $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ y $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$, respectivamente
- Ahora vemos el caso en que el ángulo de incidencia es $\theta_r \neq 0$ y ángulo de reflexión $\theta_r \neq 0$
- Sin perder generalidad asumimos que la onda plana e uniforme se transmite a través de un eje coordenado $+\widehat{\mathbf{z}}'$,
- El nuevo set ortonormal de coordenadas es $\left(x', y', z'\right)$, que en principio se puede entender como una rotación del eje coordenado del set $\left(\theta_x, \theta_y, \theta_z\right)$

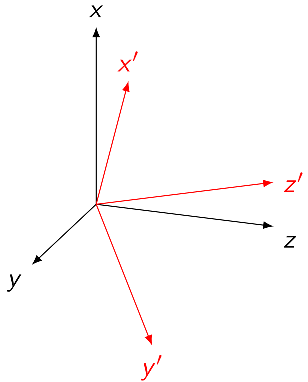


Figura: Asumimos que nuestra onda se propaga en $+\widehat{\mathbf{z}}'$ (no perdemos generalidad con este cambio).

Incidencia oblicua de una onda electromagnética

- Escribimos entonces los campos fasoriales

$$\mathbf{E} = E_m \mathrm{e}^{-\gamma z'} \widehat{\mathbf{x}}', \tag{60}$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_m}{\eta} \mathrm{e}^{-\gamma z'} \widehat{\mathbf{y}}', \tag{61}$$

- Del teorema de cosenos directores sabemos que $z' = \cos\theta_x x + \cos\theta_y y + \cos\theta_z z$
- La exponencial de la constante de propagación es:

$$\mathrm{e}^{\gamma z'} = \mathrm{e}^{\gamma \cos\theta_x x} \mathrm{e}^{\gamma \cos\theta_y y} \mathrm{e}^{\gamma \cos\theta_z z} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r}'}, \tag{62}$$

- Y como sabemos:

$$\mathbf{r} = x'\widehat{\mathbf{x}}' + y'\widehat{\mathbf{y}}' + z'\widehat{\mathbf{z}}' = x\widehat{\mathbf{x}} + y\widehat{\mathbf{y}} + z\widehat{\mathbf{z}} \tag{63}$$

- Ahora definimos el vector de propagación como:

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r} = \left(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z\right)\cdot(x, y, z) = \gamma\left(\cos\theta_x x + \cos\theta_y y + \cos\theta_z z\right). \tag{64}$$

- Por lo que se tiene:

$$\mathbf{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right)\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r}} \tag{65}$$

Incidencia oblicua de una onda electromagnética

- Donde $\left(E_x, E_y, E_z\right)$ y $\left(H_x, H_y, H_z\right)$ son las proyecciones de los vectores primados en el set coordenado (x, y, z)
- Similarmente podemos calcular el vector unitario de la propagación de onda, $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$, como:

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{|\gamma|} = \cos\theta_x \widehat{\mathbf{x}} + \cos\theta_y \widehat{\mathbf{y}} + \cos\theta_z \widehat{\mathbf{z}}, \tag{67}$$

- Luego, podemos obtener expresión vectorial para el campo auxiliar magnético:

$$\mathbf{H} = \frac{\widehat{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{E}}{\eta} \tag{68}$$

- Como ya se muestra evidente la dependencia en el ángulo de incidencia θ_i

Ley de Snell

- Nuevamente vemos el caso de ondas incidentes, reflejadas y transmitidas pero ahora con los ángulos $(\theta_i, \theta_r, \theta_t)$
- Asumiendo que la propagación se encuentra en perpendicular al plano xz, luego los campos **H** y **E** tendrán componentes x y z

$$\mathbf{E}_i = \left(E_{x\,i}, E_{y\,i}, E_{z\,i}\right) \mathrm{e}^{-\gamma_1(\sin\theta_i x+\cos\theta_i z)} \qquad \mathbf{H}_i = \left(H_{x\,i}, H_{y\,i}, H_{z\,i}\right) \mathrm{e}^{-\gamma_1(\sin\theta_i x+\cos\theta_i z)} \tag{69}$$

