Electromagnetismo Aplicado

Unidad 2: Ecuación de onda para campos eléctrico y magnético – introducción y polarización

Prof. Tomás Cassanelli

Departamento Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

3 de octubre de 2023

tcassanelli@ing.uchile.cl

Contenidos

1 **Introducción**
2 **Ecuación de onda**
- Solución y propiedades
- Condiciones de frontera
- Introducción a reflexión y transmisión
- Polarización de onda

3 **Ondas electromagnéticas**
- Ondas electromagnéticas en el vacío

4 **Ondas electromagnéticas en un medio**
- Ondas monocromáticas
- Energía y momento de una onda

5 **Ondas electromagnéticas en materia**
- Recordatorio fasores
- Propagación y ecuaciones de Maxwell
- Condiciones de frontera

6 **Polarización de ondas electromagnéticas**
- Tipos de polarización
- La elipse de polarización y parámetros de Stokes

7 **El espectro electromagnético**
8 **Bibliografía**

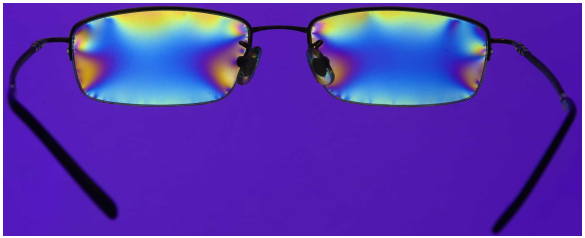

Figura: Ciertos materiales transparentes (birrefringentes), al ser sometidos a algún esfuerzo (*stress* designado con σ $\mathrm{N\,m^{-2}}$) pueden presentar cambios en su polarización (reflectada o transmitida). Propiedad llamada como fotoelasticidad (Sears et al. 2005).

Introducción

- Comportamiento del campo electromagnético
- Solución particular para el campo electromagnético y que se desplaza por un medio infinito
- Nos concentraremos en variaciones armónicas (sinusoidales en el tiempo) para campos electromagnéticos
- Haremos uso de la representación fasorial, vista en Clase 6
- Aplicaciones de la representación fasorial y soluciones de la ecuación de onda

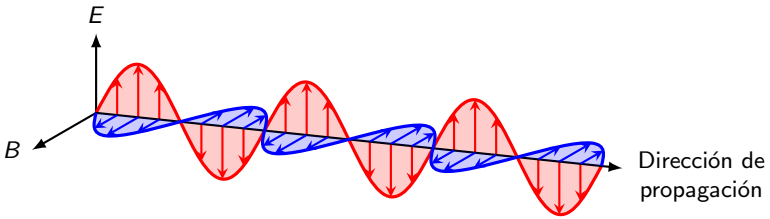

Figura: Representación gráfica de campo electromagnético.

La ecuación de onda mecánica

- Definición: *una onda es la perturbación de un medio continuo, de forma fija y a una velocidad constante*
- En presciencia de absorción: la onda disminuirá su tamaño (pero so forma siempre permanece constante)
- Si el medio es dispersivo[1] distintas frecuencias viajarán a distintas velocidades
- Pequeñas perturbaciones en una cuerda/medio (unidimensional) satisfacen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{1}$$

- Con v su velocidad de propagación y que admite una solución del tipo: $f(z,t) = g(z \pm vt)$
- Nótese que g puede ser cualquier función diferenciable
- Si la perturbación se propaga sin deformarse, entonces es solución de la ecuación de onda

[1] Por ejemplo le medio interestelar dispersa las ondas de radio (Lorimer & Kramer 2012)

La solución a la ecuación de onda

- No para sorprenderse pero la solución mas general para la ecuación de onda es la suma de su propagación positiva y negativa;

$$f(z,t) = g(z - vt) + h(z + vt) \tag{2}$$

- La ecuación de onda es una ecuación lineal!
- Ondas sinusoidales:

$$f(z,t) = A\cos\left[k(z - vt) + \delta\right] \tag{3}$$

- A amplitud, el argumento del coseno es la fase (*phase*) y su constante δ la fase constante
- k es el número de onda[2]:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad T = \frac{2\pi}{kv}; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \tag{4}$$

- ν es la frecuencia, y la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi\nu = kv \tag{5}$$

[2]Nótese que siempre k y λ son cantidades positivas! i.e., $\lambda = 2\pi/|k|$ y $\omega = |k|\, v$