$$\mathbf{E}_r = \left(E_{x\,r}, E_{y\,r}, E_{z\,r}\right) \mathrm{e}^{\gamma_1(-\sin\theta_r x+\cos\theta_r z)} \qquad \mathbf{H}_r = \left(H_{x\,r}, H_{y\,r}, H_{z\,r}\right) \mathrm{e}^{\gamma_1(-\sin\theta_r x+\cos\theta_r z)} \tag{70}$$

$$\mathbf{E}_t = \left(E_{x\,t}, E_{y\,t}, E_{z\,t}\right) \mathrm{e}^{-\gamma_2(\sin\theta_t x+\cos\theta_t z)} \qquad \mathbf{H}_t = \left(H_{x\,t}, H_{y\,t}, H_{z\,t}\right) \mathrm{e}^{-\gamma_2(\sin\theta_t x+\cos\theta_t z)}. \tag{71}$$

- Las condiciones de frontera para el campo eléctrico y campo auxiliar magnético en $z = 0$ son:

$$\left(E_{x\,i}\widehat{\mathbf{x}} + E_{y\,i}\widehat{\mathbf{y}}\right) \mathrm{e}^{-\gamma_1 \sin\theta_i x} + \left(E_{x\,r}\widehat{\mathbf{x}} + E_{y\,r}\widehat{\mathbf{y}}\right) \mathrm{e}^{-\gamma_1 \sin\theta_r x} = \left(E_{x\,t}\widehat{\mathbf{x}} + E_{y\,t}\widehat{\mathbf{y}}\right) \mathrm{e}^{-\gamma_2 \sin\theta_t x} \qquad z = 0 \tag{72}$$

$$\left(H_{x\,i}\widehat{\mathbf{x}} + H_{y\,i}\widehat{\mathbf{y}}\right) \mathrm{e}^{-\gamma_1 \sin\theta_i x}\widehat{\mathbf{x}} + \left(H_{x\,r} + H_{y\,r}\widehat{\mathbf{y}}\right) \mathrm{e}^{\gamma_1 \sin\theta_r x} = \left(H_{x\,t}\widehat{\mathbf{x}} + H_{y\,t}\widehat{\mathbf{y}}\right) \mathrm{e}^{-\gamma_2 \sin\theta_t x} \qquad z = 0. \tag{73}$$

Ley de Snell

- Igualando componentes llegamos a que las siguientes exponenciales deben ser iguales:

$$\mathrm{e}^{-\gamma_1 \sin\theta_i x} = \mathrm{e}^{-\gamma_1 \sin\theta_r x} = \mathrm{e}^{-\gamma_2 \sin\theta_t x}, \tag{74}$$

- Lo que eventualmente resulta en las siguientes condiciones, la ley de reflexión

$$\theta_i = \theta_r \tag{75}$$

- Y la ley de refracción

$$\gamma_1 \sin\theta_i = \gamma_2 \sin\theta_t \tag{76}$$

- Lo interesante del caso es para $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, donde encontramos que:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_2}{\mu_1\epsilon_1}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{\epsilon_r}, \tag{77}$$

- La cual es la clásica ecuación o ley de Snell
- Esto se mantiene para muchos materiales, dieléctricos comunes (pero **no** ferromagnéticos)
- El índice de refracción de un medio que posee $\mu_r \approx 1$ está dado por el cociente $n = c/u$

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r} \qquad \Rightarrow \sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i \tag{78}$$

Ley de Snell y el ángulo de reflexión total

- Efecto dado por un ángulo crítico en el cual no deja pasar radiación, es decir $\theta_t = 90^\circ$, entonces