La ecuación de onda

- Es mas usual escribir la solución a la ecuación de onda en términos de la frecuencia angular:

$$f(z,t) = A\cos(kz \pm \omega t + \delta) \tag{6}$$

- Con $+$: viajando hacia la izquierda y $-$: viajando hacia la derecha
- Notación compleja, utilizando la formula de Euler[3]

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{7}$$

- Luego la solución a la ecuación de onda puede ser escrita como:

$$f(z,t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(kz-\omega t+\delta)}\right] \tag{8}$$

- Donde de ahora en adelante f puede ser complejo, con amplitud compleja, pero la verdadera función es solo la parte real
- Combinación lineal de sinusoidales, cualquier onda puede ser expresada como una suma de sinusoidales

$$f(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i(kz)-wt}\, dk \tag{9}$$

[3]Todo el procesamiento digital se realiza mediante complejos y no mediante notación sinusoidal.

Ecuación de onda: reflexión y transmisión (punto de vista físico)

- Sea un cambio de medio ubicado en $z = 0$, lo que puede ser de una cuerda gruesa a una menos gruesa
- Tendremos ondas incidentes, reflejadas y transmitidas

$$f_I(z,t) = A_I e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0) \tag{10}$$

$$f_R(z,t) = A_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0) \tag{11}$$

$$f_T(z,t) = A_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, \quad (z > 0) \tag{12}$$

- El cambio de medio se ve evidenciado por k_1 a k_2, el número de onda
- Todo punto del sistema oscila con la misma frecuencia
- La frecuencia es dada por el extremo $z = -\infty$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} \tag{13}$$

Ecuación de onda: reflexión y transmisión (punto de vista físico)

- Luego la solución a la perturbación total debido a una onda incidente es:

$$f(z,t) = \begin{cases} A_I e^{i(k_1 z - \omega t)} + A_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, & z < 0 \\ A_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, & z > 0 \end{cases} \tag{14}$$

- La unión en $z = 0$ debe cumplir con la condición: $f(0^-, t) = f\left(0^+, t\right)$, la derivada también deben ser iguales ahí

$$f(0^-, t) = f\left(0^+, t\right), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0^-} = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0^+} \tag{15}$$

- Nótese que amabas condiciones aplican para la parte real y compleja, luego aplicando estas condiciones:

$$A_I + A_R = A_T, \quad k_1 (A_I - A_R) = k_2 A_T \tag{16}$$

- Finalmente

$$A_R = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_2 + v_1}\right) A_I, \quad \text{y} \quad A_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1}\right) A_I \tag{17}$$

- Si la transmisión es $T = 0$ entonces $A_R = A_I$

Polarización de onda

- En una cuerda pueden existir dos tipos de ondas (o una combinación de ellas), ondas transversales (desplazamiento $\perp$ a la dirección de propagación) y longitudinales (resorte o aire que transporta onda)
- Ondas electromagnéticas son transversas
- El vector de polarización define la dirección de vibración

$$\mathbf{f}(z,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\widehat{\mathbf{n}} \tag{18}$$

- Ondas transversas $\widehat{\mathbf{n}}$ es perpendicular a la propagación $\widehat{\mathbf{z}}$, i.e., $\widehat{\mathbf{n}} \cdot \widehat{\mathbf{z}} = 0$
- En términos del ángulo de polarización:

$$\widehat{\mathbf{n}} = \cos\theta\widehat{\mathbf{x}} + \sin\theta\widehat{\mathbf{y}} \tag{19}$$

- Es decir, una combinación de dos ondas

$$\mathbf{f}(z,t) = (A\cos\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\widehat{\mathbf{x}} + (A\sin\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\widehat{\mathbf{y}} \tag{20}$$

Ondas electromagnéticas en el vacío

- En regiones donde no existe carga ni corriente, tenemos las siguientes ecuaciones de Maxwell

$$\text{(i)} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 \qquad \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0 \tag{21}$$

$$\text{(iii)} \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \qquad \text{(iv)} \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \tag{22}$$

- Las ecuaciones constituyen un set entrelazado (*coupled*) de PDE, y pueden ser extraídas (*de-coupled*) aplicando el rotor en (iii) y (iv);

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{E}} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \right) \tag{23}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \tag{24}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}) - \nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} = \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \right) \tag{25}$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t^2} \tag{26}$$

Ondas electromagnéticas en el vacío (punto de vista físico)

- Pero como (i) y (ii) ambas igual a cero

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{E}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2}, \quad \text{y} \quad \nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t^2} \tag{27}$$

- Cada una de segundo orden (el precio de separarlas!)
- Cada una de las ecuaciones (en coordenadas cartesianas) satisface la ecuación de onda en tres dimensiones:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{28}$$

- Lo que quiere decir que las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre concibe la propagación de ondas electromagnéticas viajando a una velocidad:

$$u_0 \equiv c \equiv (\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{29}$$

- Lo que es exactamente la velocidad de la luz u (o u_0 en el vacío)
- Entonces la luz es una onda electromagnética, que quizá ahora nos parezca obvio pero en tiempos de Maxwell no!

Ondas electromagnéticas en el vacío

- Recuerde de como ϵ_0 y μ_0 llegaron al formalismo, mediante la ley de Coulomb y Biot-Savert
- Nótese también la importante contribución de Maxwell de corregir la ley de Ampère $\left(\epsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\right)$, con lo que sin esa corrección la ecuación de onda nunca hubiese surgido!
- Maxwell: *We can scarcely avoid the inference that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of the electric and magnetic phenomena* (Tolstoy & Cooper 1985)

Figura: Maxwell derivó matemáticamente que la luz es una onda electromagnética y no solo se comporta como una partícula.

Ondas monocromáticas

- Onda sinusoidal (i.e., fasorial), de frecuencia ω
- Onda de una sola frecuencia ν
- Onda viaja en una sola dirección (i.e., en z, sin dependencia x o y), entonces es una onda plana
- Onda plana: campos perpendiculares a la propagación de la onda, entonces estamos interesados en ondas del tipo:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(z,t) = \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}(z,t) = \mathbf{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{30}$$

- Con $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{B}_0$, amplitudes complejas (y los campos físicos solo la parte real!)
- Usando ecuaciones de Maxwell (i) y (ii),

$$(E_0)_z = (B_0)_z = 0 \tag{31}$$

- Lo que implica que ondas electromagnéticas son *transversas*, ahora tomando (iii)

$$-k(E_0)_y = \omega (B_0)_x, \quad k(E_0)_x = \omega (B_0)_y, \quad \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}_0 = \frac{k}{\omega}\left(\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_0\right) \tag{32}$$

- Por lo que inferimos que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ están en fase son perpendiculares uno al otro, con sus amplitudes:

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{u_0} E_0 \tag{33}$$

Ondas monocromáticas

- Podemos entonces generalizar para cualquier dirección, ondas monocromáticas viajando en cualquier dirección

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t) = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\widehat{\mathbf{n}} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t) = B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\widehat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}-\omega t\right)}\left(\widehat{\mathbf{k}}\times\widehat{\mathbf{n}}\right) = \frac{1}{u_0}\left(\widehat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\mathcal{E}}\right) \tag{35}$$

- $\widehat{\mathbf{n}}$ es llamado el vector de polarización, y como $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es trasverso: $\widehat{\mathbf{n}}\cdot\widehat{\mathbf{k}} = 0$
- La versión real del campo eléctrico y magnético de una onda electromagnética monocromática es:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t) = E_0 \cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\delta\right)\widehat{\mathbf{n}}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{u_0}E_0 \cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\delta\right)\left(\widehat{\mathbf{k}}\times\widehat{\mathbf{n}}\right) \tag{37}$$

Energía y momento de una onda electromagnética

- Recordemos que la energía por volumen que los campos eléctrico y magnético almacenan es:

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) \tag{38}$$

- Para el caso de una onda monocromática,

$$B^2 = \frac{1}{u_0^2} E^2 = \mu_0 \epsilon_0 E^2 \tag{39}$$

- Lo que implica que las contribuciones de campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética son idénticos!

$$u_{\text{em}} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \tag{40}$$

- La energía por unidad de área por unidad de tiempo (energía de densidad de flujo; *energy flux density*) transportada por los campos, i.e., el vector de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{41}$$

Energía y momento de una onda electromagnética

- Para una onda monocromática que se desplaza a través del eje z:

$$\mathbf{S} = u_0 \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)\,\widehat{\mathbf{z}} = u_0 u \widehat{\mathbf{z}} \tag{42}$$

- Nótese la simpleza de este resultado, donde la velocidad u_0 multiplicado por la densidad de energía u_{em}, es exactamente la definición de la energía de densidad de flujo
- Ondas electromagnéticas no solo transportan energía, también transportan *momentum*
- La densidad de momento puede ser descrita como (izquierda caso monocromático):