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2}}. \tag{79}$$

- Supongamos ahora que ángulo incidente es mayor al ángulo crítico, $\theta_i > \theta_c$, inmediatamente vemos que no existe ningún ángulo real que cumpla con esa condición
- Siguiendo el argumento de la onda transmitida, ecuación (71), podemos llegar a la siguiente conclusión:

$$\beta_2 \cos\theta_t = -\mathrm{j}\beta_2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\sin^2\theta_i - 1} = -\mathrm{j}\alpha_2 \tag{80}$$

- Entonces, tenemos una onda plana, **no uniforme**, que se propaga en la frontera entre los medios 1 y 2

Ley de Snell y el ángulo de reflexión total

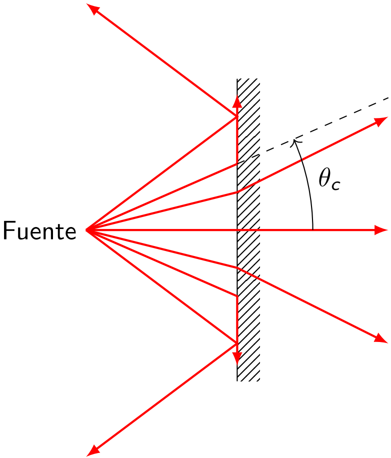


Figura: Ley de Snell (reflexión y refracción). El diagrama muestra los ángulos incidente θ_i, reflejado θ_r y transmitido θ_t para distintos θ_i iniciales. El ángulo crítico, θ_c, está dado por el rayo completamente reflejado. La ley de Snell fue derivada primero de forma empírica (con la cual solo es necesaria la física de partícula de la luz) y luego a través de las ecuaciones de Maxwell redefinida.

Ondas electromagnéticas en conductores y su *skin depth*

- Consideremos un material con ϵ, μ, σ, y un campo eléctrico de una onda incidente en el material:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\widehat{\mathbf{x}} = \left\| E^+ \right\| \mathrm{e}^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z\right) \widehat{\mathbf{x}}. \tag{81}$$

- Donde E^+ es la amplitud, e.g., $E^+ = \left\| E^+ \right\| \underline{/-\beta z}$
- A medida que la onda atraviesa el material es atenuada por el factor de *damping* $\mathrm{e}^{-\alpha z}$ sobre una distancia:

$$\delta_{\mathsf{sd}} = \frac{1}{\alpha}, \tag{82}$$

- La cual es llamada profundidad de penetración (*skin depth*) del material
- La profundidad de penetración es una medida de la distancia a la cual la onda se ha atenuado en un factor de $1/e$ o $37\,\%$
- Para un buen conductor a profundidad de penetración es:

$$\delta_{\mathsf{sd}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}} \tag{83}$$

Resumen

- Desde las ecuaciones de Maxwell derivamos las leyes de óptica geométrica
- Calculamos incidencia perpendicular y oblicua para un frente de ondas que luego se transmite y refleja
- Vimos las definiciones en ingeniería y la propagación normal y oblicua de una onda electromagnética

Nombre	**Name**	**Símbolo**	**Unidad SI**
Constante de propagación	*Propagation constant*	γ	–
Impedancia intrínseca	*Intrinsic impedance*	η	Ω
Constante de atenuación	*Attenuation constant*	α	$\mathrm{Np\,m^{-1}}$
Constante de fase	*Phase constant*	β	$\mathrm{rad\,m^{-1}}$
Longitud de onda	*Wavelength*	λ	m
Frecuencia	*Frequency*	ν	Hz
Frecuencia angular	*Angular frequency*	ω	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$
Velocidad de propagación	*Velocity of propagation*	u	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
Velocidad de propagación en el vacío	*Velocity of propagation in vacuum*	u_0 ó c	$\mathrm{m\,s^{-1}}$

Cuadro: Lista de variables relevantes en propagación de onda.

Bibliografía

Griffiths, D. J. 2017, Introduction to Electrodynamics, 3rd edn. (Prentice Hall)

Paul, C. R., & Nasar, S. A. 1998, Introduction to Electromagnetic Fields (McGraw-Hill)

Stutzman, W. L., & Thiele, G. A. 1981, Antenna theory and design