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} \equiv \text{densidad de momento} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{1}{c} u \widehat{\mathbf{z}} \quad \text{(según definición en slide 23)} \tag{43}$$

- En el caso de la luz $\lambda \sim 5 \times 10^{-7}\,\text{m}$, con periodos súper rápidos $t \sim 10^{-15}\,\text{s}$, no es posible realizar observaciones precisas, por lo que para cuantificar energía y momento (u otros parámetros) utilizamos su valor promedio

$$\langle u_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2, \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} u_0 \epsilon_0 E_0^2 \widehat{\mathbf{z}}, \quad \langle \boldsymbol{\mathcal{P}} \rangle = \frac{1}{2u_0}\epsilon_0 E_0^2 \widehat{\mathbf{z}} \tag{44}$$

- Lo cual es obtenido al integrar ecuación (40) entre $[0, T]$

Energía y momento de una onda electromagnética

- La energía promedio transportada por unidad de área es llamada **intensidad**:

$$I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} u_0 \epsilon_0 E_0^2 \tag{45}$$

- Cuando una onda electromagnética (e.g., luz) cae de frente en un material que la absorbe, generará un momento sobre la superficie del material
- En una transferencia de momento[4], de tiempo Δt, el momento es $\Delta \mathbf{p} = \langle \mathcal{P} \rangle A u_0 \Delta t$, entonces la presión de radiación (fuerza promedio por unidad de área):

$$P = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{u_0} I \tag{46}$$

- En un reflector perfecto, la presión sera hasta dos veces mas, ya que el momento cambia de sentido
- Experimentos de masa inercial, una caja con fotones posee masa[5]

[4] Con **p** la llamada cantidad de movimiento o momento del sistema y **no** el momento dipolar eléctrico (definición microscópica del vector de polarización). Lamentablemente están definidos con la mima variable. Similarmente para la presión P variable escalar en Pa y **no P** el momento dipolar por unidad de volumen.

[5] Una buena introducción al tema: Space Time: the true nature of matter and mass.

Ecuaciones de Maxwell en notación fasorial

- Recordatorio ecuaciones de Maxwell en representación fasorial

(i) $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

(ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

(iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\mathrm{j}\omega\mathbf{B}$

(iv) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathrm{j}\omega\mathbf{D}$

- Con cantidades $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}e^{\mathrm{j}\omega t}$ y en fasores: $\dfrac{\partial}{\partial t} \rightarrow \mathrm{j}\omega$
- Para ondas electromagnéticas asumiremos que no existen fuentes en le medio o material por el cual la onda se propaga, i.e., $\rho = 0$ además de lineal, homogéneo e isotrópico

(i) $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

(ii) $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$

(iii) $\nabla \times \mathbf{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\mathbf{H}$

(iv) $\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathrm{j}\omega\epsilon\mathbf{E}$

Propagación de ondas electromagneticas en materia (notación ingenieril)

- Propagación en medios lineales, homogéneos e isotrópicos, dentro de materia pero donde no existe corriente ni carga eléctricas
- Tomamos el rotor de la ley de Faraday y la ley de Ampère modificada, entonces podemos llegar a que:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{E}} = \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \tag{47}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{H}} = \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial t^2} \tag{48}$$

- Asumimos además que la solución a la ecuación de onda posee propiedades armónicas, algo no nuevo ya que vimos que campos armónicos son la solución a la ecuación de Laplace y Poisson, algo muy similar aquí, entonces se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mathrm{j}\omega\mu\left(\sigma + \mathrm{j}\omega\epsilon\right)\mathbf{E} \tag{49}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mathrm{j}\omega\mu\left(\sigma + \mathrm{j}\omega\epsilon\right)\mathbf{H} \tag{50}$$

- Nótese que ahora no solo estamos en el vacío o en algún medio sin propiedades de movimiento de cargas, si no que ahora el medio mismo posee propiedades de conductividad con σ

Propagación de ondas electromagneticas en materia (notación ingenieril)

- Donde podemos definir una nueva variable compleja:

$$\gamma^2 \equiv \mathrm{j}\omega\mu\left(\sigma + \mathrm{j}\omega\epsilon\right) \tag{51}$$

$$\gamma = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\left(\sigma + \mathrm{j}\omega\epsilon\right)} = \alpha + \mathrm{j}\beta \tag{52}$$

- γ es la constante de propagación, que puede ser descompuesta en términos de dos constantes más la constante de atenuación y la constante de fase, para α y β respectivamente
- El rol que juega γ es análogo al número de onda k, pero mucho más general

$$\nabla^2\mathbf{E} = \gamma^2\mathbf{E} \tag{53}$$

$$\nabla^2\mathbf{H} = \gamma^2\mathbf{H} \tag{54}$$

Propagación de ondas electromagneticas en materia

- Una onda electromagnética que atraviesa un material polariza y magnetiza al material a medida que avanza, lo que resulta en dipolos que oscilan, estos luego se combinan para crear la misma onda, con la **misma frecuencia**, pero con distinta velocidad de propagación, de $(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$ a $(\mu\epsilon)^{-1/2}$
- Evidentemente ondas electromagnéticas que se propagan por un medio lineal y homogéneo, con velocidad de medio

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{u}{n}, \quad n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \tag{55}$$

- Llamado indice de refracción, para la mayoría de los materiales μ es muy parecido a μ_0

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r}, \qquad \text{ya que usualmente} \quad \mu_0 \approx \mu \tag{56}$$

- Con ϵ_r la llamada constante dieléctrica, con $\epsilon_r > 1$, i.e., una onda electromagnética se mueve mas lento en un medio, $u_0 \to c$

Condiciones de frontera para una onda electromagnética

- Podemos entonces replicar los mismos cálculos de u_{em} y $\mathbf{S}$,

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2}\left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right), \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \tag{57}$$

- Similarmente para la intensidad

$$I = \frac{1}{2}\epsilon c E_0^2 \tag{58}$$

- ¿Qué es lo que sucede al pasar de un medio a otro? Similarmente a ondas en una cuerda, existirán ondas reflejadas y transmitidas entre dos medios lineales

Ondas electromagnéticas en el vacío

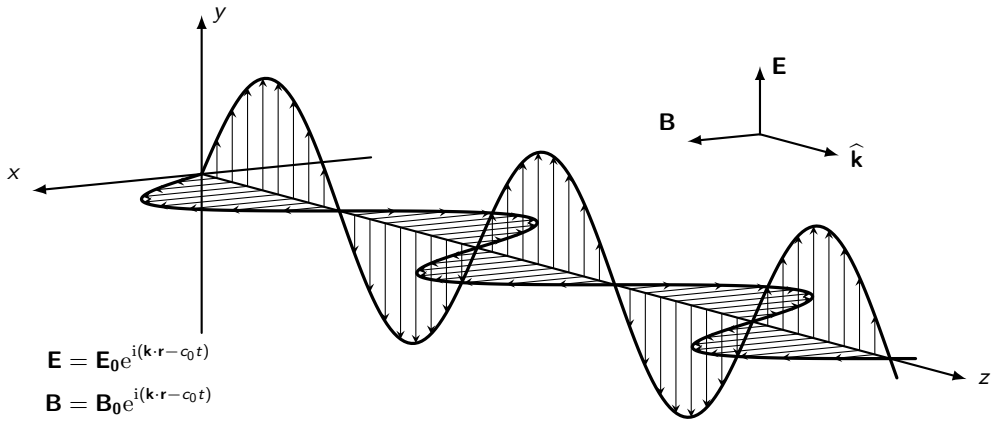

Figura: Propagación de onda monocromática (en dirección $\widehat{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{k}}$) en algún instante t.

Polarizacion

- Una onda puede ser polarizada lineal, circular[6], una combinación de las dos o totalmente sin polarización (Born & Wolf 1965)
- Nuevamente pensemos en el caso de una onda electromagnética que se transporta en dirección $\hat{\mathbf{z}}$
- El campo eléctrico de la onda puede ser descrito como:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}} \tag{59}$$

$$\mathbf{E}(z,t) = \left(A_x e^{i\delta_x}\hat{\mathbf{x}} + A_y e^{i\delta_y}\hat{\mathbf{y}}\right) e^{i\left(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{z}}-\omega t\right)} \tag{60}$$

- Donde los términos de fase are resumidos con $\delta \equiv \delta_x - \delta_y$
- La polarización se puede deber a: radiación de ciclotrón, por el efecto Zeeman, oscilación de plasma, etc
- La naturaleza es altamente polarizada!

[6] Efecto de polarización circular en un Hylamorpha elegans (San Juan) @physicsfun

Onda electromagnética linealmente polarizada

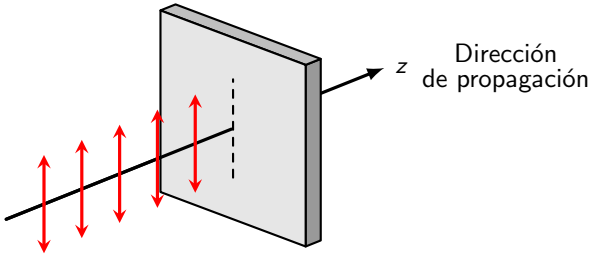

Figura: Propagación de onda linealmente polarizada. Flechas muestran la máxima amplitud del campo eléctrico. Nótese, que este es el tipo de diagrama que se usa para caracterizar ondas linealmente polarizadas, pero ellas si tienen crestas y valles.

Onda electromagnética circularmente polarizada

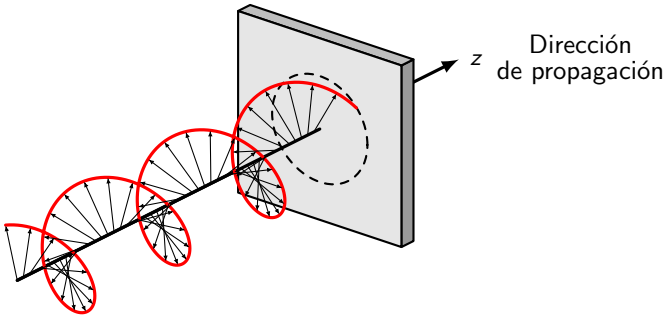

Figura: La propagación de la onda describe una circunferencia en el plano xy. Flechas indican el vector de amplitud de la onda, que en este caso podría ser **E**.

Onda electromagnética no polarizada

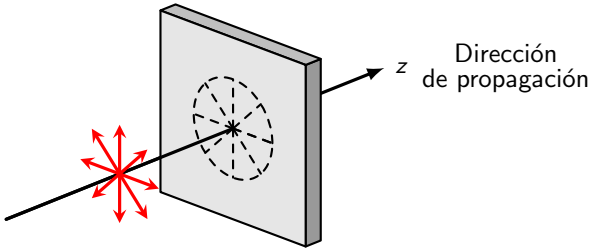

Figura: Frente de onda no polarizado o *unpolarized*. Existen muchas fuentes naturales que emiten sin polarización, por ejemplo el Sol. una onda puede dejar de ser no polarizada al interactuar con materia, en reflexión y transmisión.

La elipse de polarización

- Describimos la onda en ecuación (60) y centramos elipse en coordenadas $\left(\widehat{\boldsymbol{\xi}}, \widehat{\boldsymbol{\eta}}\right)$
- χ ángulo de elipse, da la fracción entre las amplitudes de los ejes ξ y η
- La proyección de la elipse también puede ser descrita por

$$\tan(\alpha) = \frac{A_y}{A_x} \tag{61}$$

$$\tan(2\psi) = \tan(2\alpha)\cos\delta \tag{62}$$

$$\tan(2\chi) = \sin(2\alpha)\sin\delta \tag{63}$$

- Cuando la diferencia de fases es cero ($\delta = 0$ o $\chi = 0$), el vector **E** se vuelve linealmente polarizado

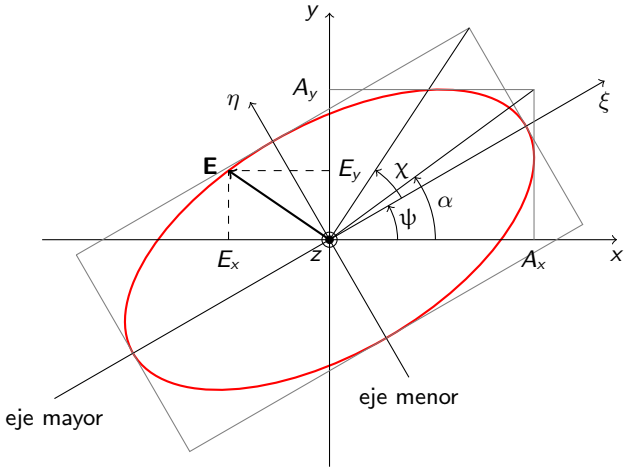

Figura: Elipse de polarización, frente de ondas visto de cara al eje z.

Parámetros de Stokes

- Para cuantificar el grado de polarización de una onda, ya sea circular o linear, usamos la representación de Stokes
- Los parámetros de Stokes son: I, Q, U, y V, y son llamados observables
- Cuando nuestros observables han sido *observados* mediante un receptor análogo/digital que posee polarización lineal, entonces podemos describir los parámetros de Stokes como:

$$I \equiv \left\langle A_x^2 + A_y^2 \right\rangle \tag{64}$$

$$Q \equiv \left\langle A_x^2 - A_y^2 \right\rangle \tag{65}$$

$$U \equiv \left\langle 2A_x A_y \cos\delta \right\rangle \tag{66}$$

$$V \equiv \left\langle 2A_x A_y \sin\delta \right\rangle \tag{67}$$

- Las cantidades $\sqrt{Q^2 + V^2}$ y Q/U describen la componente lineal y circular de la polarización, respectivamente

Parámetros de Stokes

- Definimos las cantidades:

$$I_p \equiv \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}, \quad \text{y} \quad \tan(2\psi) = \frac{U}{Q} \tag{68}$$

- El flujo de una fuente que emite radiación circularmente polarizada derecha (RCP; *right handed circular polarization*), cuando $V > 0$
- En caso contrario LCP (*left handed circular polarization*), $V < 0$
- En general, solo cuando el frente de ondas es monocromático, entonces $I_p = I$, y el *ratio* es el grado de polarización

$$p \equiv \frac{I_p}{I} \tag{69}$$

- Cuando $0 < p < 1$ la fuente es parcialmente polarizada y cuando $p = 0$ la fuente no es polarizada (*unpolarized*)
- Los parámetros de Stokes pueden también ser expresados en términos de polarizaciones circulares, viz., cuando observamos/emitimos con un polarizados circular (Lorimer & Kramer 2012)

Bases de polarización

- Ya sabemos que es posible representar un sistema en términos de bases, las cuales son ortonormales
- Las bases más usadas son: lineales, circulares, y Stokes
- La base lineal es la más usada en receptores de ondas de radio ya que su geometría es simple
- Stokes es la base natural de un frente de ondas, y es conveniente trabajar en ella ya que nos da información de polarización

La radiación y su espectro

- Colores visibles están dentro del rango de 300–760 nm (ultravioleta a longitud de onda mas larga visible, rojo)

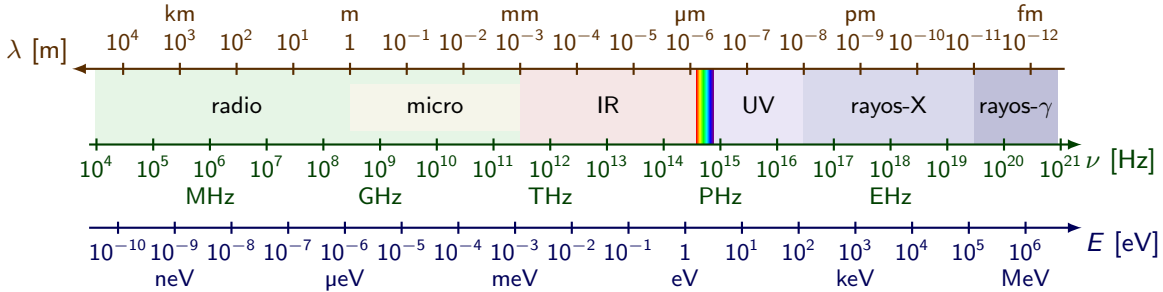

Figura: Espectro electromagnético.

Resumen

- Ondas mecánicas y su definición de ecuación de onda
- Propiedades de las ondas, su solución armónica (onda plana y uniforme)
- La luz con velocidad en el vació, u_0, se transporta en otros medios con velocidad c, siempre y cuando el medio sea lineal y homogéneo
- La radiación posee polarización, esta puede ser descrita en RCP y LCP o linealmente
- La polarización puede ser expresada en términos de una base más adecuada, Stokes
- Próxima clase: propiedades de ondas electromagnéticas en su propagación, reflexión, y otros

Bibliografía

Born, M., & Wolf, E. 1965, Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light

Lorimer, D. R., & Kramer, M. 2012, Handbook of Pulsar Astronomy

Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., & Freedman, R. A. 2005, Física Universitaria, 9th edn., Vol. 2 (Pearson Education)

Tolstoy, I., & Cooper, L. N. 1985, American Journal of Physics, 53, 1021